Introducción a la Física de las Partículas Elementales

Tarea 2
Prof. P. Labraña
Fecha de entrega viernes 11 de Noviembre

Problema 1: Considere las transformaciones bilineales (de $\Re$ en $\Re$) dadas por: $x \to y$ con

$$y = \frac{a\,x + b}{c\,x + d}$$

en que a, b, c, d son parámetros tales que $ad - bc = 1$. Los parámetros a, b, c, d definen la transformación.

Demuestre que las transformaciones bilineales forman un grupo al considerar como multiplicación del grupo la *composición* de transformaciones.

Problema 2: Se tiene un grupo de Lie arbitrario G con generadores T^i y constantes de estructura f^{abc} que satisfacen la relación usual:

$$\left[T^i, T^j\right] = i\, f^{ijk}\, T^k \ , \ \ con \ \ k = 1, 2, \cdots, M\,. \tag{1}$$

a) Usando la identidad de Jacobi aplicada a los generadores T^i demuestre la siguiente relación que satisfacen las constantes de estructura:

$$f^{ade}\, f^{bcd} + f^{bde}\, f^{cad} + f^{cde}\, f^{abd} = 0\,. \tag{2}$$

b) Usando el resultado anterior demuestre la validez de la llamada representación adjunta. Esto es demuestre que efectivamente las constantes de estructura pueden considerarse como generadores del grupo G en una representación de dimensión M. Para esto recuerde como se definen los generadores de la representación adjunta a partir de las constantes de estructura. Luego pruebe usando Ec.(2) que estos generadores satisfacen el álgebra del grupo G, esto es que cumplen con Ec.(1).

Pregunta 3: El grupo $SU(3)$

Para la representación *natural o fundamental* de este grupo los generadores suelen escribirse de la siguiente manera:

$$T^1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ T^2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ T^3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$T^4 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ T^5 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix},\ T^6 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

$$T^7 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \ T^8 = \frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Explique (calcule) por qué los generadores de $SU(3)$ son exactamente 8 matrices de 3×3 en esta representación.

b) Evalué los conmutadores entre estas matrices de modo de determinar las constantes de estructura de $SU(3)$. Muestre que con la normalización para los T^i usada aquí las constantes de estructura f^{abc} son totalmente antisimétricas. (No es necesario que calcule todos los conmutadores, basta con que evalúe una muestra representativa de ellos para determinar los f^{abc}).

Problema 4: Demuestre el Teorema de Goldstone.

Teorema: *El número de Bosones de Goldstone (escalares sin masa) en una teoría donde la Simetría está espontáneamente rota es igual al número de generadores rotos (que no dejan invariante al vacío).*

Problema 5: Demuestre que el mecanismo de Higgs funciona para una teoría de gauge arbitraria. Esto es demuestre que por cada generador que no deja invariante al vacío existe un campo de gauge que adquiere masa.

Problema 6: Dado que al aplicar el Mecanismo de Higgs los Bosones de Goldstone desaparecen del modelo al ser "devorados por los campos de gauge que adquieren masa", demuestre que no se ha perdido información. Esto es, demuestre que los grados de libertad del modelo original con los Bosones de Goldstone y los del modelo final son los mismos.

Problema 7: Al comparar las masas del protón y del neutrón podemos notar que son muy similares (difieren sólo en 0.1%) además no existen otras partículas que posean masas similares a estas, por otro lado el protón y el neutrón son parte del núcleo atómico y ambas partículas poseen interacciones similares. ¿Por qué pensamos que son dos partículas diferentes? Obviamente porque el protón posee carga eléctrica y el neutrón no. Pero la Fuerza Nuclear Fuerte no sabe de carga eléctrica y esta interacción es mucho más fuerte que la interacción electromagnética. Luego podemos concluir que tal vez la carga eléctrica no es tan relevante. Este tipo de razonamiento llevo a la definicin del Isospín Fuerte y a asumir que en lo que respecta a la interacción fuerte protón y neutrón son dos estados de una misma partícula denominada nucleón N. La interacción entre nucleones debe ser invariante bajo intercambios protón neutrón (rotaciones en este espacio interno de Isospín Fuerte). En la naturaleza esta simetría sólo se realiza de manera aproximada debido a que la interacción electromagnética rompe esta simetría (también las masas de los hadrones que forman cada multiplete de Isospín Fuerte poseen masas que no son exactamente iguales entre sí, ejemplo protón y neutrón), sin embargo como la interacción electromagnética es mucho más débil que la fuerte resulta que esta simetría es una muy buena aproximación.

El objetivo de este problema es utilizar esta simetría de las interacciones fuertes para escribir un modelo fenomenológico de las interacciones fuertes, en particular entre los nucleones y los piones.

Como existen dos estados para el nucleón, entonces podemos asumir que protón y neutrón forman un doblete de $SU(2)$ de modo que el nucleón posee Isospín fuerte 1/2. Este doblete transforma en la representacin fundamental de SU(2).

$$N = \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix} .$$

Si esta simetría de Isospín fuerte es una simetría de la interacción fuerte esto significa que todos los hadrones pueden clasificarse en multipletes de $SU(2)$ de Isospín fuerte. De hecho esto es lo que ocurre, por ejemplo los tres piones poseen masas muy similares y pueden representarse como un estado de Isospín $I = 1$ (un triplete).

$$\pi = \begin{pmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \end{pmatrix} .$$

Donde los estados de carga son:

$$\pi^{\pm} = (-\pi_1 \pm i\pi_2)/\sqrt{2} \tag{4}$$

$$\pi^0 = \pi_3 \tag{5}$$

a) Identifique al menos 4 grupos de hadrones que se agrupen en multipletes de SU(2) de Isospín Fuerte.

b) Escriba una densidad lagrangiana que corresponda a un modelo fenomenológico de la interacción entre nucleones y piones. La densidad más general que representa una interacción entre estas partículas es la siguiente:

$$\mathcal{L}_{int} = g_{pn}\,(p^\dagger\, n\, \pi^+) + g_{np}\,(n^\dagger\, p\, \pi^-) + g_{pp}\,(p^\dagger\, p\, \pi^0) + g_{nn}\,(n^\dagger\, n\, \pi^0)\,. \tag{6}$$

Sin embargo este lagrangiano no es invariante bajo rotaciones de Isospín a menos que las constantes g's estén relacionadas entre si. A partir de Ec.(6) y utilizando como guía la invariancia de Isospín fuerte, determine la densidad lagrangiana que describe esta interacción nucleón-pión.