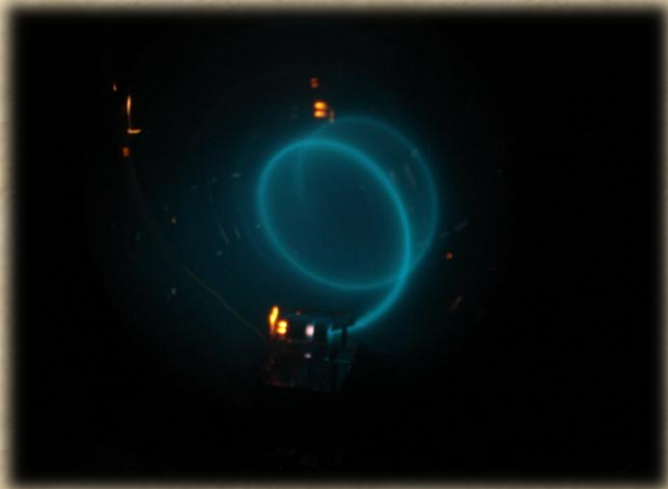


# Electrodinámica Clásica



Dr. Pedro Labraña,  
Departamento de Física,  
Facultad de Ciencias,  
Universidad del Bío-Bío.

# Fuerzas Fundamentales

## Fuerza Nuclear Fuerte



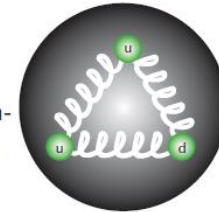
### STRONG FORCE

Felt by: quarks  
Carrier: gluons



#### Associated phenomena

The strong force binds quarks together to make protons and neutrons (and other particles). It also binds protons and neutrons in nuclei, where it overcomes the enormous electrical repulsion between protons.



## Fuerza Electromagnética



### ELECTROMAGNETIC FORCE

Felt by: quarks and charged leptons  
Carrier: photons

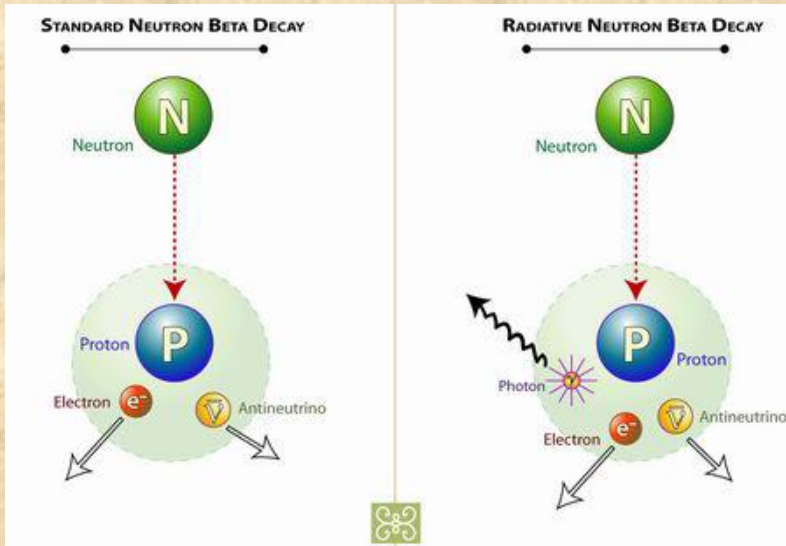


#### Associated phenomena

It holds electrons to nuclei in atoms, binds atoms into molecules, and is responsible for the properties of solids, liquids and gases.

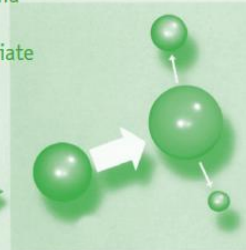


# Fuerza Nuclear Débil



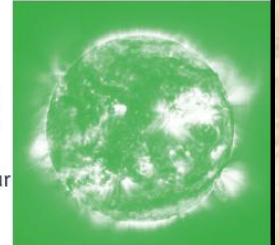
## WEAK FORCE

Felt by: quarks and leptons  
Carrier: intermediate vector bosons

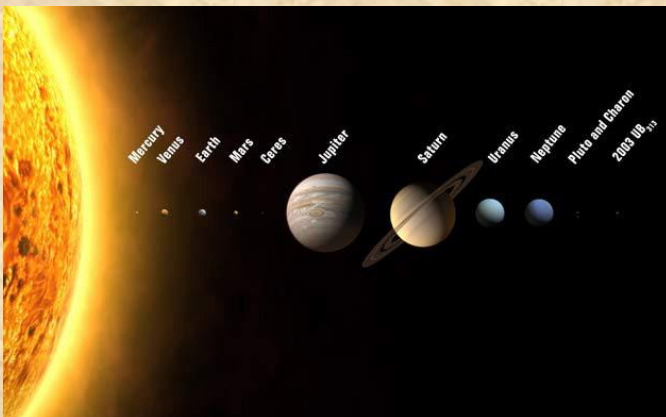


### Associated phenomena

The weak force underlies natural radioactivity, for example in the Earth beneath our feet. It is also essential for the nuclear reactions in the centres of stars like the Sun, where hydrogen is converted into helium.



# Gravedad



## GRAVITATION

Felt by: all particles with mass  
Carrier: Graviton



### Associated phenomena

Gravity makes apples fall to the ground. It is an attractive force. On an astronomical scale it binds matter in planets and stars, and holds stars together in galaxies.



Fuerza	Magnitud	Teoría	Mediador	Rango
Fuerte	10	QCD	Gluones	$10^{-15}$ m
Electromagnética	$10^{-2}$	QED	Fotón	Infinito
Débil	$10^{-13}$	Modelo de Weimber-Salam	W+,W-, Z0	$10^{-17}$ m
Gravedad	$10^{-42}$	Relatividad General	Gravitón	Infinito

**Notar: Si la fuerza es de rango finito, entonces la partícula mediadora posee masa**

# Partículas en el Modelo Estándar

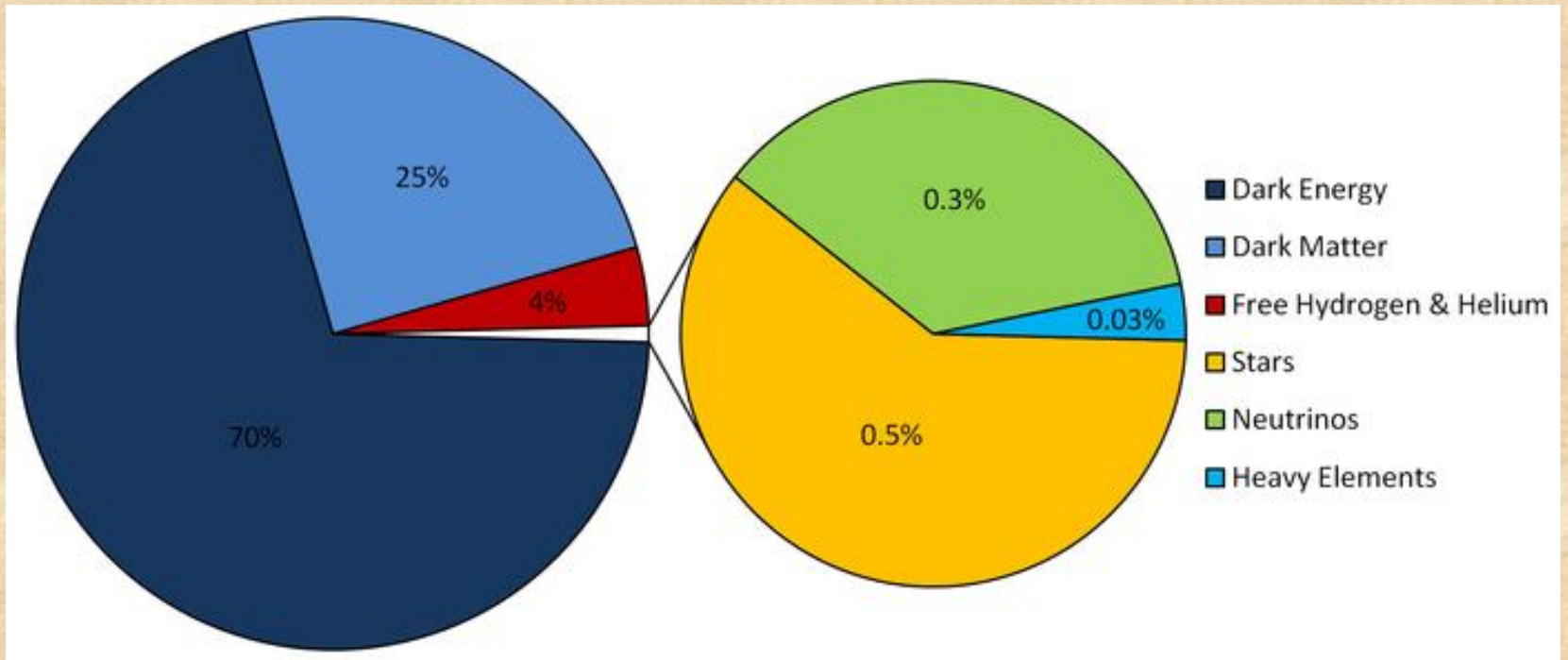
Las tres generaciones de la Materia (Fermiones)

	I	II	III	
masa →	3 MeV	1.24 GeV	172.5 GeV	0
carga →	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	0
spin →	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
nombre →	<b>u</b> up	<b>c</b> charm	<b>t</b> top	<b>γ</b> photon
Quarks	6 MeV	95 MeV	4.2 GeV	0
	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
	<b>d</b> down	<b>s</b> strange	<b>b</b> bottom	<b>g</b> gluon
Leptones	<2 eV	<0.19 MeV	<18.2 MeV	90.2 GeV
	0	0	0	0
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
	<b>ν<sub>e</sub></b> electron neutrino	<b>ν<sub>μ</sub></b> muon neutrino	<b>ν<sub>τ</sub></b> tau neutrino	<b>Z<sup>0</sup></b> fuerza débil
	0.511 MeV	106 MeV	1.78 GeV	80.4 GeV
	-1	-1	-1	±1
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
	<b>e</b> electron	<b>μ</b> muon	<b>τ</b> tau	<b>W<sup>±</sup></b> fuerza débil

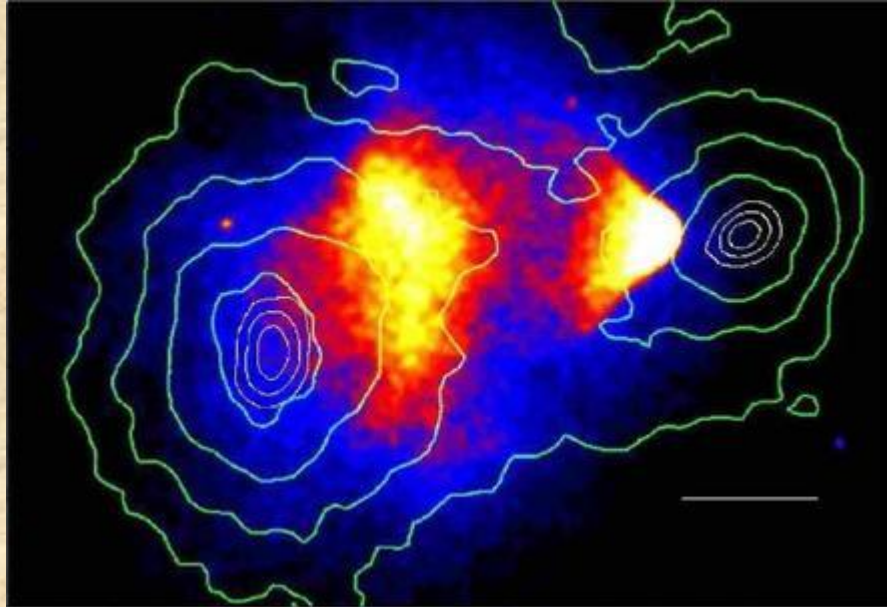
Bosons (Fuerzas)

+ Boson de Higgs

# Contenido de materia en el universo



# Materia Oscura



**Deep Chandra image of the Bullet cluster**

# Antimateria: En 1931 es descubierto la primera antipartícula, el positrón (Antipartícula del electrón. Partícula predicha por Dirac en 1928-1931.

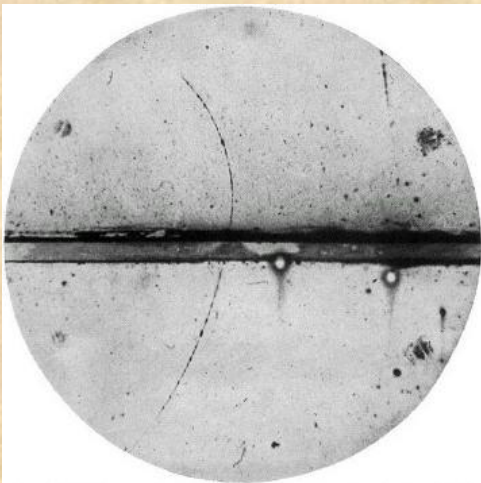
610

## *The Quantum Theory of the Electron.*

By P. A. M. DIRAC, St. John's College, Cambridge.

(Communicated by R. H. Fowler, F.R.S.—Received January 2, 1928.)

The new quantum mechanics, when applied to the problem of the structure of the atom with point-charge electrons, does not give results in agreement with experiment. The discrepancies consist of "duplexity" phenomena, the observed number of stationary states for an electron in an atom being twice the number given by the theory. To meet the difficulty, Goudsmit and Uhlenbeck have introduced the idea of an electron with a spin angular momentum of half a quantum and a magnetic moment of one Bohr magneton. This model for the electron has been fitted into the new mechanics by Pauli,\* and Darwin,† working with an equivalent theory, has shown that it gives results in agreement with experiment for hydrogen-like spectra to the first order of accuracy.



## SPECIAL ARTICLES

### THE APPARENT EXISTENCE OF EASILY DEFLECTABLE POSITIVES

Up to the present a positive electron has always been found with an associated mass 1,850 times that associated with the negative electron. In measuring the energies of charged particles produced by cosmic rays some tracks have recently been found which seem to be produced by positive particles, but if so the masses of these particles must be small compared to the mass of the proton. The evidence for this statement is found in several photographs, three of which are discussed below.

In one instance, in which a lead plate of 6 mm thickness was inserted in the cloud-chamber, tracks of a particle were observed above and below the lead. The curvature due to the magnetic field was measurable both above and below the lead. There are the following alternative interpretations:

- (1) a positive particle of small mass penetrates the lead plate and loses about two thirds of its energy; or
- (2) two particles are simultaneously ejected from

the lead, in one direction a positive particle of small mass, in the opposite direction an electron; or

- (3) an electron of about 20,000,000 volts energy penetrates the lead plate and emerges with an energy of 60,000,000 volts, having gained 40,000,000 volts energy in traversing the lead; or

- (4) the chance occurrence of two independent electron tracks in the chamber, so placed as to give the appearance of one particle traversing the lead plate.

In another instance two tracks of opposite curvature appear below the lead. The alternative interpretations are:

- (1) a positive particle of small mass and an electron emerging from the same point in the lead; or
- (2) a positive particle of small mass strikes the lead and rebounds with a loss in energy; or
- (3) an electron of about 20,000,000 volts energy strikes the lead and rebounds with 30,000,000 volts energy; or
- (4) the chance occurrence of two independent electron tracks.

SEPTEMBER 9, 1932

SCIENCE

239

In the third instance two tracks appear below the lead plate. The alternative interpretations are:

- (1) a positive particle of small mass and another positive particle emerge from the same point in the lead; or
- (2) a 4,000,000 volt electron rebounds from the lead producing the second track; but here a difficulty is met with, since a change in the sign of the charge would have to be assumed to take place in the rebound of the electron; or
- (3) the chance occurrence of two independent tracks.

For the interpretation of these effects it seems necessary to call upon a positively charged particle having a mass comparable with that of an electron, or else admit the chance occurrence of independent tracks on the same photograph so placed as to indicate a common point of origin of two particles. The latter possibility on a probability basis is exceedingly unlikely.

The interpretation of these tracks as due to protons, or other heavier nuclei, is ruled out on the basis of range and curvature. Protons or heavier nuclei of the observed curvatures could not have ranges as great as those observed. The specific-ionization is close to that for an electron of the same curvature, hence indicating a positively-charged particle comparable in mass and magnitude of charge with an electron.

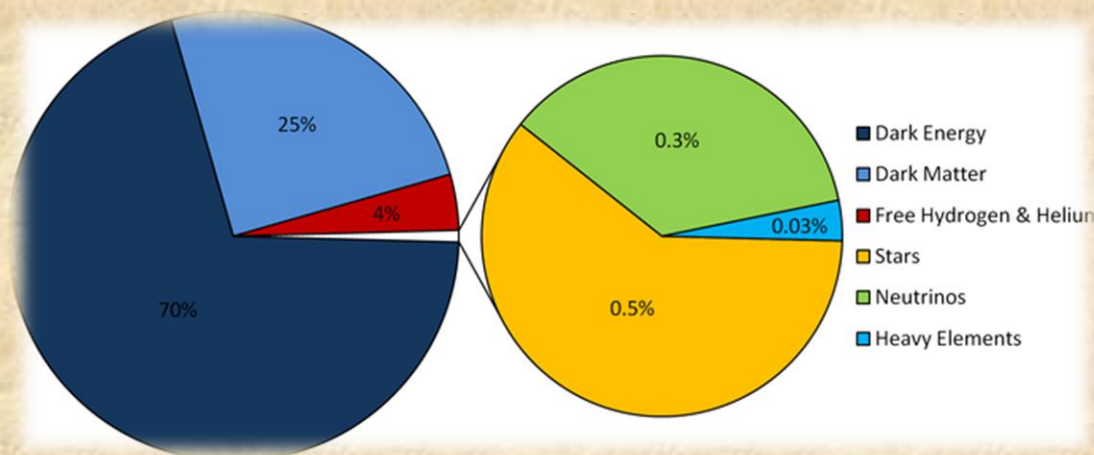
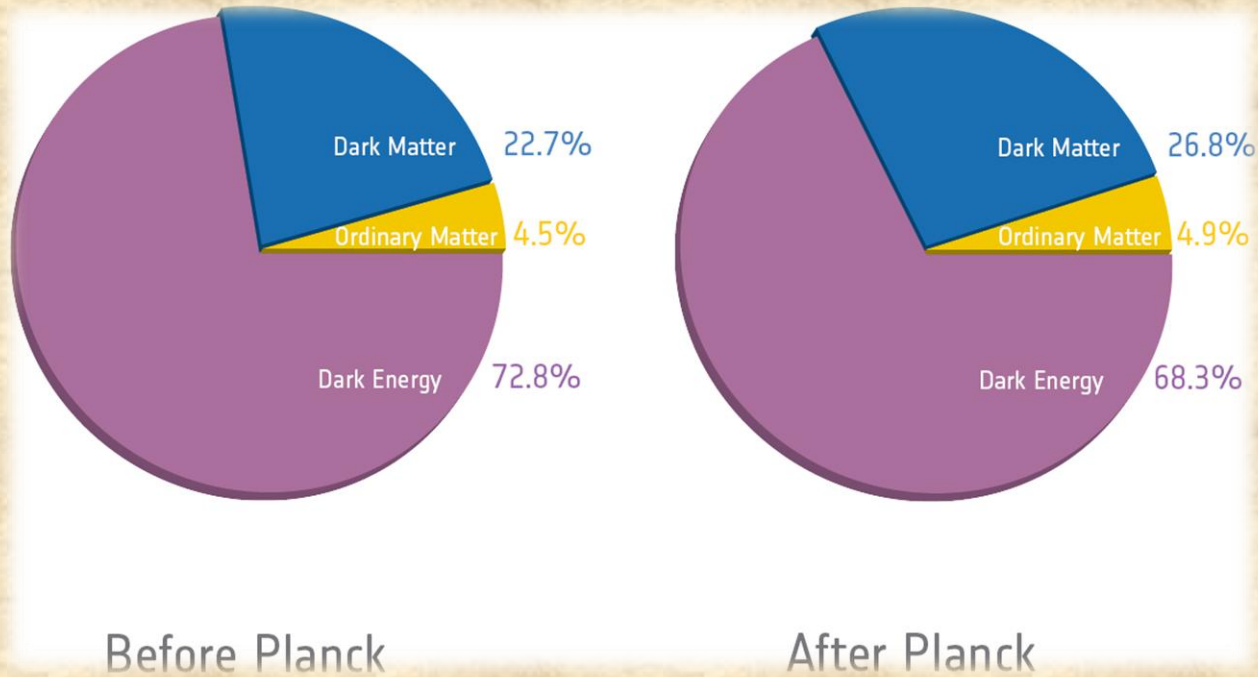
CARL D. ANDERSON

CALIFORNIA INSTITUTE  
OF TECHNOLOGY,  
SEPTEMBER 1, 1932

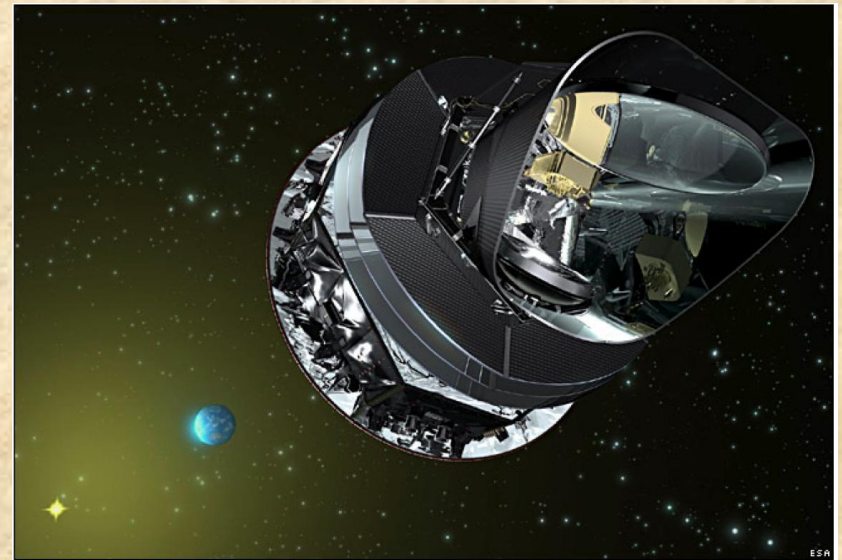
per cent., .04 per cent. and .087 per cent. of the grain ration as fluorine fed as a mineral supplement in the form of raw rock phosphate. The rations were balanced as to protein. They contained ample energy and were in all respects adequate dairy rations.

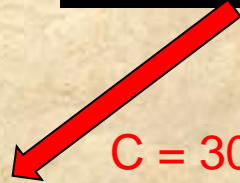
The plasma phosphatase was determined by the method of Kay<sup>3</sup> except that pH values were determined by means of the quinhydrone electrode rather than by the colorimetric method. In all cases the animals receiving fluorine showed a distinct rise in the plasma phosphatase values over that of the control cows. In nearly all cases the values for our control animals were within the normal range of .1000 to .2000 units per cc for mature animals. Twenty-eight determinations made upon control cows gave a range of from .1168 units to .2440 units per cc with a mean value of .1763 units. The low fluorine lot gave an average phosphatase value of .2366 units per cc. The intermediate group showed a further rise in phosphatase with an average of .2751 units per cc, while the high fluorine lot varied from .2240 units to .5312 units per cc. The mean value for this lot (12 analyses) was .3366 units per cc or practically double that of the control animals. It would seem, therefore, that in cattle suffering from fluorosis the plasma phosphatase rises in proportion to the level of fluorine intake, or nearly so. Other blood constituents, such as serum calcium, inorganic phosphorus, total phosphorus, lecithin phosphorus and chlorine, remained within the normal range. There seemed to be a tendency for the serum calcium of the blood to decrease with a correspondingly slight increase in inorganic

# Contenido de materia en el universo





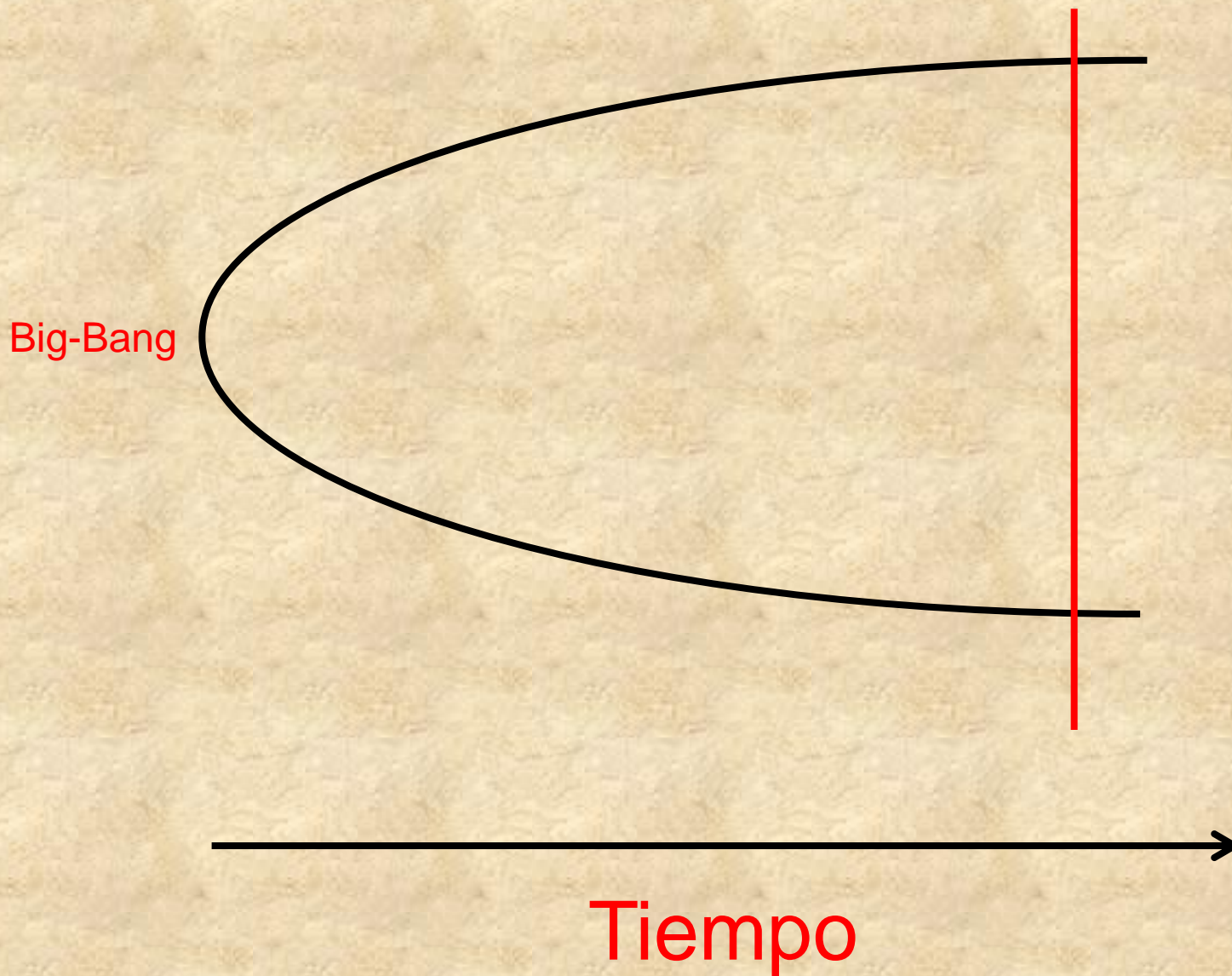




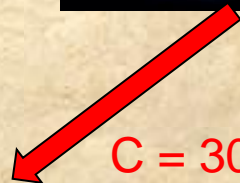
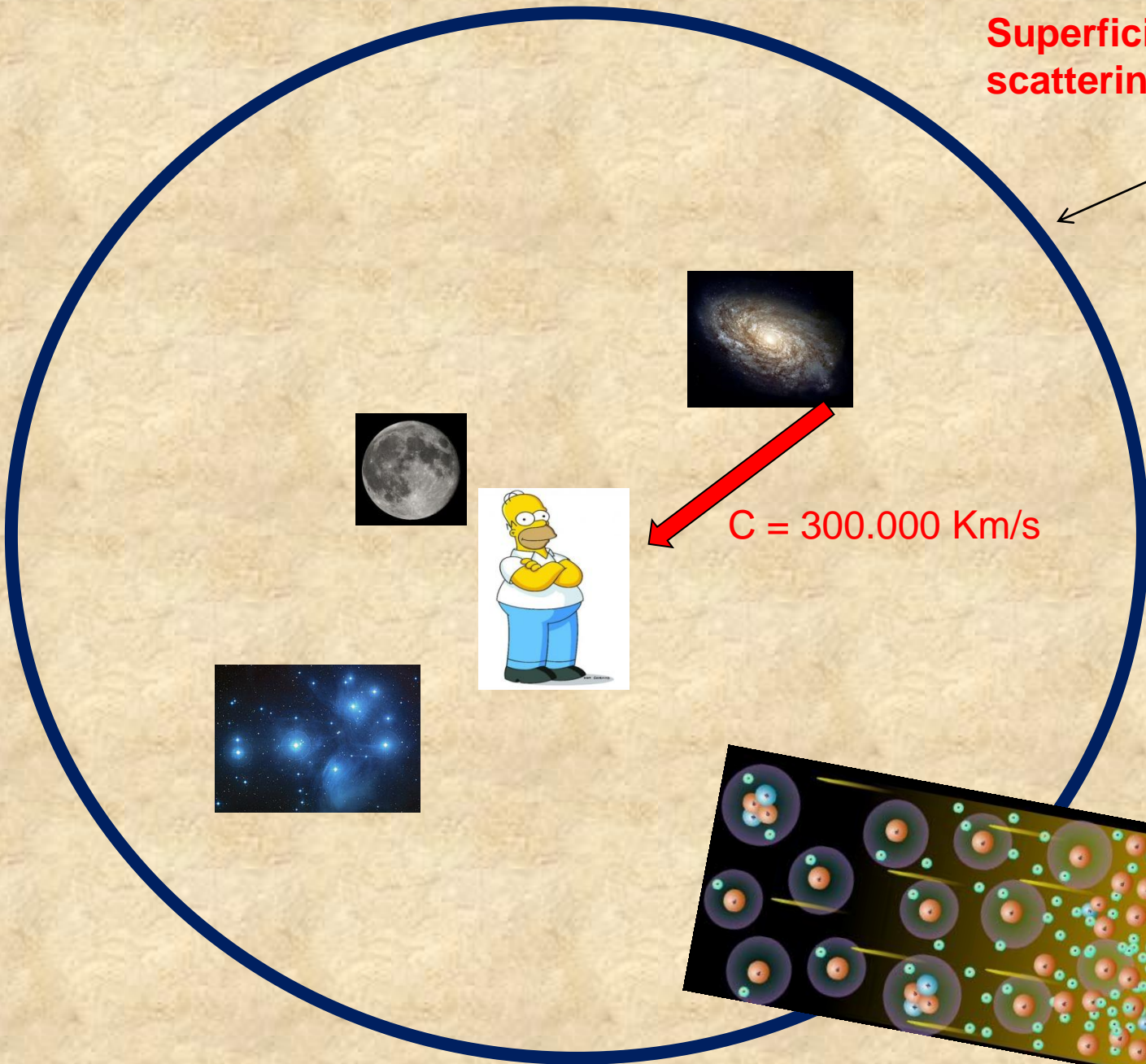
$C = 300.000 \text{ Km/s}$



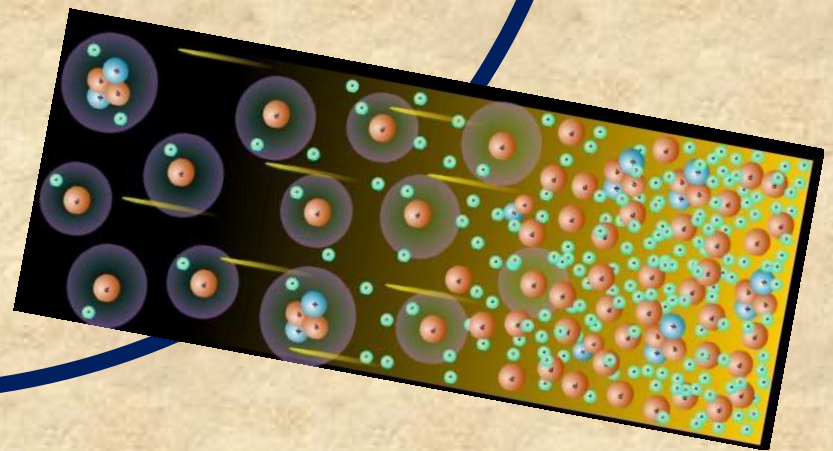
# Evolución del universo (versión PowerPoint)



Superficie de último scattering



$C = 300.000 \text{ Km/s}$



Consideremos una fuerza análoga a la gravitación que varié con la inversa del cuadrado de la distancia, pero que sea un billón de billones de billones de veces más intensa. Y con otra diferencia. Hay dos clases de “materia”, que podríamos llamar positiva y negativa. Si son de la misma clase se repelen y si son de distinta clase se atraen, a diferencia de la gravitatoria que es sólo atractiva. ¿Qué sucedería?

Un conjunto de elementos positivos se repelerán con una fuerza enorme y se esparcirán en todas las direcciones. A un conjunto de elementos negativos les sucederá lo mismo. Pero una mezcla de elementos positivos y negativos deberá comportarse de una manera completamente diferente. Los elementos opuestos serán mantenidos juntos por una fuerza enorme de atracción. El resultado neto será que estas terribles fuerzas se equilibrarán perfectamente entre ellas y formarán una mezcla de elementos positivos y negativos íntimamente mezclados entre sí y de tal modo que dos porciones separadas de esta mezcla no sufran prácticamente ni atracción ni repulsión.

Una fuerza de este tipo existe: **la fuerza eléctrica**.

Y la mezcla somos nosotros y los objetos que nos rodean.

¿Pueden sentir algún tipo de atracción o repulsión respecto de los objetos que los rodean (Ej. De la mesa)?

(1 billón= Mil millones)

Toda la materia es una mezcla de protones (positivos) y electrones (negativos) que se están atrayendo y repeliendo con una gran fuerza. Habrá un equilibrio perfecto cuando al estar cerca de este conjunto no se sienta ninguna fuerza resultante. Si hubiese una ligera falta de balance lo podríamos saber.

Si estuviesen ubicados a un brazo de distancia de alguien y en él hubiera un uno por ciento más de electrones que de protones, la fuerza de repulsión sería algo increíble. ¿De qué magnitud?

¿Suficiente para levantar el edificio Empire State?



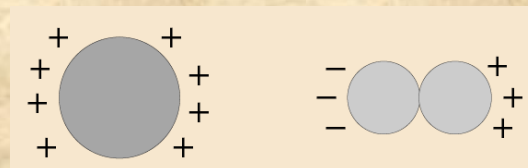
**NO**

¿Suficiente para levantar el Monte Everest?



**NO**

La repulsión sería suficiente para levantar un peso igual al de la tierra entera

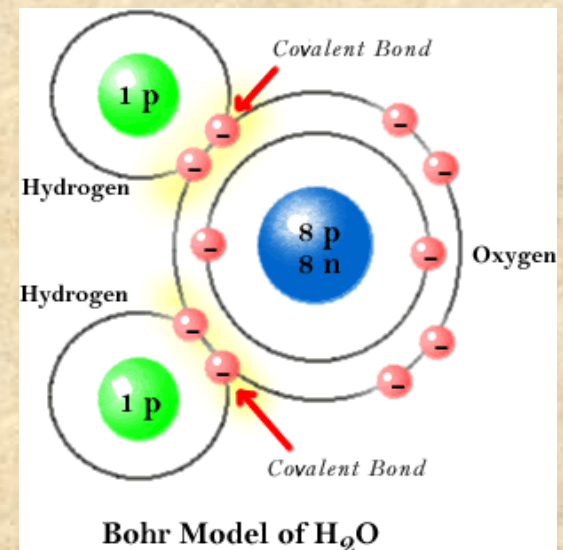
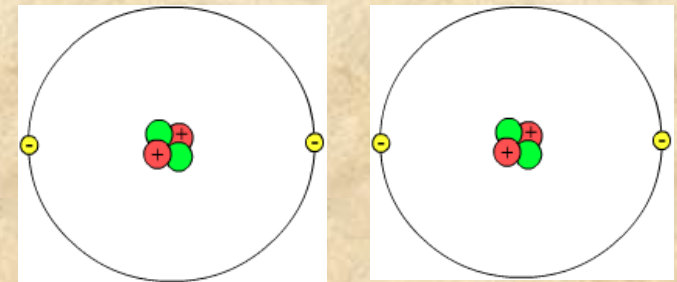


Con una fuerza tan enorme y perfectamente equilibrada en esta íntima mezcla no es difícil comprender que la materia, tratando de conservar estas cargas positivas y negativas en el mejor equilibrio, pueda tener una gran rigidez y una gran resistencia. El edificio Empire State, por ejemplo, se aparta sólo 2.5 metros de su posición de equilibrio dado que las fuerzas eléctricas mantiene cada electrón y cada protón más o menos en su propio lugar.

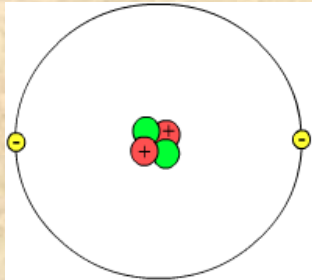
**Sí consideramos a la materia en una escala mucho mas pequeña de tal manera que tengamos sólo algunos átomos, cualquier porción de materia de este tamaño no tendrá por lo común igual número de cargas positivas y negativas y, en consecuencia, existirán intensas fuerzas eléctricas residuales.**

Las fuerzas que mantienen juntos a los átomos y las fuerzas químicas que mantienen juntas a las moléculas, son, en realidad, fuerzas eléctricas actuando en una región en la cual el equilibrio de cargas no es perfecto, o bien en una región donde las distancias son muy pequeñas.

¿Algunas vez han tocado algo?



## ¿Qué es lo que mantiene unido al núcleo atómico?



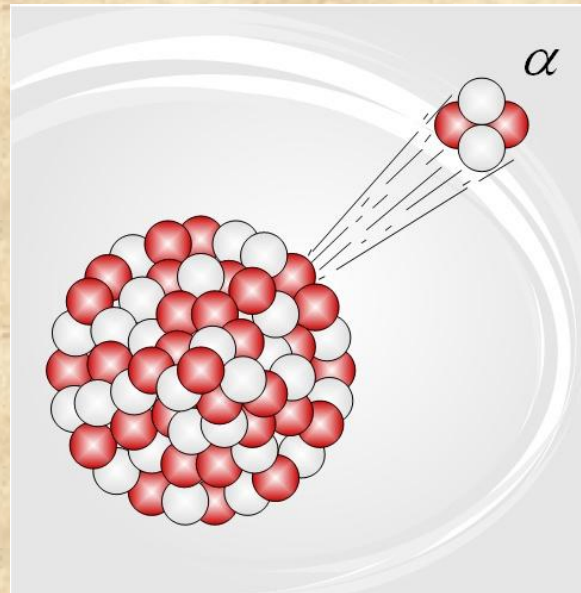
Helio

En un núcleo hay varios protones y todos son positivos. ¿Por qué no se apartan unos de otros?

Existe otro tipo de fuerza denominada **Fuerza Nuclear Fuerte** que es mucho más intensa que la fuerza eléctrica pero que es de corto alcance.

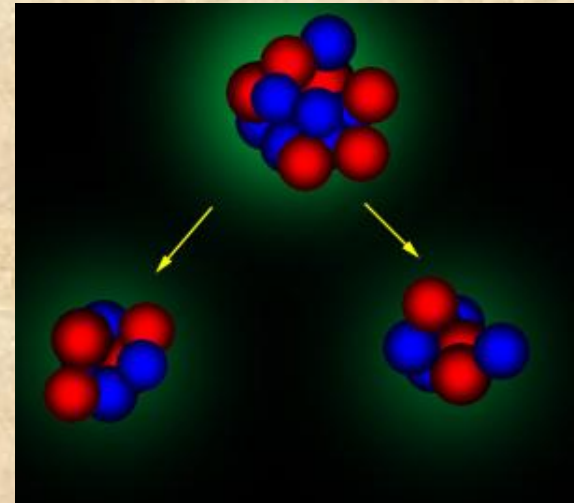
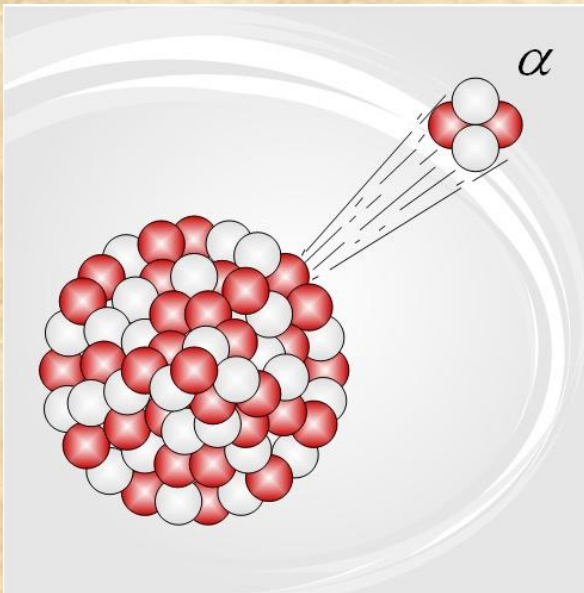
Consecuencia importante: Sí un núcleo contiene demasiados protones se hace demasiado grande y no se mantiene unido.

Un ejemplo sería el uranio con 92 protones.



Cuanto mayor cantidad de protones haya en el núcleo, mayor será la intensidad de la repulsión eléctrica y, por tanto, el equilibrio será más inestable y el núcleo estará en mayores condiciones de explotar bajo la acción de las fuerzas eléctricas de repulsión. Si se golpea ligeramente el núcleo (por ejemplo con un bombardeo con neutrones lentos) se romperá en dos partes, cada una con carga positiva, y estas partes se apartarán debido a su repulsión eléctrica.

La energía que se libera es la energía de la bomba atómica (fisión). Esta energía se llama comúnmente nuclear, pero es en realidad energía eléctrica liberada cuando las fuerzas eléctricas superan a las fuerzas de atracción nuclear.



# Repaso de Análisis Vectorial

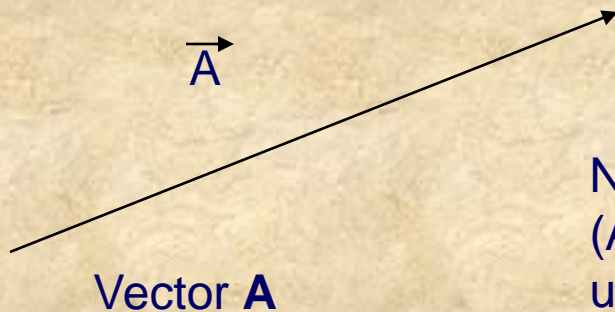
- Sistemas de Coordenadas
  - Cálculo diferencial
- 
- Apuntes UBB profesor Dino Riso
  - Capítulo 1 y 2 de “Elementos de Electromagnetismo” Sadiku, Matthew
  - Capítulo 1 “FUNDAMENTOS DE LA TEORÍA ELECTROMAGNÉTICA”  
Reitz Milford

# Vectores y la dimensión del espacio

1) Nombre ejemplos de cantidades físicas que son un vector: Ej. El vector posición

2) Cuantos “datos” debe mencionar para tipificar completamente a un vector (Piense en los ejemplos de 1))

Ej. Modulo, dirección y sentido



Nuestro espacio físico es de tres dimensiones (Ancho, alto y largo), por esta razón para tipificar a un vector se deben dar tres datos.

¿Es el espacio físico de tres dimensiones?

3) Piense en cantidades físicas que no son vectoriales:  
Ej. La temperatura, distancia entre dos puntos, etc.

## Sistemas de Coordenadas

En este curso se hace un uso intenso de tres sistemas de coordenadas: cartesianas, cilíndricas y esféricas. Naturalmente estos sistemas serán de utilidad en situaciones físicas con simetrías rectangular, cilíndrica y esférica.

### Coordenadas Cartesianas

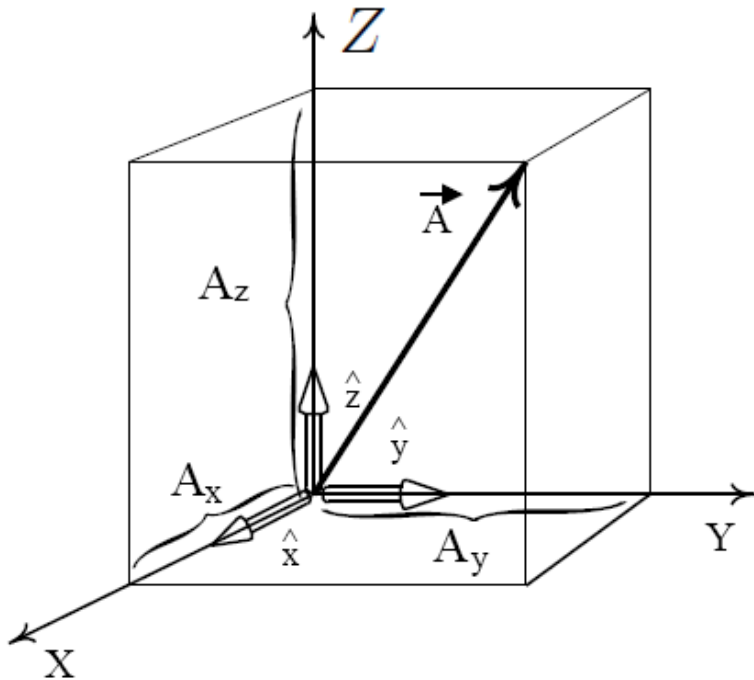


Figura 1.1: Sistema de coordenadas cartesianas.

Para describir vectores en este sistema de coordenadas se introduce la triada de vectores unitarios  $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$  a lo largo de las direcciones de los ejes cartesianos. Un vector cualquiera  $\vec{A}$  tiene proyecciones a lo largo de las direcciones asociadas a dichos vectores unitarios. Estas proyecciones o componentes se denotan:  $A_x, A_y$  y  $A_z$  y ellas se obtienen mediante el producto punto entre el vector  $\vec{A}$  y el vector unitario asociado:

$$A_x = \vec{A} \cdot \hat{x}$$

$$A_y = \vec{A} \cdot \hat{y}$$

$$A_z = \vec{A} \cdot \hat{z}$$

En este sistema entonces un vector cualquiera  $\vec{A}$  se escribe:

$$\vec{A} = A_x \hat{x} + A_y \hat{y} + A_z \hat{z}.$$

y su norma, definida como la raíz cuadrada del producto punto del vector consigo mismo (ver nota<sup>1</sup>), es

$$\|\vec{A}\| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}.$$

Norma del vector = Módulo del vector (*El largo de la flechita*)

### Propiedades de los vectores unitarios

1) Son vectores unitarios:  $\hat{i} \cdot \hat{i} = \hat{j} \cdot \hat{j} = \hat{k} \cdot \hat{k} = 1$   
(Norma = 1)

1) Son vectores ortogonales entre  $\hat{i} \cdot \hat{j} = \hat{i} \cdot \hat{k} = \hat{j} \cdot \hat{k} = 0$

## Ej. Vector posición (Ver pizarra)

Un caso particular es el del vector de posición  $\vec{r}$  asociado a un punto: la posición de un punto en este sistema está definida por la triada de coordenadas  $(x, y, z)$  y en consecuencia, el vector de posición queda dado por:

$$\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$$

En este caso se tiene:

$$r_x = \vec{r} \cdot \hat{x} = x$$

$$r_y = \vec{r} \cdot \hat{y} = y$$

$$r_z = \vec{r} \cdot \hat{z} = z$$

y su norma es:

$$\|\vec{r}\| = \sqrt{\vec{r} \cdot \vec{r}} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

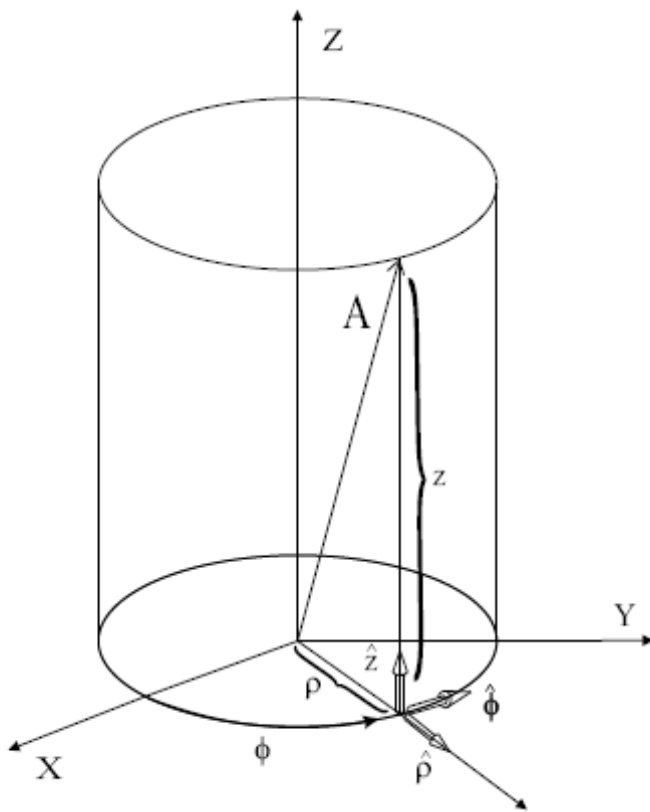
## Ej.2 El vector velocidad (ver pizarra)

# Coordenadas Cilíndricas

El sistema de coordenadas cilíndricas está basado en la geometría del cilindro. Se ubica un cilindro imaginario con su eje axial concéntrico al eje  $z$  de un sistema de coordenadas cartesiano.

Coordenadas en cilíndricas:  $(\rho, \phi, z)$

(Para fijar ideas pensemos en el vector posición)



Un punto se define sobre este cilindro por una coordenada de altura  $z$  (la altura del cilindro), una coordenada de distancia radial  $\rho$  (el radio del cilindro) y una coordenada de posición angular  $\phi$  (el ángulo que subtiende el punto respecto del eje  $x$ , medido a lo largo de la superficie del cilindro). A lo largo de las direcciones en que crecen  $\rho$ ,  $\phi$  y  $z$  se definen vectores unitarios  $\hat{\rho}$ ,  $\hat{\phi}$  y  $\hat{z}$ .

Este sistema está definido entonces por la triada de coordenadas  $(\rho, \phi, z)$ , y por los correspondientes vectores unitarios asociados  $(\hat{\rho}, \hat{\phi}, \hat{z})$  (ver Fig. ??).

En estas coordenadas las variables  $\rho$ ,  $\phi$  y  $z$  varían entre:

$$\begin{aligned}\rho &: 0 \dots \infty \\ \phi &: 0 \dots 2\pi \\ z &: -\infty \dots \infty\end{aligned}$$

Un vector cualquiera  $\vec{A}$  tendrá proyecciones sobre las direcciones definidas por dichos vectores unitarios. Los valores de dichas proyecciones (las componentes del vector) se denotan correspondientemente por  $A_\rho$ ,  $A_\phi$  y  $A_z$  (ver Fig ??). Ellos se obtienen de la manera usual:

$$A_\rho = \vec{A} \cdot \hat{\rho}$$

$$A_\phi = \vec{A} \cdot \hat{\phi}$$

$$A_z = \vec{A} \cdot \hat{z}$$

Un vector cualquiera se escribe en consecuencia:

$$\vec{A} = A_\rho \hat{\rho} + A_\phi \hat{\phi} + A_z \hat{z}$$

y su norma es  $\|\vec{A}\| = \sqrt{\vec{A} \cdot \vec{A}} = \sqrt{A_\rho^2 + A_\phi^2 + A_z^2}$ .

## Propiedades de los vectores unitarios de las coordenadas cilíndricas

Son unitarios  $\hat{\rho} \cdot \hat{\rho} = \hat{\phi} \cdot \hat{\phi} = \hat{k} \cdot \hat{k} = 1$

Son ortogonales:  $\hat{\rho} \cdot \hat{\phi} = \hat{\rho} \cdot \hat{k} = \hat{\phi} \cdot \hat{k} = 0$

**Pero no son vectores constantes. Depende del punto donde se evalúen**

A diferencia de lo que ocurre con los vectores unitarios de las coordenadas cartesianas que son vectores constantes (ver dibujo)

Muchas veces conviene escribir los vectores unitarios de cilíndricas en términos de los vectores unitarios de cartesianas

$$\hat{\rho} = \text{Cos}(\phi) \hat{x} + \text{Sen}(\phi) \hat{y}$$

$$\hat{z} = \hat{z}$$

$$\hat{\phi} = -\text{Sen}(\phi) \hat{x} + \text{Cos}(\phi) \hat{y}$$

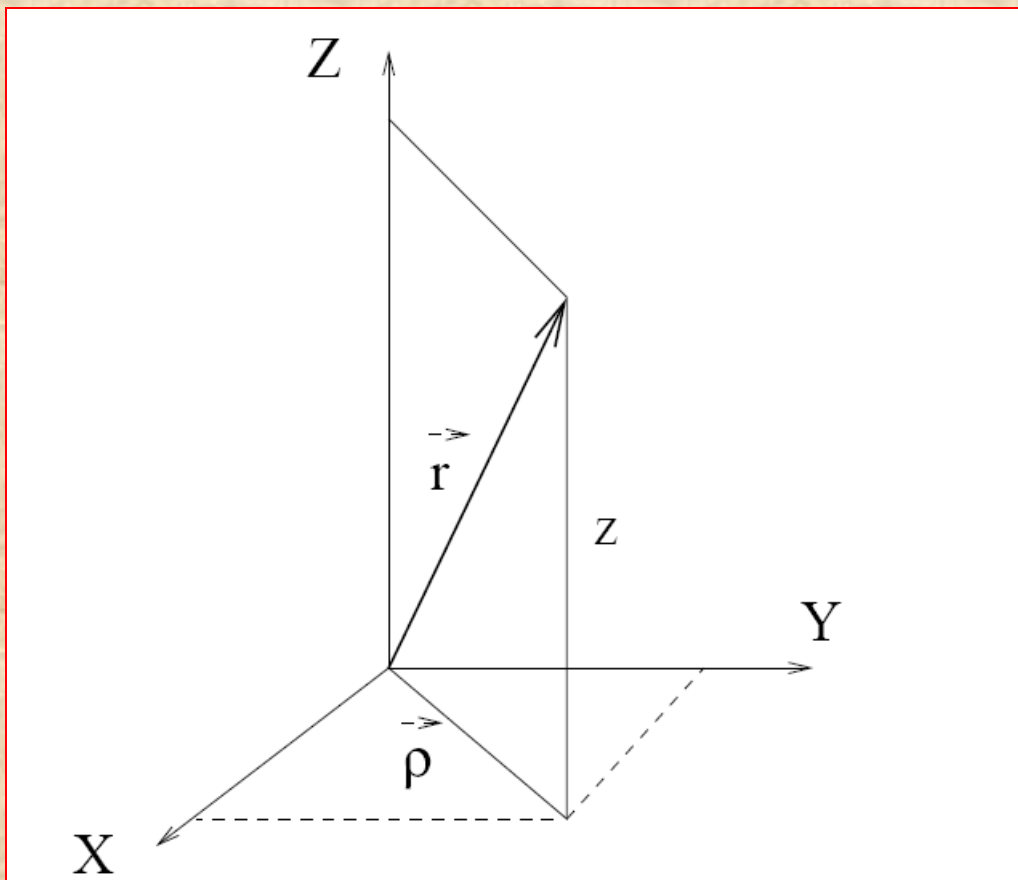
(Verificar propiedades, ver pizarra)

Notemos que:

$$\hat{\phi} = \frac{d}{d\phi} [\hat{\rho}]$$

## Ej. Vector posición

En el caso particular del vector de posición (que naturalmente parte del origen del sistema de coordenadas y por lo tanto tiene sólo componentes a lo largo del plano definido por  $\hat{\rho}$  y  $\hat{z}$ )



$$\vec{r} = \rho \hat{\rho} + z \hat{z}$$

$$\|\vec{r}\| = \sqrt{\rho^2 + z^2}$$

(Verificar la norma, tarea)

Destacamos nuevamente que el vector de posición  $\vec{r}$  no tiene componente o proyección sobre el vector unitario  $\hat{\phi}$  (esto es  $\vec{r} \cdot \hat{\phi} = 0$ ), pero un vector cualquiera  $\vec{A}$  si podría tenerla (esto es  $\vec{A} \cdot \hat{\phi} \neq 0$ ).

Vector general en Cilíndricas

$$\vec{r} = \rho \hat{\rho} + z \hat{z}$$

$$\vec{A} = A_{\rho} \hat{\rho} + A_{\phi} \hat{\phi} + A_z \hat{z}$$

Ejemplo de un vector más general, con componentes en los tres vectores unitarios de cilíndricas:

Vector velocidad (ver pizarra)

## Cambio de coordenadas de Cartesianas-Cilíndricas

Proyectando  $\vec{\rho} = \rho \hat{\rho}$  sobre los ejes OX y OY del sistema de coordenadas cartesiano asociado se obtiene la transformación de coordenadas que nos lleva de las coordenadas cilíndricas a las cartesianas:

$$x = \rho \cos \phi$$

$$y = \rho \sin \phi$$

$$z = z$$

Si alguien me da la posición de un objeto en coordenadas cilíndricas  $(\rho, \phi, z)$  yo puedo pasarlas a coordenadas cartesianas (x,y,z)

y usando que  $\tan(\phi) = y/x$  y que  $\rho^2 = x^2 + y^2$  sigue que, para el primer cuadrante, la transformación inversa en el caso del I cuadrante es:

$$\phi = \arctan(y/x)$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$z = z.$$

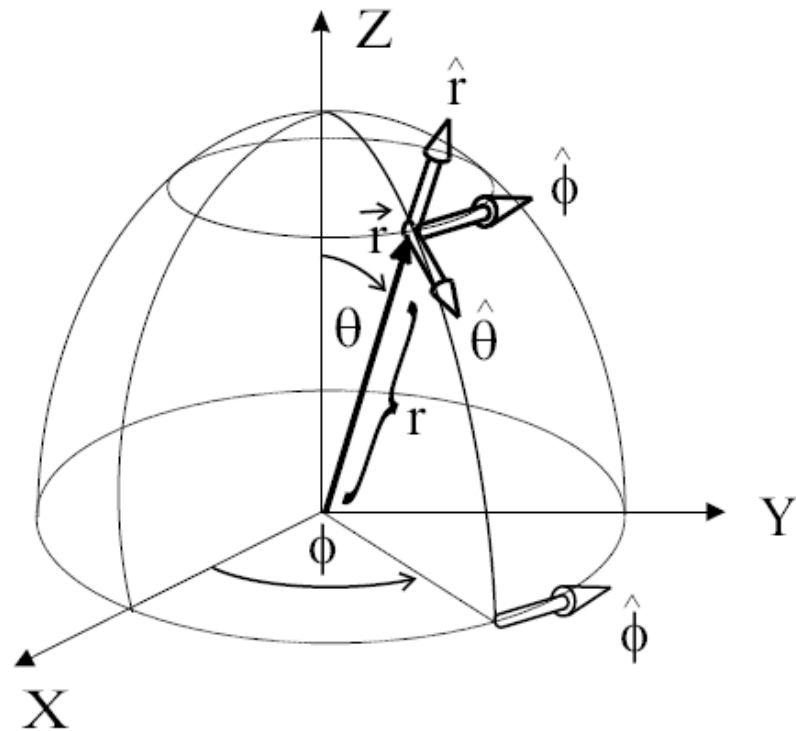
Hay que tener cierto cuidado para otros cuadrantes, pues por ejemplo en el caso del tercer cuadrante, donde ambos  $x$  e  $y$  son negativos, el cociente  $y/x$  da el mismo valor que para el primer cuadrante y la transformación anterior no resulta válida. En este caso se tiene:

$$\phi = \arctan(y/x) + \pi$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$z = z.$$

# Coordenadas Esféricas

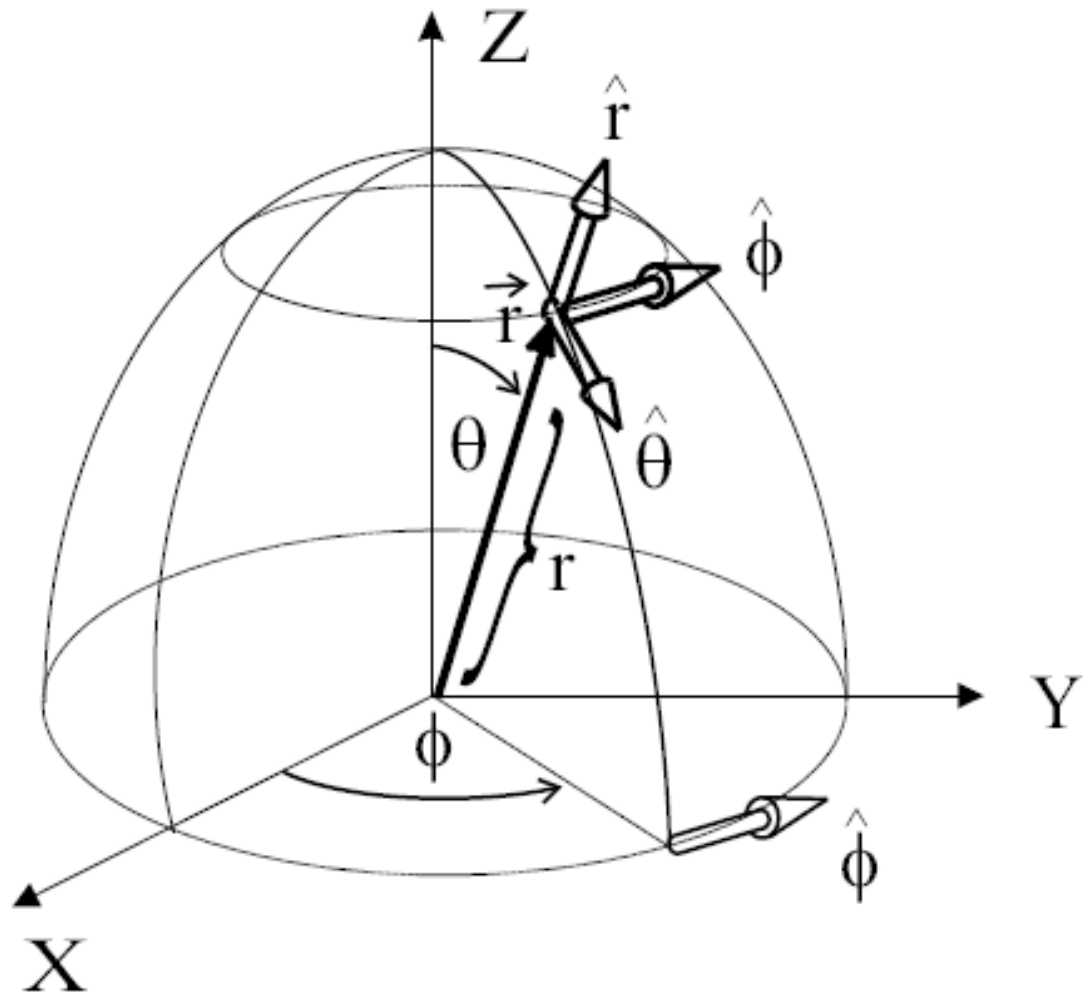


Coordenadas en esféricas  $(r, \theta, \phi)$

El sistema de coordenadas esféricas es muy similar al sistema de coordenadas que permiten ubicar un punto geográfico sobre la superficie de la Tierra. Se define una superficie esférica imaginaria de radio  $r$ , concéntrica al origen de un sistema de coordenadas cartesiano. La distancia de un punto en la superficie al origen es la coordenada  $r$ . La ubicación del meridiano que contiene el punto se realiza mediante un ángulo  $\phi$  medido, en el plano de las XY, a lo largo de la intersección de la superficie esférica con el meridiano. Finalmente la ubicación del paralelo que determina la ubicación del punto se realiza mediante un ángulo azimutal medido desde el eje  $z$  hasta el punto mismo a lo largo del meridiano que lo contiene

Para describir vectores en este sistema de coordenadas se asigna una triada de vectores unitarios  $(\hat{r}, \hat{\phi}, \hat{\theta})$  a lo largo de las direcciones en que crecen  $r$ ,  $\phi$  y  $\theta$ . Un vector cualquiera  $\vec{A}$  tiene proyecciones sobre dichos ejes que se denotan  $A_r, A_\phi$  y  $A_\theta$  respectivamente.

$$\begin{aligned} A_r &= \vec{A} \cdot \hat{r} \\ A_\theta &= \vec{A} \cdot \hat{\theta} \\ A_\phi &= \vec{A} \cdot \hat{\phi} \end{aligned}$$



Luego un vector arbitrario se puede escribir en coordenadas esféricas como sigue:

$$\vec{A} = A_r \hat{r} + A_\phi \hat{\phi} + A_\theta \hat{\theta}$$

La norma del vector queda:

$$\|\vec{A}\| = \sqrt{A_r^2 + A_\phi^2 + A_\theta^2}$$

Las coordenadas esféricas se mueven entre los siguientes valores

$$\begin{array}{l} r \quad : \quad 0 \dots \infty \\ \phi \quad : \quad 0 \dots 2\pi \\ \theta \quad : \quad 0 \dots \pi \end{array}$$

## Propiedades de los vectores unitarios de las coordenadas esféricas

Son unitarios  $\hat{r} \cdot \hat{r} = \hat{\theta} \cdot \hat{\theta} = \hat{\phi} \cdot \hat{\phi} = 1$

Son ortogonales  $\hat{r} \cdot \hat{\theta} = \hat{r} \cdot \hat{\phi} = \hat{\theta} \cdot \hat{\phi} = 0$

**No son vectores constantes. Depende del punto donde se evalúen**

Escribimos los vectores unitarios de esféricas en términos de los vectores unitarios de cartesianas

$$\hat{r} = \text{Sen}(\theta)\text{Cos}(\phi) \hat{x} + \text{Sen}(\theta)\text{Sen}(\phi) \hat{y} + \text{Cos}(\theta) \hat{z}$$

$$\hat{\theta} = \text{Cos}(\theta)\text{Cos}(\phi) \hat{x} + \text{Cos}(\theta)\text{Sen}(\phi) \hat{y} - \text{Sen}(\theta) \hat{z}$$

$$\hat{\phi} = -\text{Sen}(\phi) \hat{x} + \text{Cos}(\phi) \hat{y}$$

(Verificar propiedades, ver pizarra)

Notemos que:

$$\hat{r} = \text{Sen}(\theta)\text{Cos}(\phi) \hat{x} + \text{Sen}(\theta)\text{Sen}(\phi) \hat{y} + \text{Cos}(\theta) \hat{z}$$

$$\hat{\theta} = \text{Cos}(\theta)\text{Cos}(\phi) \hat{x} + \text{Cos}(\theta)\text{Sen}(\phi) \hat{y} - \text{Sen}(\theta) \hat{z}$$

$$\hat{\phi} = -\text{Sen}(\phi) \hat{x} + \text{Cos}(\phi) \hat{y}$$

$$\hat{\theta} = \frac{d}{d\theta} [\hat{r}]$$

$$\hat{\phi} = \frac{1}{\text{Sen}(\theta)} \frac{d}{d\phi} [\hat{r}]$$

## Ej. El vector posición

Un punto en dicho sistema de coordenadas queda determinado por las coordenadas de posición  $(r, \phi, \theta)$ . Si embargo el vector de posición mismo queda dado simplemente por la expresión:

$$\vec{r} = r\hat{r} \quad \leftarrow \text{¿Donde está el truco?}$$

ya que dicho vector no tiene componentes a lo largo de las direcciones  $\hat{\phi}$  ni  $\hat{\theta}$ . La norma del vector posición es simplemente:  $||\vec{r}|| = \sqrt{r^2} = r$ .

Recordemos que

$$\hat{r} = \text{Sen}(\theta)\text{Cos}(\phi) \hat{x} + \text{Sen}(\theta)\text{Sen}(\phi) \hat{y} + \text{Cos}(\theta) \hat{z}$$

Ej.2 Un vector más general; El vector velocidad (ver pizarra)

Fin