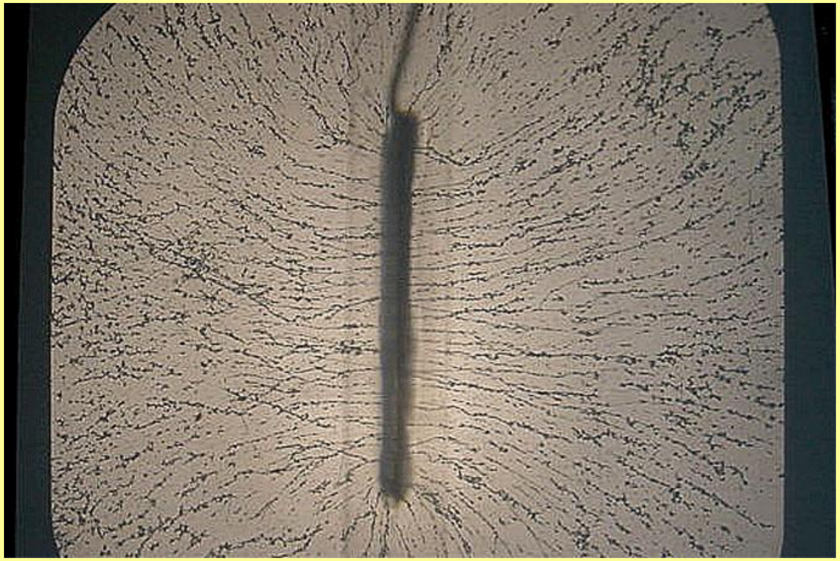
Campos Electromagnéticos

“Ejemplos de Campos Eléctricos y Campo Eléctrico Generado por Distribuciones Continuas de Carga”



Profesor: Pedro Labraña
Departamento de Física,
Universidad del Bío-Bío

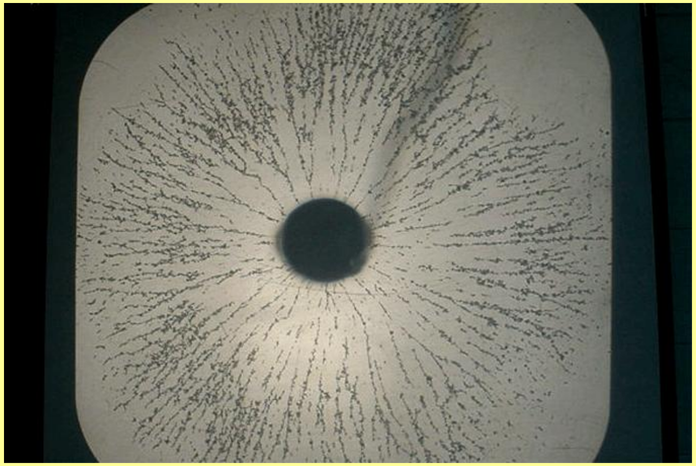
Ejemplo 1) Campo eléctrico de una carga puntual q' ubicada en $\vec{r}'$

$$\vec{E}(\vec{r}) = K \frac{q'}{||\vec{r} - \vec{r}'||^3} (\vec{r} - \vec{r}')$$

Carga puntual ubicada en el origen

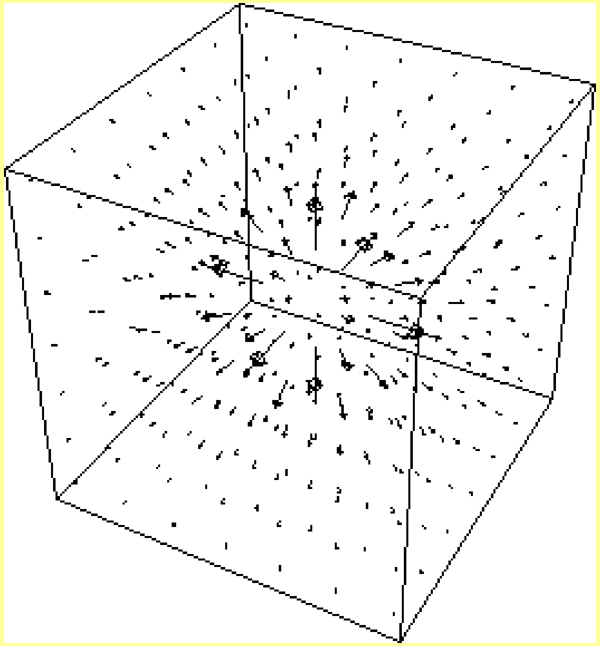
$$\vec{E}(\vec{r}) = K \frac{q}{r^2} \hat{r}$$

Notar que hemos escrito el campo eléctrico en coordenadas esféricas. ¿Como quedaría escrito en coordenadas cartesianas? (Pizarra)

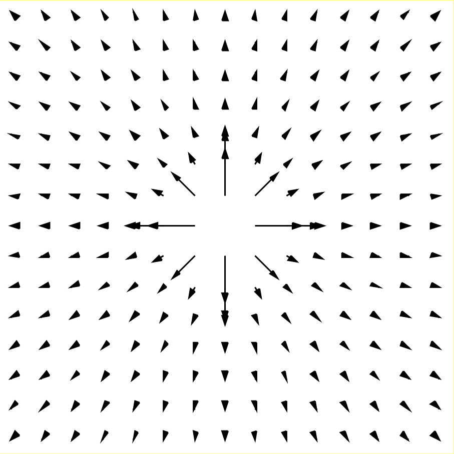


El campo eléctrico es un campo vectorial. Esto es una función que a cada punto del espacio le asocia un vector.

Ej. El campo eléctrico de una carga puntual se "ve" de la siguiente forma en 3D



Proyección en 2D al plano (x,y)



Comente lo que ve

i) ¿En que sentido apuntan estas flechitas ?

ii) ¿Qué puede decir respecto al largo de estas flechitas?

iii) Notar que estas flechitas parecen formar líneas

iv) ¿Que puede decir respecto a la densidad de estas líneas y el largo de las flechitas?

Ej.0 Versión idealizada del experimento de Millikan (Tarea)

En el experimento de Millikan, se equilibra un ‘quanto’de carga $+e$ (ión) bajo la acción de: la fuerza de peso $-mg\hat{\imath}$ y la acción de un campo uniforme $\vec{E} = E_0\hat{\imath}$. Si la partícula corresponde a un protón, ¿cuál es el valor de E_0 necesario para este equilibrio?.

Rpta.

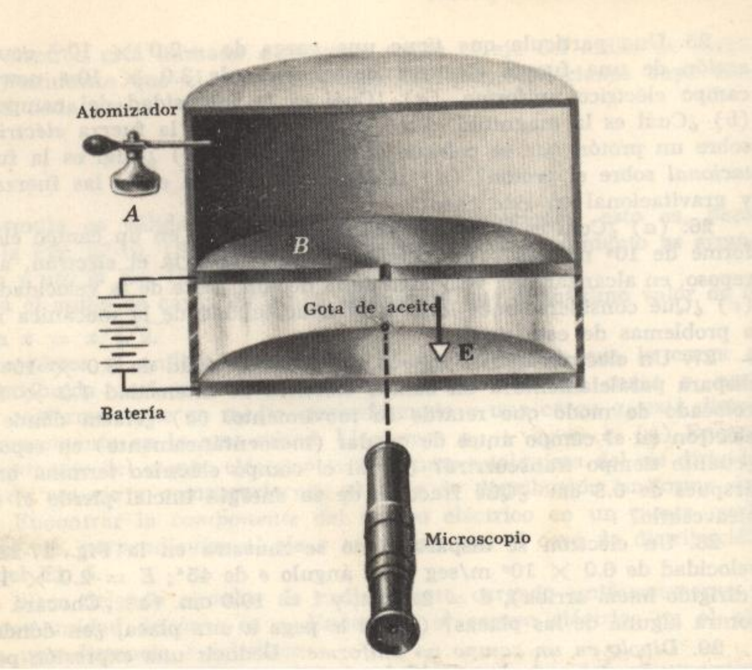
$$
\begin{aligned}
\vec{F}^{\text{neta}} &= m\vec{a} \\
q_e\vec{E} + m_p\vec{g} &= 0 \\
\left(eE_0 - m_p g\right)\hat{\imath} &= 0 \\
E_0 &= m_p g/e = 1.02 \times 10^{-7}[\mathrm{N/C}]
\end{aligned}
$$

Problema capítulo 27 Halliday Resnick

FIG. 27-23

30. *Experimento de la gota de aceite.* R. A. Millikan, preparó un aparato (Fig. 27-24) en el cual una gotita de aceite cargada colocada en un campo eléctrico **E**, podía "equilibrarse" ajustando E hasta que la fuerza eléctrica sobre la gota fuera igual y opuesta a su peso. Si el radio de la gota es 1.64×10^{-4} cm y E en las condiciones de equilibrio vale 1.92×10^5 nt/coul, (a) ¿qué carga lleva la gota? (b) ¿Por qué Millikan no trató de equilibrar electrones en su aparato en vez de gotas de aceite? La densidad del aceite es 0.851 g/cm³. (Millikan fue el primero en medir la carga del electrón por este método. Midió el radio de la gota observando la velocidad límite que alcanzaban las gotas cuando caían en el aire cuando no había campo eléctrico. Cargaba las gotas de aceite irradiándolas con descargas de rayos X.)

Ver video y pizarra



Tarea problema 31 del mismo capítulo

Ej. 3

La figura 2.4 muestra dos cargas puntuales positivas iguales y de magnitud q, que están separadas a una distancia $2d$. Sobre el eje de las X se intenta poner un protón a distancia x.

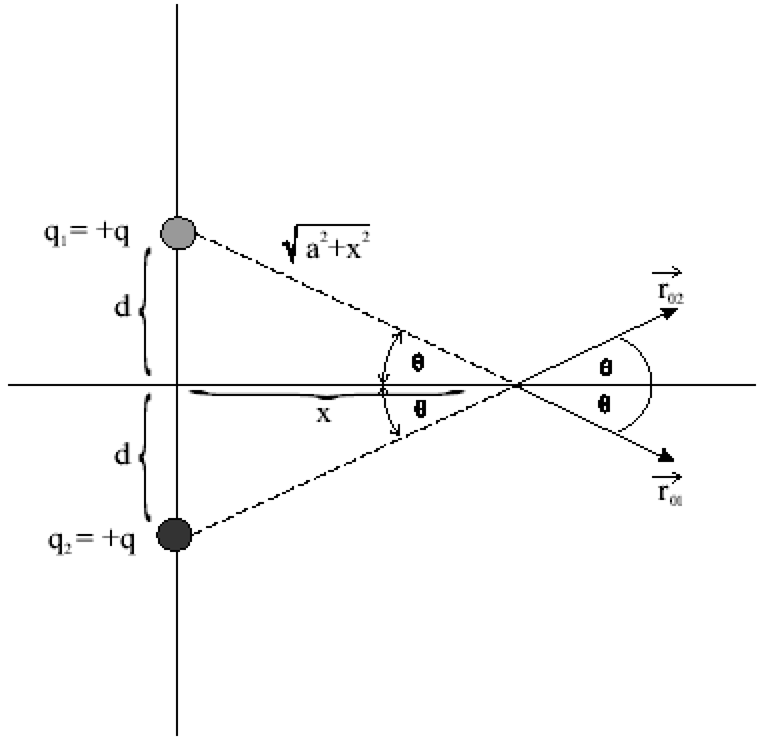


Figura 2.4: **Campo eléctrico sobre un protón debido a dos cargas positivas. La figura grafica los vectores unitarios $\hat{r}_{01}$ y $\hat{r}_{02}$.**

¿Cuanto vale el campo eléctrico que siente el protón? ¿Cuanto vale la fuerza que siente el protón?

Desarrollo

Ahora resolveremos el problema de manera diferente. Las posiciones de cada carga son

$$\begin{aligned}\vec{r}_1 &= +d\hat{y}\\ \vec{r}_2 &= -d\hat{y}\end{aligned}$$

y el protón está en $\vec{r} = x\hat{x}$. El campo se obtiene directamente evaluando:

$$\begin{aligned}\|\vec{r}-\vec{r}_1\| &= \|x\hat{x}+d\hat{y}\| = \sqrt{x^2+d^2}\\ \|\vec{r}-\vec{r}_2\| &= \|x\hat{x}-d\hat{y}\| = \sqrt{x^2+d^2}\end{aligned}$$

y reemplazando en

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{2} \frac{Kq_i(\vec{r}-\vec{r}_i)}{\|\vec{r}-\vec{r}_i\|^3}$$

Resulta

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \frac{K(q)(x\hat{x}-d\hat{y})}{(x^2+d^2)^{3/2}} + \frac{K(q)(x\hat{x}-(-d\hat{y}))}{(x^2+d^2)^{3/2}}\\ &= \frac{2Kqx}{(x^2+d^2)^{3/2}}\hat{x}\end{aligned}$$

de modo que se recupera el resultado obtenido anteriormente.

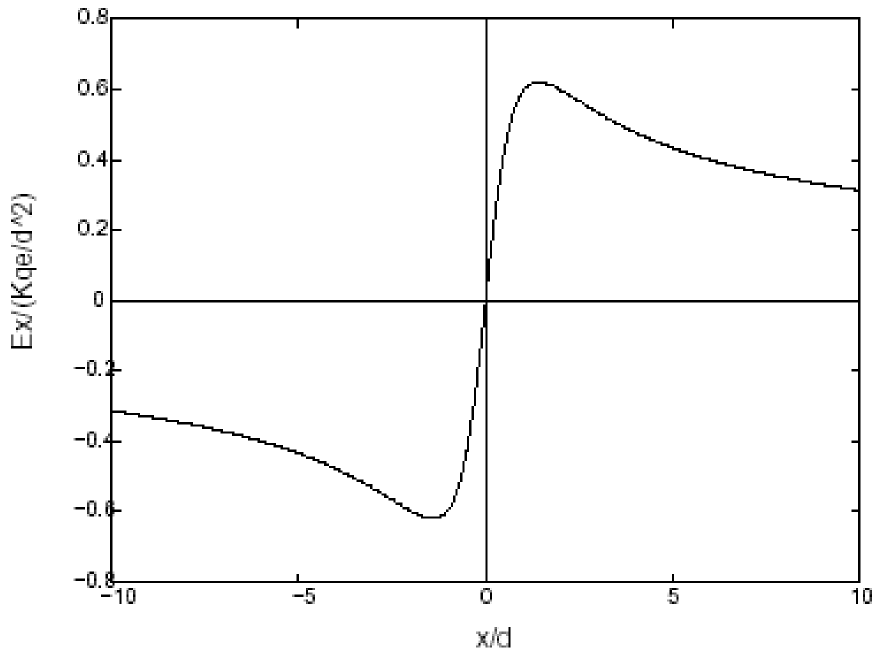


Gráfico del valor del campo eléctrico como función de la distancia

El campo se anula si el protón está en el origen y su intensidad es máxima a una distancia de $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}d$ del origen.

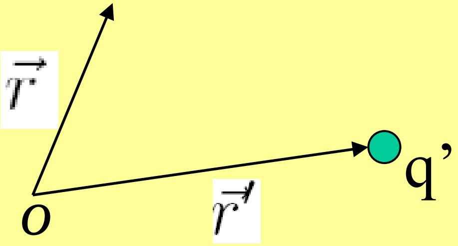
La fuerza sobre el protón se obtiene simplemente vía $\vec{F} = q_p\vec{E}$.

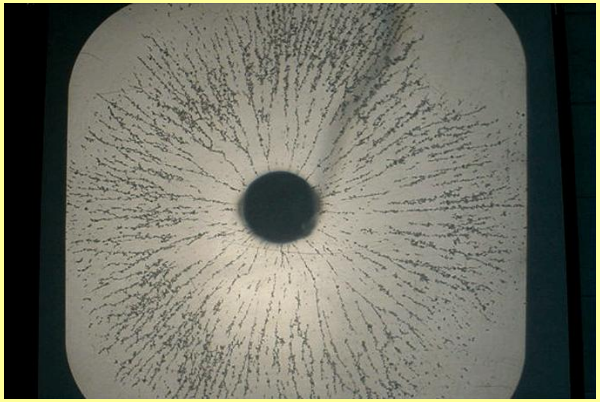
Campo Eléctrico Generado por Distribuciones Continuas de Carga

Clases anteriores: Campo Eléctrico

Campo eléctrico de una carga puntual ubicada en $\vec{r}'$ evaluado en $\vec{r}$

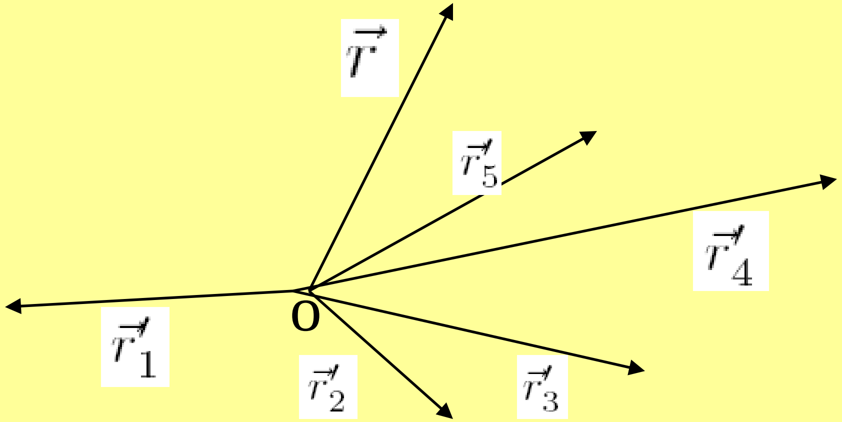
$$\vec{E}(\vec{r}) = K\,\frac{q'}{||\vec{r}-\vec{r}'||^3}(\vec{r}-\vec{r}')$$



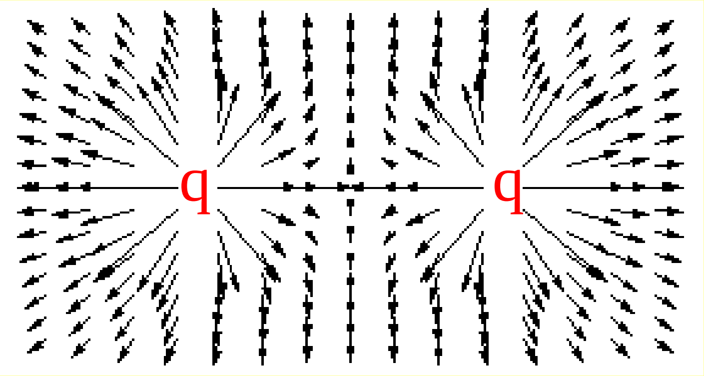


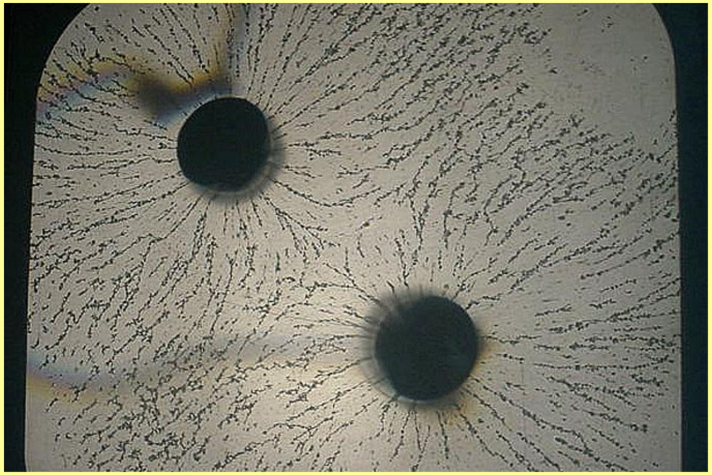
Campo eléctrico de una distribución de cargas puntuales evaluado en $\vec{r}$

$$\vec{E}(\vec{r}) = K \sum_{i=1}^{N} \frac{q'_i}{||\vec{r} - \vec{r}'_i||^3} (\vec{r} - \vec{r}'_i)$$

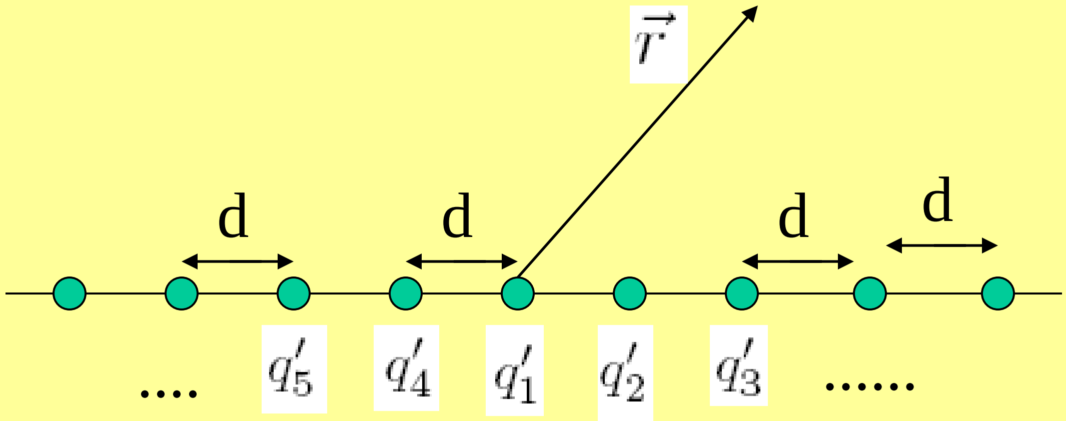


Ej. Dos cargas puntuales del mismo signo





¿Qué pasa si consideramos la siguiente distribución de cargas discretas?



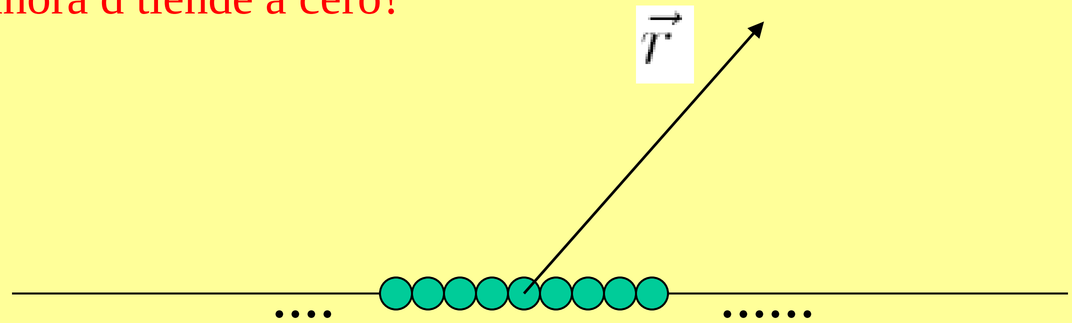
¿Cuanto vale el campo eléctrico en $\vec{r}$?

$$\vec{E}(\vec{r}) = K\,\frac{q'_1}{||\vec{r}-\vec{r_1}'||^3}(\vec{r}-\vec{r_1}') + K\,\frac{q'_2}{||\vec{r}-\vec{r_2}'||^3}(\vec{r}-\vec{r_2}') + K\,\frac{q'_3}{||\vec{r}-\vec{r_3}'||^3}(\vec{r}-\vec{r_3}')$$

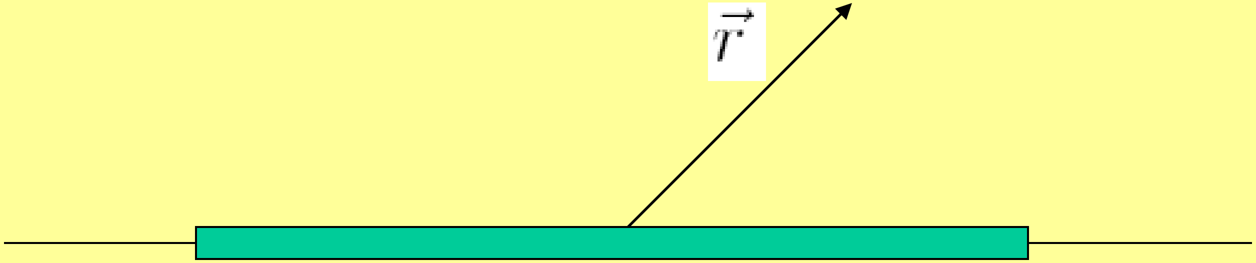
$$+K\,\frac{q'_4}{||\vec{r}-\vec{r_4}'||^3}(\vec{r}-\vec{r_4}') + K\,\frac{q'_5}{||\vec{r}-\vec{r_5}'||^3}(\vec{r}-\vec{r_5}') \;+\; \cdots$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = K\sum_{i=1}^{N}\frac{q'_i}{||\vec{r}-\vec{r}'_i||^3}(\vec{r}-\vec{r}'_i)$$

¿Qué pasa si ahora d tiende a cero?



Podemos considerar que ahora esta es una distribución de carga continua. En particular este caso corresponde a una distribución lineal de carga



¿Cuánto vale ahora el campo eléctrico en $\vec{r}$?

$$\vec{E}(\vec{r}) = K\frac{q_1'}{||\vec{r}-\vec{r_1}'||^3}(\vec{r}-\vec{r_1}') + K\frac{q_2'}{||\vec{r}-\vec{r_2}'||^3}(\vec{r}-\vec{r_2}') + K\frac{q_3'}{||\vec{r}-\vec{r_3}'||^3}(\vec{r}-\vec{r_3}')$$

$$+K\frac{q_4'}{||\vec{r}-\vec{r_4}'||^3}(\vec{r}-\vec{r_4}') + K\frac{q_5'}{||\vec{r}-\vec{r_5}'||^3}(\vec{r}-\vec{r_5}') \quad + \cdots$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = K\sum_{i=1}^{N}\frac{q_i'}{||\vec{r}-\vec{r}_i'||^3}(\vec{r}-\vec{r}_i')$$

Sólo que ahora hay que tener un poco más de cuidado al realizar esta sumatoria

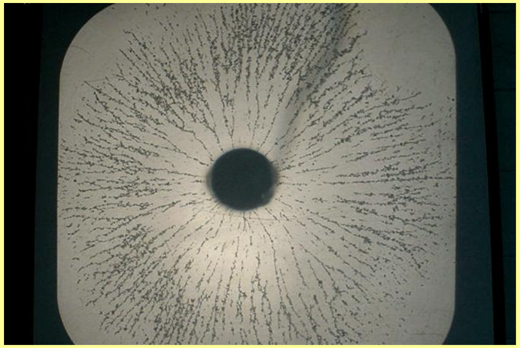
En particular lo que obtenemos es lo siguiente

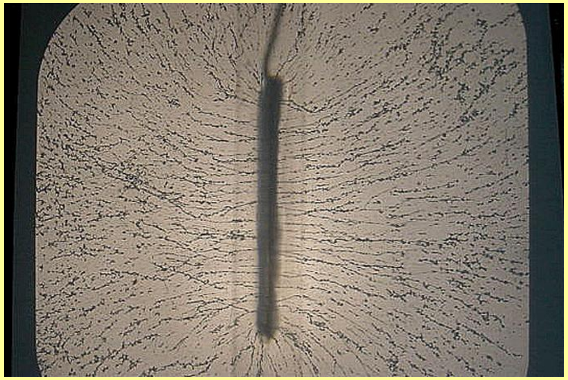
$$\vec{E}(\vec{r}) = K \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i'}{||\vec{r} - \vec{r}_i'||^3}(\vec{r} - \vec{r}_i') \quad \Rightarrow \quad \vec{E}(\vec{r}) = K \int \frac{\lambda(\vec{r}')dr'}{||\vec{r} - \vec{r}'||^3}(\vec{r} - \vec{r}')$$

Donde $\lambda(\vec{r}')$ es la densidad de carga por unidad de longitud [C/m]

Ver pizarra !!

Algunos ejemplos de distribuciones continuas de carga eléctrica





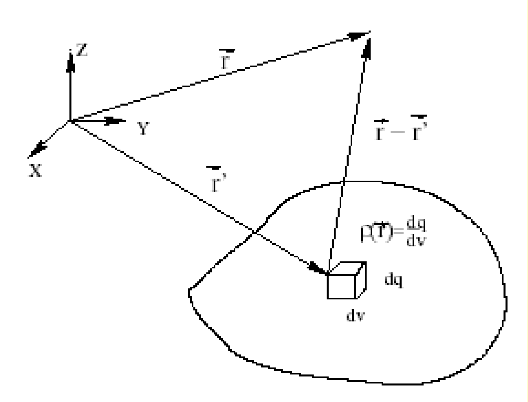
Por medio del uso de aceite, semillas de grama y empleando un pequeño electrodo cilíndrico que se carga con el generador de Wimshurt, se obtienen las líneas de campo.

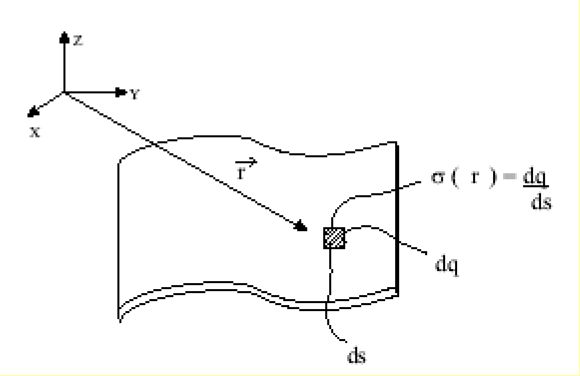
http://ephysics.physics.ucla.edu/MIT/mappingfields/HTML/mappingfields.htm

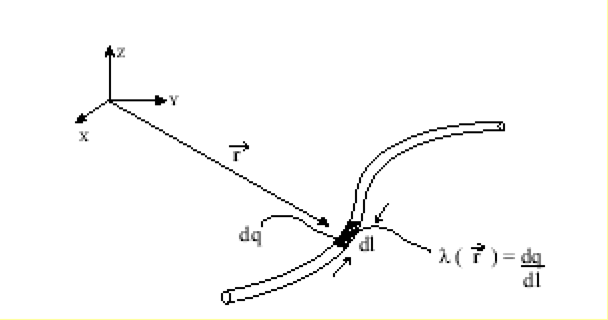
Campo Eléctrico Generado por Distribuciones Continuas de Carga Eléctrica

En la electricidad clásica hablamos de cargas puntuales o cargas discretas y de distribución contínua de cargas, ya sea en un volumen, en una superficie o en una línea. Definimos:

- ρ la densidad de carga por unidad de volumen [C/m^3],
- σ la densidad de carga por unidad de área [C/m^2] y
- λ la densidad de carga por unidad de longitud [C/m].



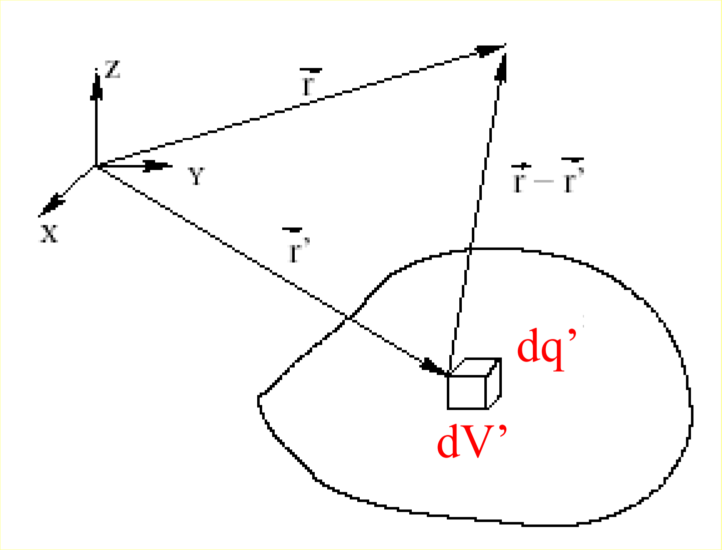




Cada una de estas distribuciones de carga generan un campo eléctrico

El campo eléctrico debido a cada una de estas distribuciones de carga puede considerarse como la sumatoria del campo al que contribuyen las numerosas cargas puntuales que forman las distribuciones de carga.

Consideremos como ejemplo la siguiente distribución de carga volumétrica



Un elemento de volumen dV' contendrá un elemento de carga dq'. Este elemento de carga generara un elemento de campo eléctrico (diferencial de campo eléctrico) dado por la siguiente expresión:

$$d\vec{E}(\vec{r}) = K\,\frac{dq'}{||\vec{r}-\vec{r}'||^3}(\vec{r}-\vec{r}')$$

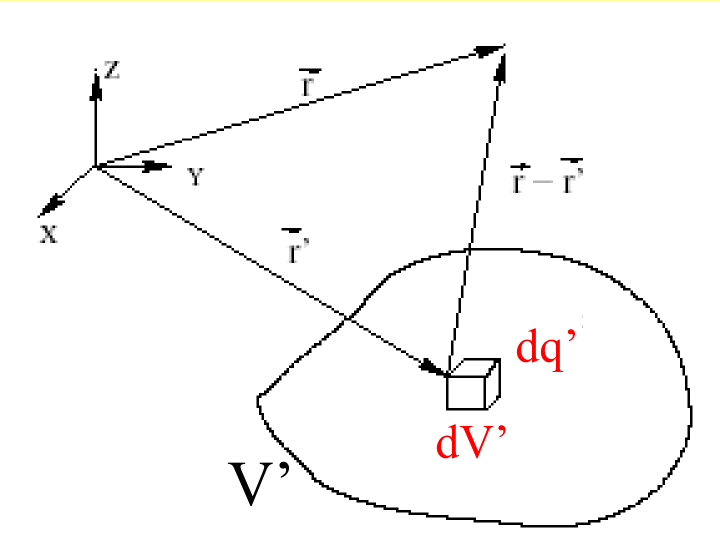
Luego el campo eléctrico total generado por la distribución será "la sumatoria" de estos diferenciales de campo eléctrico

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int d\vec{E}(\vec{r})$$

Luego para las diferentes distribuciones de carga tenemos

Distribución de carga volumétrica

$$d\vec{E}(\vec{r}) = K \frac{dq'}{||\vec{r}-\vec{r}'||^3}(\vec{r}-\vec{r}')$$



$$\vec{E}(\vec{r}) = \int d\vec{E}(\vec{r})$$

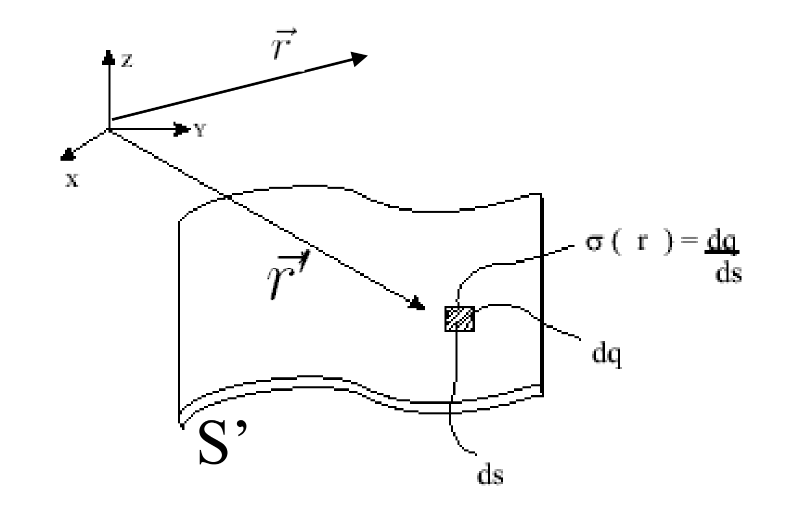
En este caso: $$dq' = \rho(\vec{r}')d^3r'$$

Donde $\vec{r}'$ es el vector posición de la carga dq'.
También hemos utilizado que dV' = d^3r'

Luego el campo eléctrico para esta distribución será

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{V'} \frac{\rho(\vec{r}')(\vec{r}-\vec{r}')}{||\vec{r}-\vec{r}'||^3} d^3r'}$$

Distribución de carga superficial



$$d\vec{E}(\vec{r}) = K\,\frac{dq'}{||\vec{r}-\vec{r}'||^3}(\vec{r}-\vec{r}')$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int d\vec{E}(\vec{r})$$

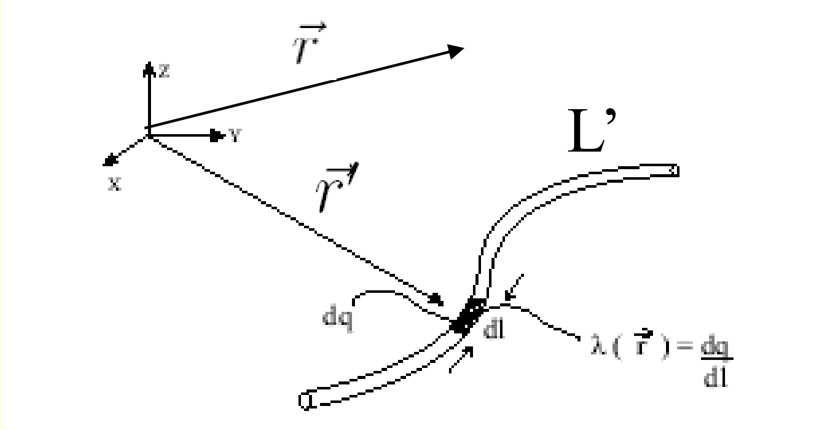
En este caso: $dq' = \sigma(\vec{r}')d^2r'$

Donde $\vec{r}'$ es el vector posición de la carga dq'.

Luego el campo eléctrico para esta distribución será

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{S'}\frac{\sigma(\vec{r}')(\vec{r}-\vec{r}')}{||\vec{r}-\vec{r}'||^3}d^2r'}$$

Distribución de carga lineal



$$d\vec{E}(\vec{r}) = K \frac{dq'}{||\vec{r}-\vec{r}'||^3}(\vec{r}-\vec{r}')$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int d\vec{E}(\vec{r})$$

En este caso: $dq' = \lambda(\vec{r}')dr'$

Donde $\vec{r}'$ es el vector posición de la carga dq'.

Luego el campo eléctrico para esta distribución será

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{L'} \frac{\lambda(\vec{r}')(\vec{r}-\vec{r}')}{||\vec{r}-\vec{r}'||^3}dr'$$

Algunos ejemplos

1) Calcular el campo eléctrico debido a una carga uniformemente distribuida a lo largo de una línea infinita

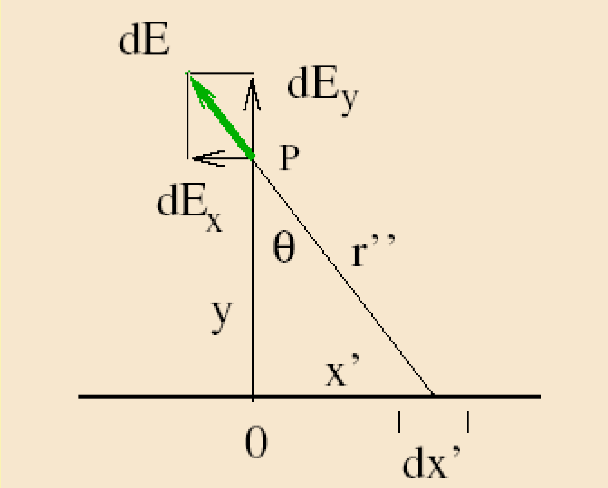
Tarea

Respuesta

$$d\vec{E}(\vec{r}) = K\,\frac{dq'}{||\vec{r}-\vec{r}'||^3}(\vec{r}-\vec{r}')$$

$$dq' = \lambda(\vec{r}')dr'$$

Para resolver este problema utilizamos la ecuación , donde $\vec{r} = 0\hat{\imath} + y\hat{\jmath}$, $\vec{r}' = x'\hat{\imath} + 0\hat{\jmath}$, $dr' = dx'$ y $\lambda(\vec{r}') = \lambda = \text{const.}$. También $\vec{r} - \vec{r}' = r''\hat{r}'' = (y^2 + x'^2)^{1/2}\hat{r}''$.



Notar que trabajamos en cartesianas

por lo tanto la magnitud de dE es : $k\dfrac{dq}{r''^2} = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{\lambda dx'}{y^2 + x'^2}$

La formula anterior nos da la magnitud del campo debido a $dq = \lambda dx'$, en un punto del eje de las y, i.e. para $x = 0$. El resultado no depende de la eleccion de x, ya que la línea es infinita. Para calcular el campo $\vec{E}$ debemos calcular las componentes x e y de $d\vec{E}$ antes de integrar. Sin embargo podemos notar que por simetría la componente x es cero. Para obtener dE_y debemos mutiplicar por el coseno del angulo correspondiente:

$$\cos\theta = \frac{y}{\sqrt{x'^2 + y^2}}$$

y después integrar. Así llegamos a:

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_o} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{y^2 + x'^2} \frac{y}{\sqrt{x'^2 + y^2}} dx' \,\hat{\jmath} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_o y} \,\hat{\jmath}$$

2) Considere un segmento de recta de largo L cargado con densidad de carga uniforme, ubicado a lo largo del eje z, con el origen en el centro del segmento.

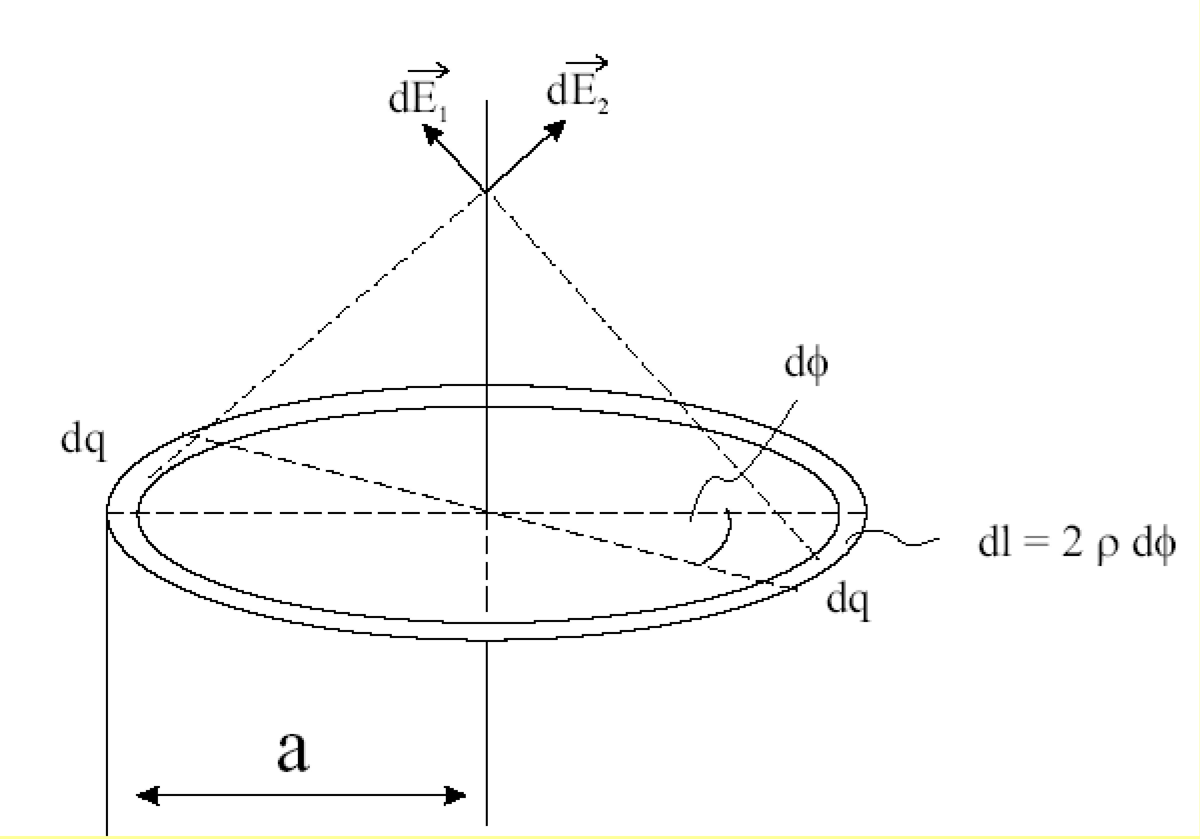
a) Encuentre el campo eléctrico producido por esta distribución de carga en todo el espacio.
b) Considere el límite $r >> L$ y compare con el ejemplo anterior.

(Problema 5 de la guía 2)

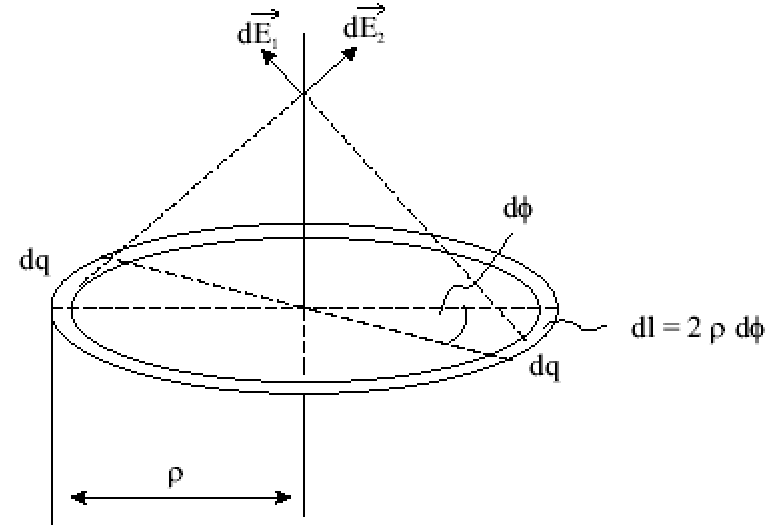
Respuesta ver pizarra

Ejemplo 3

Calcular el campo eléctrico creado sobre su eje axial por un anillo delgado de radio **a**, con una distribución uniforme de carga λ



Respuesta del problema



Rpta. Nos aprovecharemos de un resultado anterior. Un elemento de carga dq sobre el anillo producira un campo como el que muestra la figura.

Si en el extremo opuesto del anillo escogemos otro elemento infinitesimal de carga dq de la misma magnitud, como vimos en los ejemplos de la sección **??**, los campos generados por cada uno de estos dos elementos infinitesimales se superponen (suman) para dar una componente neta a lo largo del eje axial, y con magnitud

$$dE_z = \frac{2K\,z\,dq}{(\rho^2+z^2)^{3/2}}$$

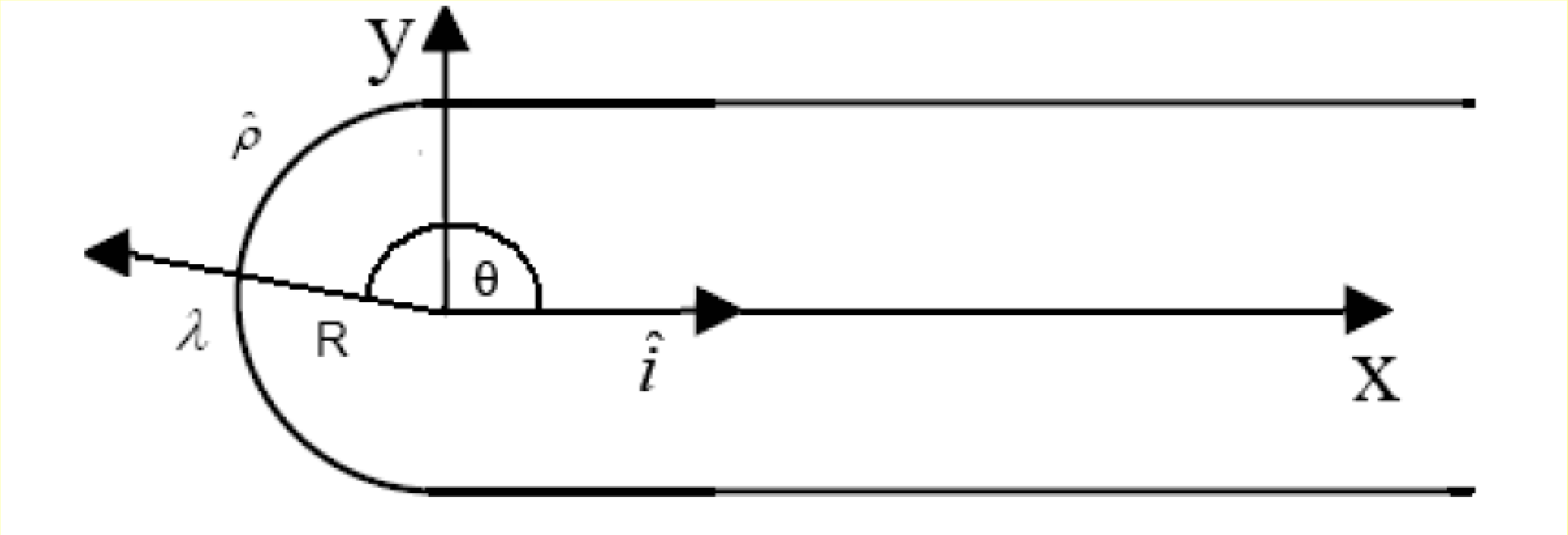
en que z es la distancia de donde se ubica la carga de prueba al plano que contiene al anillo. Podemos reescribir la carga $dq = \lambda\ d\ell$ en que $d\ell = \rho\ d\phi$, siendo $d\phi$ un ángulo infinitesimal de integración. Hasta aquí se tiene:

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \int_0^{\pi} \frac{2K\,z\,\lambda\rho\,d\phi}{(\rho^2+z^2)^{3/2}}\hat{z} \\ &= 2\pi K\lambda \frac{z\rho}{(\rho^2+z^2)^{3/2}}\hat{z}\end{aligned}$$

La integral se hace entre $\phi = 0$ a $\phi = \pi$ (la mitad de la circunferencia) puesto que ya se ha incluido tanto dq como la carga opuesta a dq en el otro extremo del anillo (esto se hace para no contar 2 veces esta carga).

Guía 2 (*)

4-Un alambre infinito con densidad lineal de carga λ se dobla en forma de horquilla como se muestra en la figura 1. Determine el campo eléctrico en el punto O.



Más ejemplos (Superficies cargadas)

Guía 2

6-Un disco circular de radio a tiene una carga uniforme $\rho_S C/m^2$. Si el disco se encuentra sobre el plano z=0 con su eje a lo largo del eje z.

(a) Demuestre que

$$\boldsymbol{E}(0{,}0,h)=\frac{\rho_S}{2\epsilon_0}\left\{1-\frac{h}{[h^2+a^2]^{1/2}}\right\}a_z$$

(b) A partir de esto, obtenga el campo **E** debido a una lámina infinita de carga situada en el plano z=0.

Utilizando el resultado del problema anterior calculamos

Campo eléctrico debido a una lámina infinita de carga situada en el plano z = 0.

$$\vec{E}=\begin{cases} +\dfrac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}\hat{z} & \text{Si } z>0 \\ \dfrac{-\sigma_0}{2\varepsilon_0}\hat{z} & \text{Si } z<0 \end{cases}$$

Notar que este campo resulta independiente de la altura z. Si la placa es infinita se puede tambíen argumentar que por simetría este comportamiento no cambia cuando el observador se traslada a lo largo de la superficie de la placa.

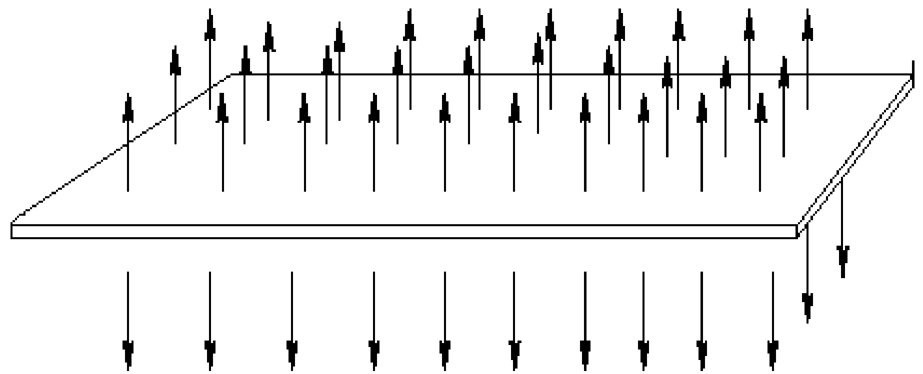
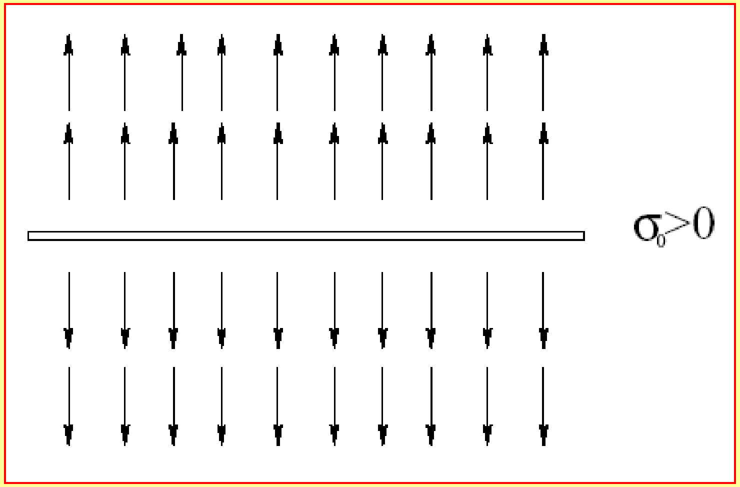
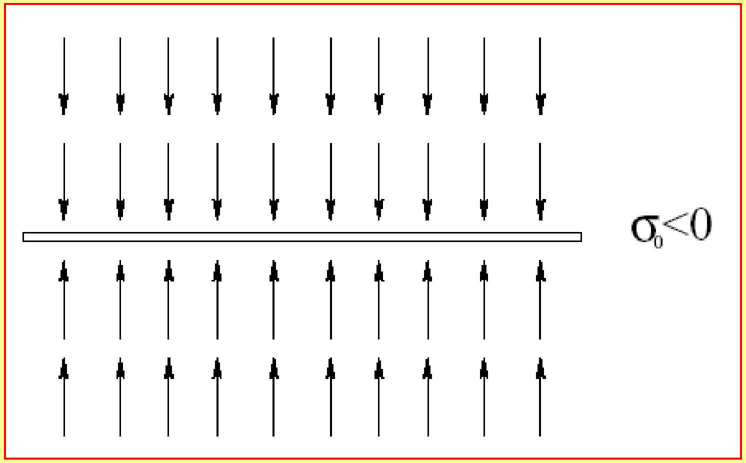


Figura 2.12: **Simetría traslacional del campo de una placa plana con densidad uniforme de carga**

$\sigma_0 > 0$

La conclusión es que el campo de una distribución uniforme de carga sobre una superficie plana, es uniforme o homogéneo, y apuntando perpendicularmente en dirección exterior a la superficie de la placa si la densidad de carga es positiva y hacia la placa si la densidad de carga es negativa.





De modo que es posible generar campos eléctricos relativamente uniformes, a partir de distribuciones de carga uniforme, siempre que se considere una superficie muuuuy grande, o equivalenmente que las cargas de prueba que sienten el campo esten muy cerca de la superficie cargada.

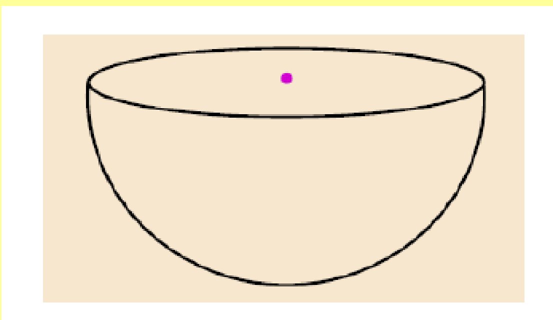
Más ejemplos (Guía 2)

(Objetos volumétricos cargados y fuerza entre objetos cargado)

(*)

7-Un cilindro circular de radio R y altura L se orienta a lo largo del eje z. Tiene una densidad de carga volumétrica no uniforme dada por $\rho(z)=\rho_0+\beta z$ con respecto a un origen en el centro del cilindro. Encuentre la fuerza sobre una carga puntual q colocada en el centro del cilindro.

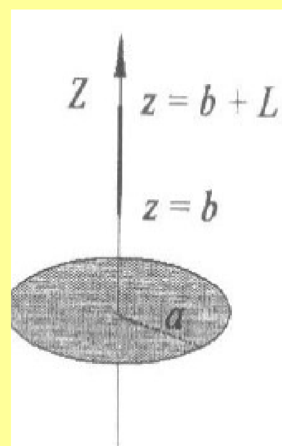
12 - Un hemisferio de radio R tiene una carga Q uniformemente distribuida. Encuentre el campo eléctrico en el centro de la esfera.



a) Densidad volumétrica de carga (*)
b) Densidad superficial de carga

$$E_z = \frac{kQ}{2R^2}$$

9-Determine la fuerza entre un disco de radio "a" cargado con densidad uniforme de carga ρ y una varilla largo L colocada en el eje del disco a una distancia "b" de él, con densidad lineal λ.



(Ver pizarra)

Fin