Resúmen Teoría de Elásticidad

by Dino Risso

drisso@ubiobio.cl
http://maxwell.ciencias.ubiobio.cl/~drisso

Abstract

Un pequeño resumen de teoria de elasticidad, siguiendo el libro de Landau-Lifschitz

Introducción

Posición de un punto del cuerpo se define como $\vec{r}$. Si el cuerpo se deforma posición se define como $\vec{r}\,'$. La deformación (vector desplazamiento) es la diferencia $\vec{u} = \vec{r}\,' - \vec{r}$.
El vector desplazamiento es función de $\vec{r}$

$$\vec{u} = \vec{u}(\vec{r})$$

Bajo una deformación del cuerpo las distancias entre puntos cambian.

$$\vec{r}_1 \rightarrow \vec{r}_1{}' = \vec{r}_1 + \vec{u}_1$$
$$\vec{r}_2 \rightarrow \vec{r}_2{}' = \vec{r}_2 + \vec{u}_2$$

si son dos puntos muy cercanos la diferencia de posición entre ellos cambia de acuerdo a:

$$d\vec{r}\,' = d\vec{r} + d\vec{u}$$

o equivalentemente

$$\mathrm{dx}_i' = \mathrm{dx}_i + \mathrm{du}_i$$

Strain Tensor

la distancia entre los puntos satisface $dl^2 = dx_i dx_i$ inicialmente, luego se cumple $dl'^2 = dx_i' dx_i' = (dx_i + du_i)^2$. Como $du_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_l} dx_l$

$$\mathrm{d}l'^2 = \mathrm{d}l^2 + 2\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\mathrm{d}x_i\mathrm{d}x_k + \frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\partial u_i}{\partial x_l}\mathrm{d}x_k\mathrm{d}x_l$$

$$\begin{aligned}\mathrm{d}l'^2 &= \mathrm{d}l^2 + 2\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\mathrm{d}x_i\mathrm{d}x_k + \frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\partial u_i}{\partial x_l}\mathrm{d}x_k\mathrm{d}x_l \\ = \mathrm{d}l^2 + 2\frac{1}{2}&\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\mathrm{d}x_i\mathrm{d}x_k + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\mathrm{d}x_i\mathrm{d}x_k + \frac{\partial u_l}{\partial x_k}\frac{\partial u_l}{\partial x_i}\mathrm{d}x_k\mathrm{d}x_i\right) \\ &= \mathrm{d}l^2 + 2\underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k}\frac{\partial u_l}{\partial x_i}\right)}_{u_{\mathrm{ik}}}\mathrm{d}x_k\mathrm{d}x_i\end{aligned}$$

u_{ik} es el *strain tensor* (simétrico). Se puede diagonalizar en un punto dado (lo que no quiere decir que sea diagonal en otro punto). Hay 3 valores asociados a las componentes diagonales: $u^{(1)}, u^{(2)}, u^{(3)}$. El elmento de longitud cerca del punto donde se diagonaliza queda:

$$\mathrm{d}l'^2 = (\delta_{\mathrm{ik}} + 2u_{\mathrm{ik}})\mathrm{d}x_i\mathrm{d}x_k$$

$$\mathrm{d}l'^2 = (1 + 2u^{(1)})\mathrm{d}x_1^2 + (1 + 2u^{(2)})\mathrm{d}x_2^2 + (1 + 2u^{(3)})\mathrm{d}x_3^2$$

Hay 3 términos independientes: el strain de cualquier elemento de volumen es compuesto de tres strain independientes en tres direcciones mutuamente perpendiculares. La longitud dx_i' en la dirección i queda dada por: $dx_i' = dx_i\sqrt{1+2u^{(i)}}$. El estiramiento relativo resulta:

$$\frac{dx_i' - dx_i}{dx_i} = \sqrt{1+2u^{(i)}} - 1$$

Para pequeñas deformaciones (excepto thin rods y otras yerbas) se tiene u_i chico luego

$$u_{\mathrm{ik}} \approx \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)$$

y las extensiones relativas en una dirección principal resultan

$$\frac{dx_i' - dx_i}{dx_i} \approx u^{(i)}$$

se tiene $dx_i' \approx (1+u^{(i)})dx_i$. El cambio del volumen resulta:

$$dv' = dx_1'\,dx_2'\,dx_3' \approx (1+u^{(1)})(1+u^{(1)})(1+u^{(1)})dx_1\,dx_2\,dx_3\,(1+u^{(1)}+u^{(2)}+u^{(3)})\,dv$$

$$dv' = (1+u_{\mathrm{ii}})dv$$

ya que $u^{(1)} + u^{(2)} + u^{(3)}$ es un invariante es igual a u_{ii}. O sea $u_{\mathrm{ii}} = (dv' - dv)/dv$ es el cambio relativo de volumen.

Stress tensor

Cuando un cuerpo se deforma queda fuera del estado de equilibrio original. Surgen fuerzas que intentan retornar el cuerpo al estado de equilibrio: *internal stresses.* Esots se deben a las fuerzas (de corto alcance) entre moléculas. En teoria de inelasticidad las distancias consideradas son largas comparadas con el alcance, o sea las fuerzas que causan los streeses son fuerzas de acción cercana que actuan de un punto solo a puntos vecinos: o sea las fuerzas ejercidas por cualcuer parte de un cuerpo por otras partes que lo rodean actúan solo en la superficie de aquell parte (excepto en el caso de cuerpos piezoelectricos).

Fuerza total sobre una porción de un cuerpo: $\int\ \vec{F}\,\mathrm{d}v$. Las fuerzas sobre el interior se cancelan por la III Ley de Newton. El unico efecto es de las fuerzas en la superficie. O sea debe poder escribirse como una integral de superficie. Lo que es cierto si F_i se puede escribir como una divergencia

$$F_i = \frac{\partial}{\partial x_k}\sigma_{\mathrm{ik}}$$

o sea

$$\int \vec{F_i}\,\mathrm{d}v = \int\ \frac{\partial}{\partial x_k}\sigma_{\mathrm{ik}}\,\mathrm{d}v = \oint \sigma_{\mathrm{ik}}\,\mathrm{d}s_k$$

Estas son las fuerzas ejercidas sobre el volumen por las superficies que rodean al cuerpo. Las fuerzas que los stresses ejercen son de signo opuesto $-\oint\ \sigma_{\mathrm{ik}}\,\mathrm{d}s_k$

Tomando momentos y exigiendo balance se puede demostrar que σ_{ik} es simétrico. Los momentos se pueden escribir como un tensor antisimetrico de rango 2: $F_i\,x_k - F_k\,x_i$ en que x_i son las coordenadas del punto en que se aplica la fuerza. El momento total de las fuerzas es:

$$M_{\mathrm{ik}} = \int\ (F_i\,x_k - F_k\,x_i)\,\mathrm{d}v$$

los torques internos se anulan, solo interesan las contribuciones superficiales. Usando $F_i = \frac{\partial}{\partial x_k} \sigma_{\text{ik}}$ e integrando por partes resulta:

$$M_{\text{ik}} = \oint (\sigma_{\text{il}} x_k - \sigma_{\text{kl}} x_i) \mathrm{d}s_l + \int (\sigma_{\text{ki}} - \sigma_{\text{ik}}) \mathrm{d}v$$

la exigencia que la contribucion de volumen sea nula imlica que σ_{ik} es simetrico.

Compresion hidrostatica

La presion es una fuerza en contra del vector unitario asociado a ds: $-p\,\mathrm{d}s_i = \sigma_{\text{ki}}\,\mathrm{d}s_k = -p\delta_{\text{ik}}\mathrm{d}s_k$ luego:

$$\sigma_{\text{ik}} = -p\delta_{\text{ik}}$$

En equilibrio en todo elemento de volumen se debe cumplir $F_i = \frac{\partial}{\partial x_k} \sigma_{\text{ik}} = 0$. Si hay una fuerza gravitacional $\vec{F} + \varrho\vec{g} = 0$, de modo que la ecuación de equilibrio es:

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \sigma_{\text{ik}} + \varrho g_i = 0$$

las condiciones de borde son las fuerzas externas aplicadas a la superfice del cuerpo. Si $\vec{P}$ es la fuerza externa (por unidad de área de la superficie del cuerpo) el balance en la superficie se cumple: $P_i \mathrm{d}s - \sigma_{\text{ik}} \mathrm{d}s_k = P_i \mathrm{d}s - \sigma_{\text{ik}} n_k \mathrm{d}s = 0$ luego la condicion (de borde) en la superficie es $P_i = \sigma_{\text{ik}} n_k$.

Fórmula para el valor medio del stress

Partiendo de $\frac{\partial}{\partial x_l} \sigma_{il} = 0$, multiplicando por x_k e integrando sobre el volumen.

$$\int \frac{\partial \sigma_{\text{il}}}{\partial x_l} x_k \,\mathrm{d}v = 0 = \int \left(\frac{\partial(\sigma_{\text{il}} x_k)}{\partial x_l} - \sigma_{\text{ik}} \frac{\partial x_k}{\partial x_l} \right) \mathrm{d}v$$