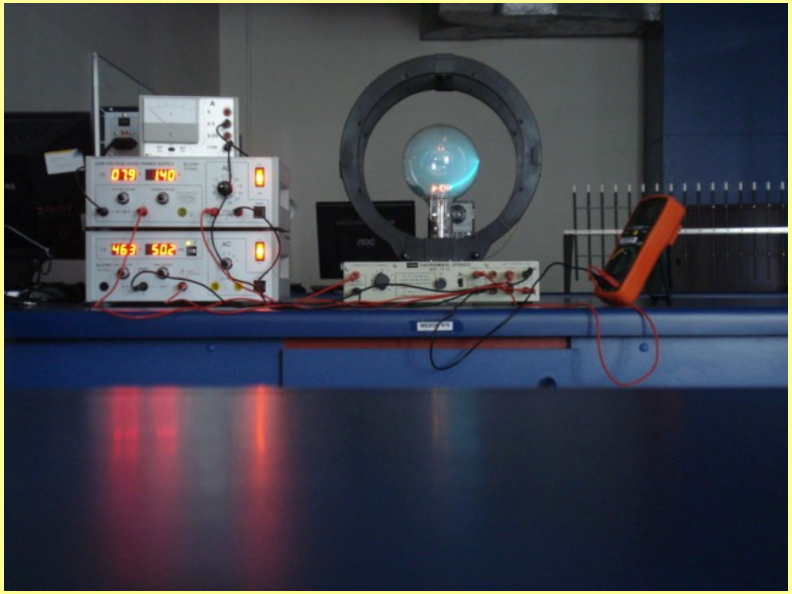
Campos Electromagnéticos
" El Potencial Electrostático"



Profesor: Pedro Labraña
Departamento de Física,
Universidad del Bío-Bío

Carrera: Ingeniería Civil en Automatización
Créditos: 5

Ejemplo tomado del libro Serway tomo II.

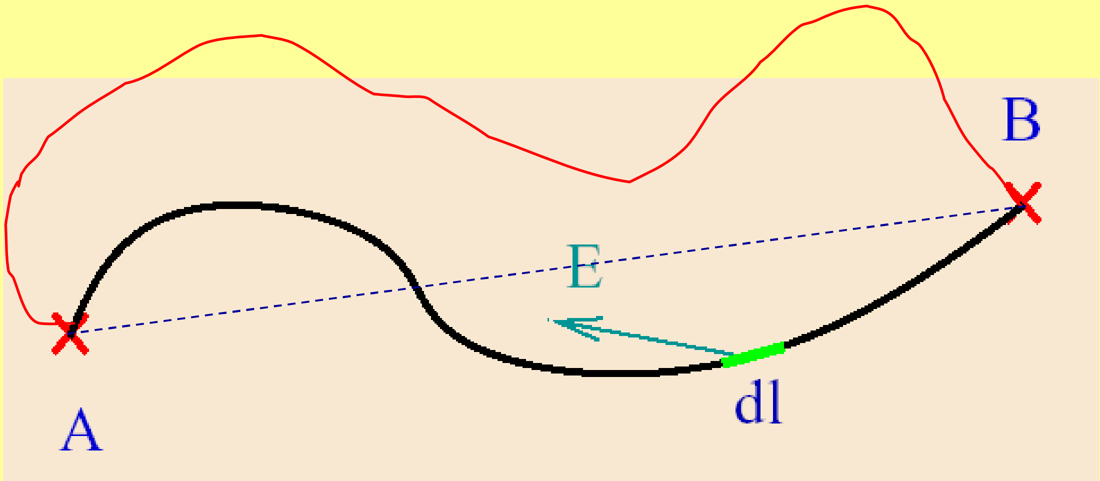
Jennifer is holding on to an electrically charged sphere that reaches an electric potential of about 100 000 V. The device that generates this high electric potential is called a *Van de Graaff generator.* What causes Jennifer's hair to stand on end like the needles of a porcupine? Why is she safe in this situation in view of the fact that 110 V from a wall outlet can kill you? *(Henry Leap and Jim Lehman)*

El Potencial Electroestático

Hemos estudiado hasta aquí el cómo se generan los campos eléctricos y las fuerzas que estos realizan sobre las partículas. Una pregunta que naturalmente viene a continuación es la del *trabajo asociado a esa fuerza*, es decir el *trabajo eléctrico*.

Campo eléctrico es conservativo

La observación importante aquí es que el campo eléctrico **es conservativo**. Es decir el valor del trabajo no varia independiente de que camino describa la partícula para ir de un punto A a un punto B, o en otras palabras *el trabajo sobre un camino cerrado de la fuerza eléctrica es nulo.*



$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F}_E \cdot d\vec{r} = \int_A^B q\,\vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

(Ver pizarra)

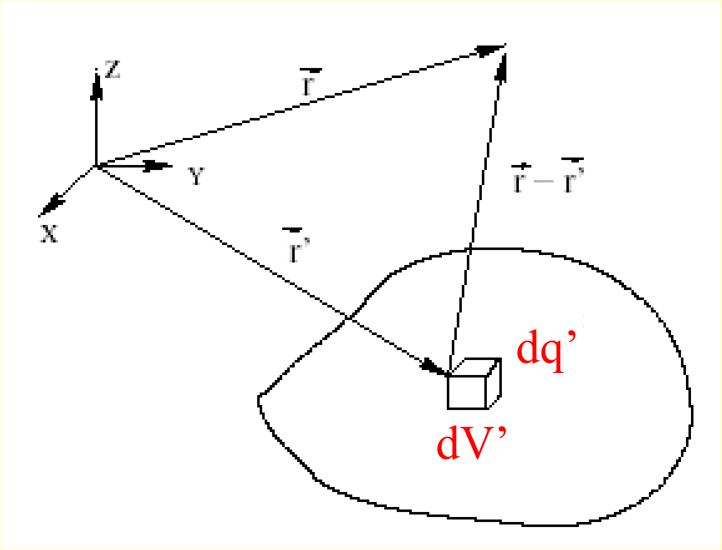
El valor del trabajo que realiza el campo eléctrico para mover la carga q del punto A al punto B no depende del camino. Veremos, más adelante, que el valor del trabajo se puede escribir:

$$W_{AB} = -q\left[V(B) - V(A)\right]$$

Donde V(A) es el potencial electrostático evaluado en la posición A y V(B) es el potencial electrostático evaluado en la posición B

En virtud de estos puntos es que es conveniente definir la siguiente función "escalar" asociada al campo eléctrico denominada "Potencial Electrostático"

Consideremos como ejemplo la siguiente distribución de carga volumétrica



Un elemento de volumen dV' contendrá un elemento de carga dq'. Este elemento de carga generara un elemento de potencial eléctrico (diferencial de potencial eléctrico) dado por la siguiente expresión:

$$dV(\vec{r}) = K \frac{dq'}{||\vec{r} - \vec{r}'||}$$

Luego el potencial eléctrico total generado por la distribución será "la sumatoria" de estos diferenciales de potencial eléctrico

$$V(\vec{r}) = \int dV(\vec{r})$$

Algunas propiedades del Potencial Electrostático

Ejemplo en el cual tenemos una distribución volumétrica de carga

Campo Eléctrico

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho(\vec{r}')(\vec{r} - \vec{r}')}{||\vec{r} - \vec{r}'||^3} d^3r'$$

Es un campo vectorial (a cada punto del espacio le asigna un vector)

Unidades: Fuerza/Carga eléctrica

N/C

Potencial Electrostático

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho(\vec{r}')}{||\vec{r} - \vec{r}'||} d^3r'$$

Es un campo escalar (a cada punto del espacio le asigna un número)

Unidades: Las unidades del potencial electrostático es Volt y corresponde a Energía/Carga eléctrica

$$\frac{\text{Joule}}{\text{Coulomb}} = 1[\text{Volt}] = 1[\text{V}]$$

Potencial Electrostático generado por una carga puntual q'.

Recordamos que

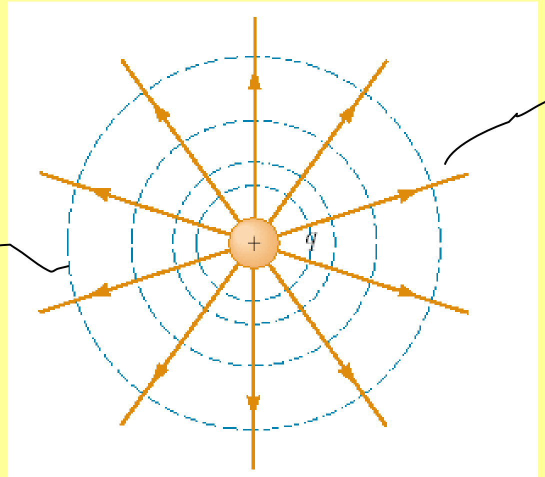
Campo eléctrico de una carga puntual ubicada en $\vec{r}'$

$$\vec{E}(\vec{r}) = K\,\frac{q}{||\vec{r}-\vec{r}'||^{3/2}}(\vec{r}-\vec{r}')$$

El potencial electrostático generado por una carga puntual q' ubicada en $\vec{r}'$

$$V(\vec{r}) = K\,\frac{q'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

Superficies equipotenciales

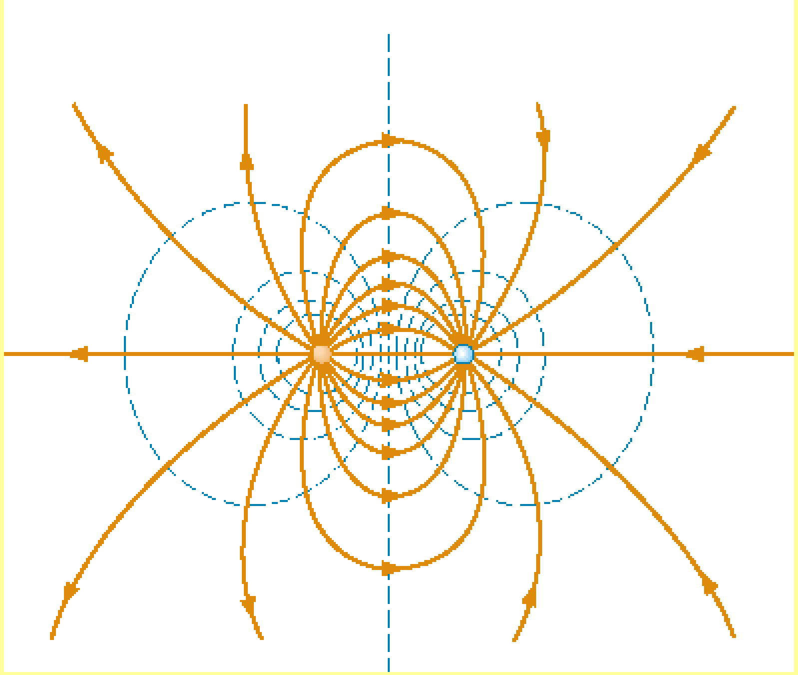


Campo eléctrico

Potencial Electrostático generado por un conjunto de cargas puntuales.

$$V(\vec{r}) = K \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i'}{||\vec{r} - \vec{r}_i'||}$$

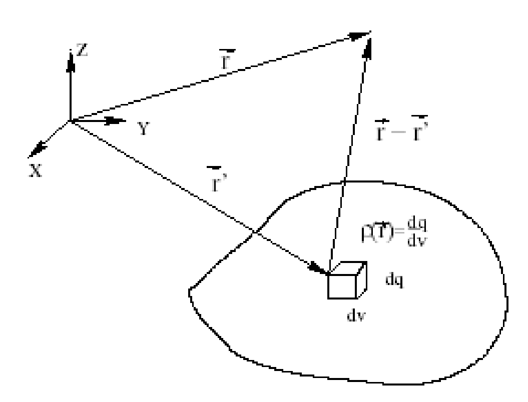
Ejemplo dos cargas puntuales de signos contrarios (dipolo eléctrico)

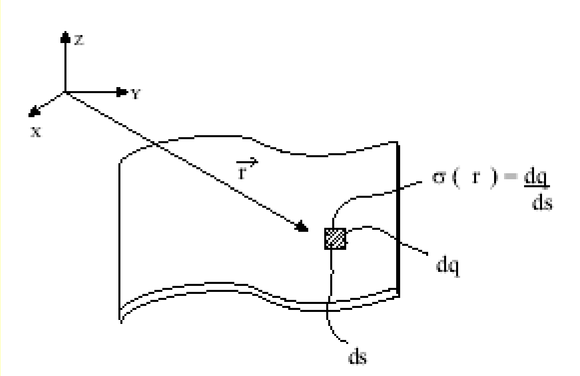


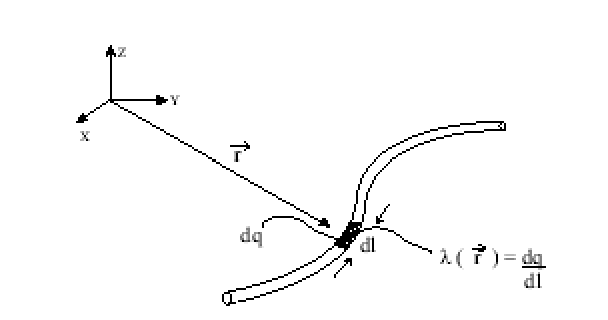
Potencial Eléctrico Generado por Distribuciones Continuas de Carga Eléctrica

En la electricidad clásica hablamos de cargas puntuales o cargas discretas y de distribución contínua de cargas, ya sea en un volumen, en una superficie o en una línea. Definimos:

- ρ la densidad de carga por unidad de volumen [C/m^3],
- σ la densidad de carga por unidad de área [C/m^2] y
- λ la densidad de carga por unidad de longitud [C/m].



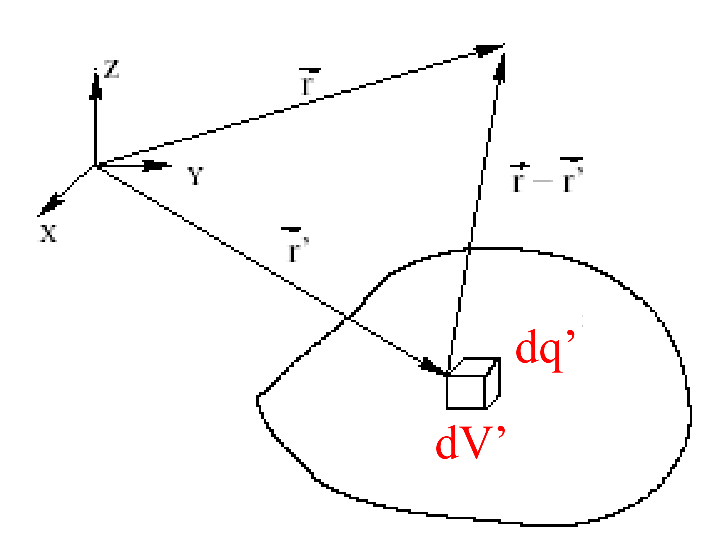




Cada una de estas distribuciones de carga generan un potencial eléctrico

El potencial eléctrico debido a cada una de estas distribuciones de carga puede considerarse como la sumatoria del potencial al que contribuyen las numerosas cargas puntuales que forman las distribuciones de carga.

Consideremos como ejemplo la siguiente distribución de carga volumétrica



Un elemento de volumen dV’ contendrá un elemento de carga dq’. Este elemento de carga generara un elemento de potencial eléctrico (diferencial de potencial eléctrico) dado por la siguiente expresión:

$$dV(\vec{r}) = K \frac{dq'}{||\vec{r} - \vec{r}'||}$$

Luego el potencial eléctrico total generado por la distribución será “la sumatoria” de estos diferenciales de potencial eléctrico

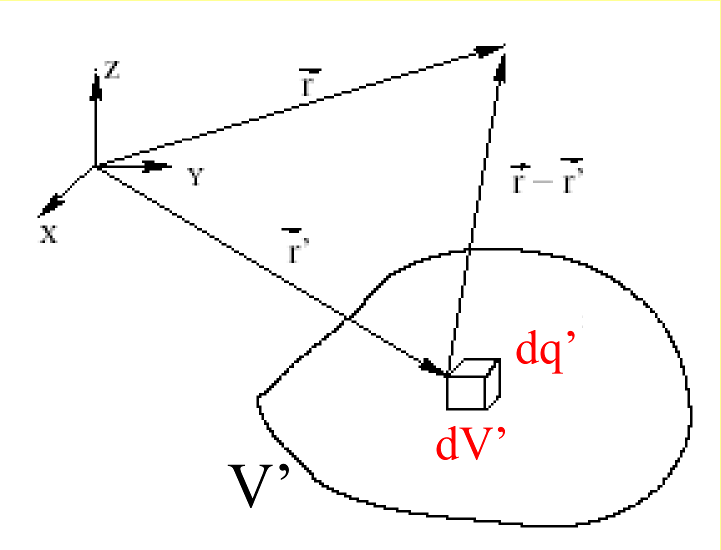
$$V(\vec{r}) = \int dV(\vec{r})$$

Luego para las diferentes distribuciones de carga tenemos

Distribución de carga volumétrica

$$dV(\vec{r}) = K\,\frac{dq'}{||\vec{r}-\vec{r'}||}$$

$$V(\vec{r}) = \int dV(\vec{r})$$



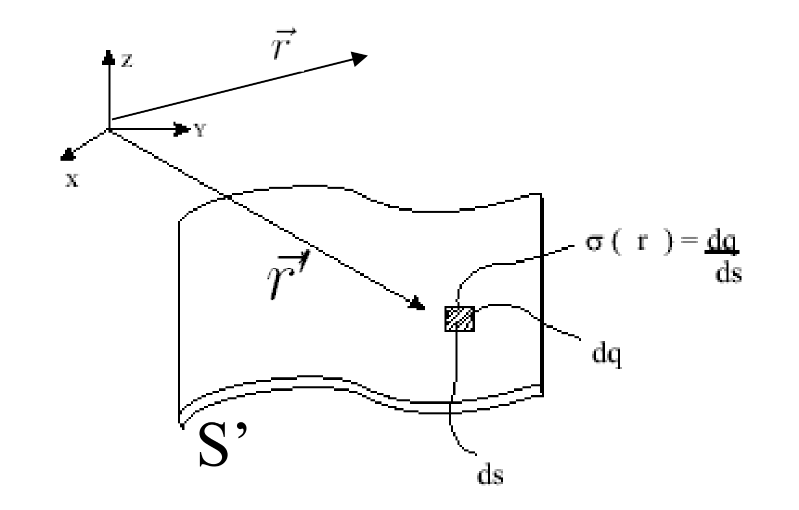
En este caso: $dq' = \rho(\vec{r'})d^3r'$

Donde $\vec{r'}$ es el vector posición de la carga dq'.
También hemos utilizado que dV' = d^3r'

Luego el potencial eléctrico para esta distribución será

$$\boxed{V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{V'}\frac{\rho(\vec{r'})}{||\vec{r}-\vec{r'}||}d^3r'}$$

Distribución de carga superficial



$$dV(\vec{r}) = K\frac{dq'}{||\vec{r}-\vec{r}'||}$$

$$V(\vec{r}) = \int dV(\vec{r})$$

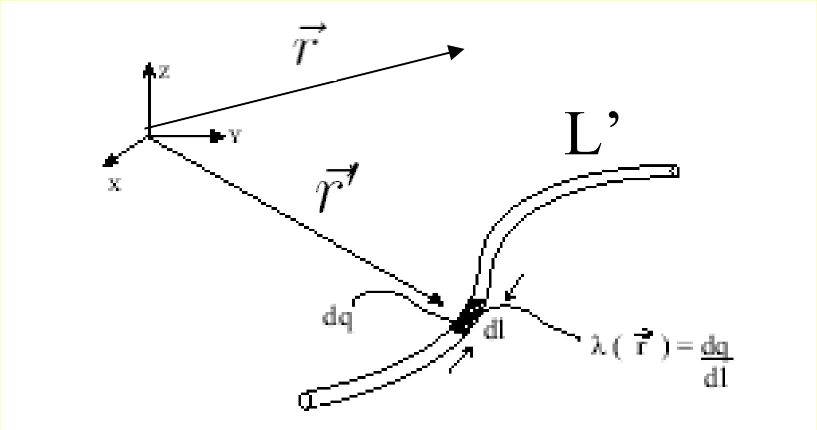
En este caso: $$dq' = \sigma(\vec{r}')d^2r'$$

Donde $\vec{r}'$ es el vector posición de la carga dq'.

Luego el potencial eléctrico para esta distribución será

$$\boxed{V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{S'}\frac{\sigma(\vec{r}')}{||\vec{r}-\vec{r}'||}d^2r'}$$

Distribución de carga lineal



$$dV(\vec{r}) = K\,\frac{dq'}{||\vec{r} - \vec{r}'||}$$

$$V(\vec{r}) = \int dV(\vec{r})$$

En este caso: $dq' = \lambda(\vec{r}')\,dr'$

Donde $\vec{r}'$ es el vector posición de la carga dq'.

Luego el Potencial eléctrico para esta distribución será

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{L'} \frac{\lambda(\vec{r}')}{||\vec{r} - \vec{r}'||}dr'$$

Ejemplo 1 (caso cargas puntuales)

Tres cargas iguales, de valor $-q$, se ubican en los vértices de un triángulo equilatero de lado a.

a) Calcular el potencial que sentiría una carga de prueba ubicada en el centro del triángulo.

b) Calcular el potencial que siente una de las partículas ubicadas en uno de los vértices, debido a las otras dos partículas (NOTA: es decir la contribución al potencial sobre la posición en que se encuentra una de las partículas debido a las otras dos partículas).

c) Calcular el potencial que generan cada una de las partículas en un punto ubicado en infinito.

d) Si una partícula de prueba q_0 ubicada inicialmente en el centro del triangulo se desplaza hasta infinito. ¿Cuánto sería la variación de potencial que ella experimenta?. ¿Cuánto seria la variación de *energía potencial* que ella experimenta?. ¿Cuánto sería el trabajo que hacen entonces las tres partículas de la configuración triangular sobre la carga q_0?.

Para más adelante

A)

Solución: La distancia entre los vértices y el centro es: $\frac{\sqrt{3}}{3}a$. Las tres cargas están a la misma distancia y tienen el mismo signo, por lo que contribuyen con el mismo valor del potencial. El potencial generado sobre la carga de prueba sería:

$$V = 3\frac{K(-q)}{(\frac{\sqrt{3}}{3}a)} = -\frac{9}{\sqrt{3}}\frac{Kq}{a}$$

B)

El potencial que siente una carga ubicada en un vértice se debe a las dos restantes partículas. Esto es:

$$V = 2\frac{K(-q)}{a} = -2\frac{Kq}{a}$$

C)

En el infinito cualquiera de las partículas genera un potencial nulo ya que $V_\infty = \frac{K(-q)}{\infty} = 0$.

Si la partícula se desplaza del centro hasta el infinito se tiene:

$$\begin{aligned}
\Delta V &= V_\infty - \left(-\frac{9}{\sqrt{3}}\frac{Kq}{a}\right) \\
&= \frac{9}{\sqrt{3}}\frac{Kq}{a} \\
\Delta U &= q_0 \Delta V = \frac{9}{\sqrt{3}}\frac{Kqq_0}{a} \\
W &= -\Delta U = -q_0 \Delta V = -\frac{9}{\sqrt{3}}\frac{Kqq_0}{a}
\end{aligned}$$

Ej. 2 (Distribución continua de carga)

Potencial generado por un anillo circular de radio a con distribución uniforme de carga λ_0 sobre su eje axial: Aqui se considera $dq = \lambda_0 dl = \lambda_0 a\, d\phi$, y se tiene $\vec{r} = z\hat{z}$, $\vec{r}' = a\hat{\rho}$, de donde $\|\vec{r} - \vec{r}'\| = \sqrt{a^2 + z^2}$. La integración es trivial

$$
\begin{aligned}
V(z) &= \int \frac{K dq'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{K \lambda_0 a\, d\phi}{\sqrt{a^2 + z^2}} \\
&= \frac{2\pi a K}{\sqrt{a^2 + z^2}}
\end{aligned}
$$

Si usamos que $\vec{E} = -\nabla V$ podemos reobtener el campo eléctrico a lo largo del eje axial.

Ver pizarra

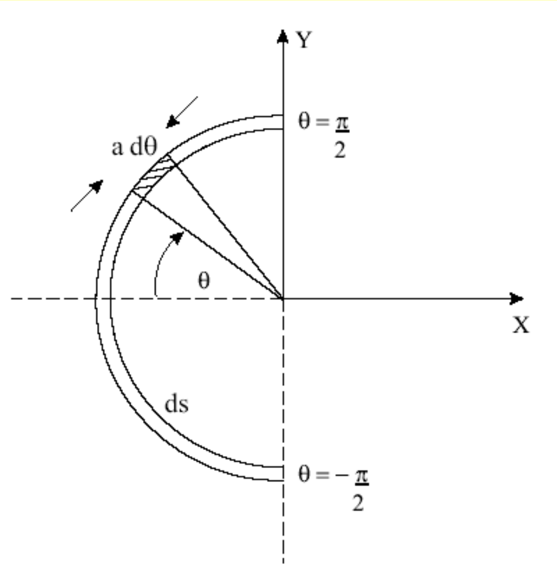
16-Un disco circular de radio a tiene una carga uniforme de ρ_s .Demuestre que el potencial en un punto de su eje situado h metros alejado de su centro es:

$$\phi = \frac{\rho_s}{2\varepsilon_0}[(h^2+a^2)^{1/2}-h]$$

Guía 4, TAREA

Ej. 3

Potencial generado por un segmento de cable curvo semicircular de radio a con densidad uniforme λ_0 sobre el centro del semicírculo:



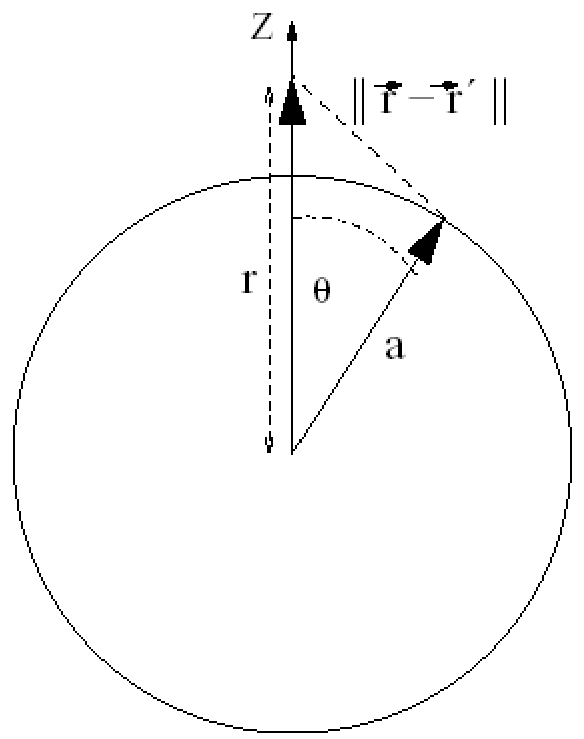
De acuerdo a la figura $\vec{r} = 0$ y $\vec{r}' = -a\cos\theta\hat{x} + a\sin\theta\hat{y}$. Se tiene $\|\vec{r}-\vec{r}'\| = a$. $dq = \lambda_0 dl = \lambda_0 a\, d\theta$. El potencial resulta:

$$\begin{aligned} V(z) &= \int \frac{Kdq'}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|} \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{K\lambda_0 a\, d\theta}{a} \\ &= \pi\lambda_0 K \end{aligned}$$

Aquí sólo se conoce el potencial en un punto de modo que no es posible aplicar $\vec{E} = -\nabla V$ para obtener el campo eléctrico en dicho punto.

Ej. 4

Potencial en todo el espacio generado por un cascarón esférico con densidad superficial uniforme Usamos coordenadas esféricas. Nos aprovechamos que el potencial tiene simetría esférica luego sólo depende de la variable r y no de la variable θ ni de la variable ϕ por lo que podemos escoger una posición conveniente de la posición: $\vec{r} = r\hat{z}$. La posición sobre la cual integramos es: $\vec{r}' = a\hat{r}$. Como sigue de la figura la distancia entre estos puntos satisface:



$$
\begin{aligned}
\|\vec{r} - \vec{r}'\| &= r^2 + r'^2 - 2\vec{r}\cdot\vec{r}' \\
&= r^2 + a^2 - 2ra\cos\theta
\end{aligned}
$$

La carga infinitesimal está dada por $dq = \sigma_0 dS = \sigma_0 a^2 \sin\theta\, d\theta\, d\phi$. Se tiene

$$
\begin{aligned}
V(r) &= \int \frac{K dq'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \\
&= \int \frac{K\sigma_0 dS}{\sqrt{r^2 + a^2 - 2ra\cos\theta}} \\
&= \int \frac{K\sigma_0 a^2 \sin\theta\, d\theta\, d\phi}{\sqrt{r^2 + a^2 - 2ra\cos\theta}} \\
&= K\sigma_0 a^2 \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin\theta\, d\theta\, d\phi}{\sqrt{r^2 + a^2 - 2ra\cos\theta}}
\end{aligned}
$$

Hacemos el cambio $u = r^2 + a^2 - 2ra\cos\theta$. Se tiene $du = 2ra\sin\theta\, d\theta$ de donde sigue:

$$
\begin{aligned}
V(r) &= \frac{2\pi K\sigma_0 a^2}{2ra}\int \frac{du}{\sqrt{u}} \\
&= \frac{2\pi K\sigma_0 a}{r}\int \frac{du}{2\sqrt{u}} \\
&= \frac{2\pi K\sigma_0 a}{r}\left[\sqrt{u}\right] \\
&= \frac{2\pi K\sigma_0 a}{r}\left[\sqrt{r^2+a^2-2ra\cos\theta}\right]\Big|_0^\pi \\
&= \frac{2\pi K\sigma_0 a}{r}\Big[\sqrt{r^2+a^2+2ra} \\
&\quad -\sqrt{r^2+a^2-2ra}\Big] \\
&= \frac{2\pi K\sigma_0 a}{r}\left(\sqrt{(r+a)^2}-\sqrt{(r-a)^2}\right) \\
&= \frac{2\pi K\sigma_0 a}{r}\left(|r+a|-|r-a|\right) \\
&= \begin{cases} \frac{2\pi K\sigma_0 a}{r}(2a) & r > a \\ \frac{2\pi K\sigma_0 a}{r}(2r) & r < a \end{cases}
\end{aligned}
$$

y finalmente

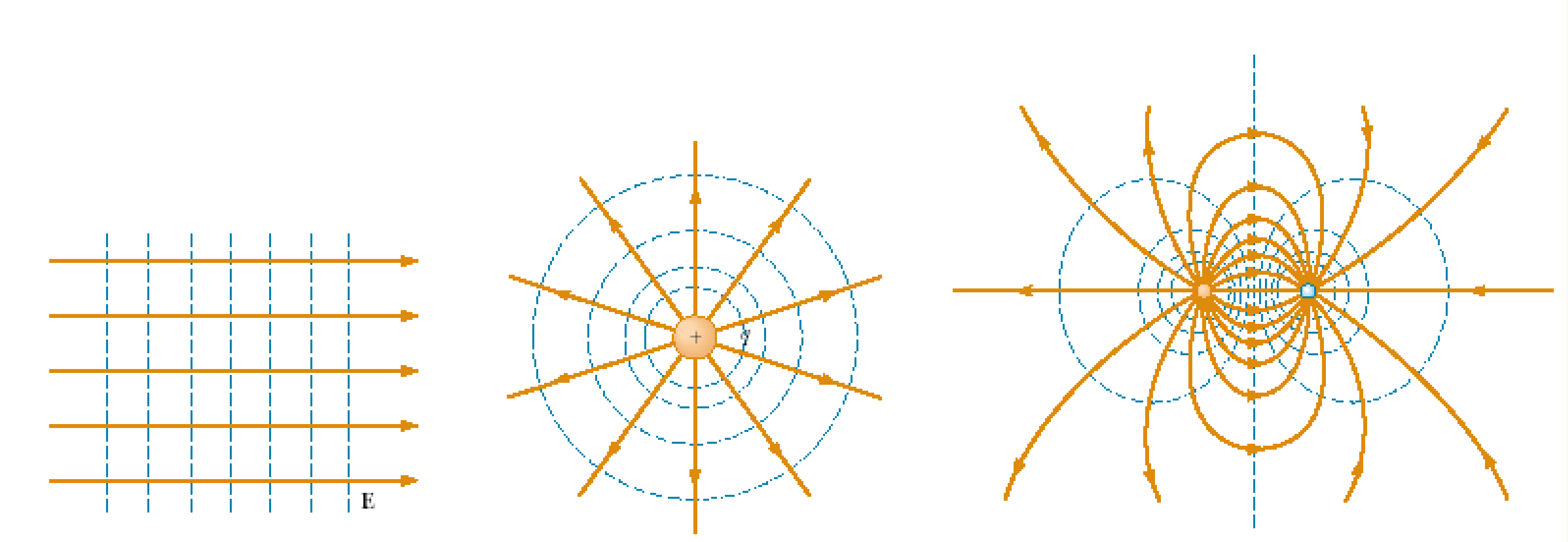
$$V(r) = \begin{cases} \frac{4\pi K\sigma_0 a^2}{r} = KQ/r & r > a \\ 4\pi K\sigma_0 a = KQ/a & r < a \end{cases}$$

Observemos que este resultado muestra que afuera del cascarón el potencial se comporta igual que el potencial de una ésfera puntual cuya carga total $Q = \sigma_0 4\pi a^2$ estuviera concentrada en el origen del sistema de coordenadas. Por otro lado en el interir del cascarón se tiene que el potencial resulta constante.

Campo eléctrico dentro y fuera del cascarón esférico: Una consecuencia importante del resultado anterior es que el campo eléctrico en el interior del cascarón es nulo ya que $\vec{E} = -\nabla V = 0$, mientras que afuera se tiene $\vec{E} = -\nabla V = -\frac{\partial V(r)}{\partial r} = \frac{KQ}{r^2}\hat{r}$. En resumen:

$$\vec{E}(r) = \begin{cases} \frac{KQ}{r^2}\hat{r} & r > a \\ 0 & r < a \end{cases}$$

Relación entre el Potencial Electrostático y el Campo Eléctrico

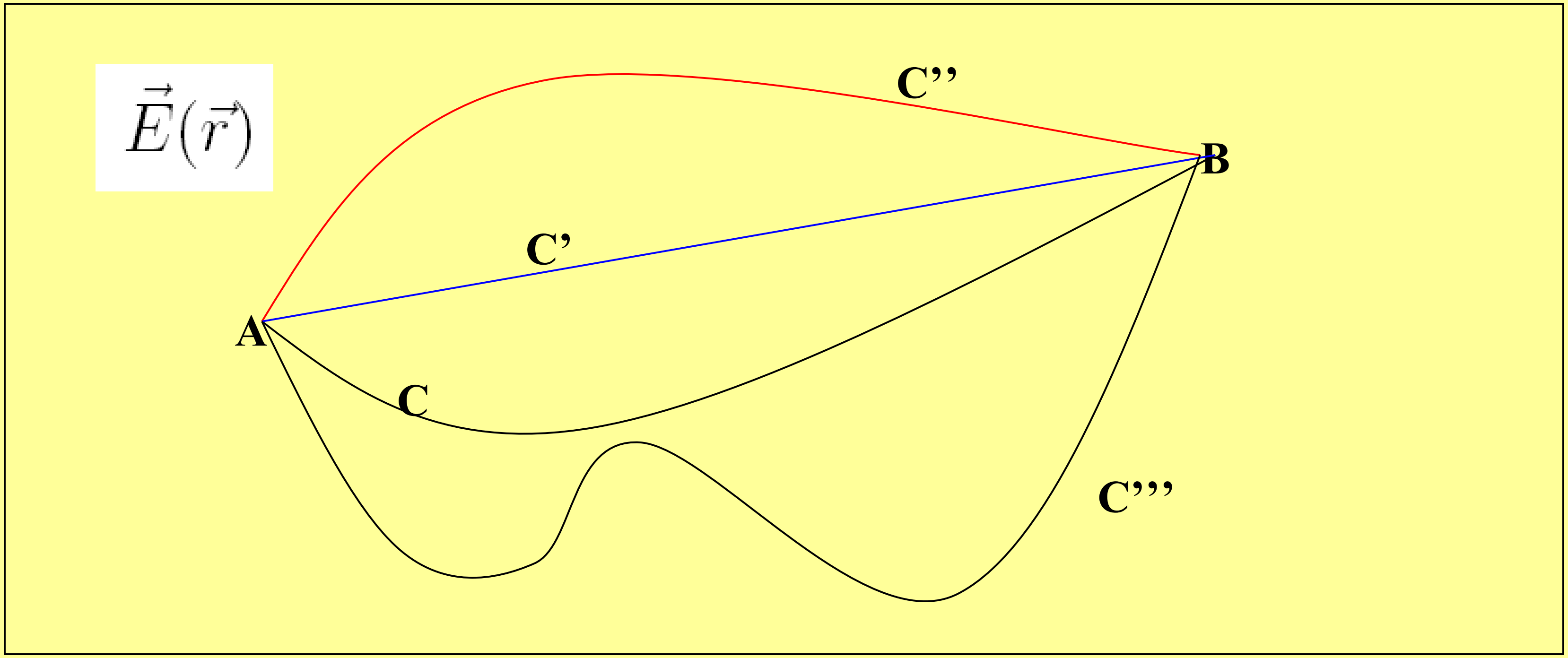


Podemos notar que el campo eléctrico es ortogonal a las superficies de igual potencial.

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} V(\vec{r})$$

Ver pizarra y apuntes de cálculo vectorial

Es posible demostrar que el Potencial Electrostático y el Campo Eléctrico satisfacen la siguiente relación



$$V(B) - V(A) = -\underset{C}{\int_{A}^{B}} \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

Ver diagramas anteriores y comentar

rescribiendo esta expresión para despejar V_B se puede obtener otro importante resultado:

$$V(B) = V(A) - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

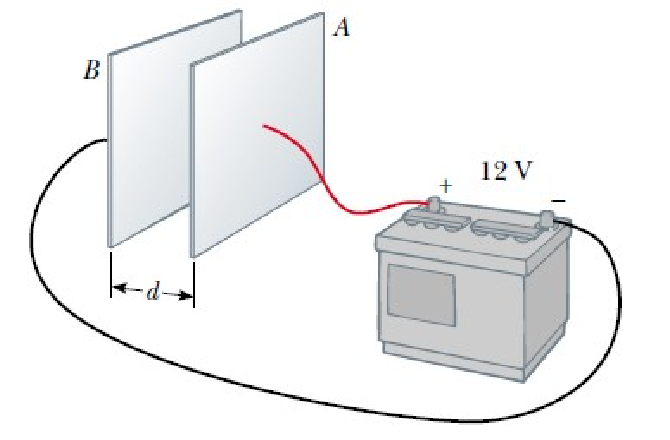
Si el punto inicial A corresponde a una posición $\vec{r}_0$ y el punto final B a una posición cualquiera $\vec{r}$ se obtiene:

$$V(\vec{r}) = V_0 - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

que nos permite calcular el potencial en el punto $\vec{r}$ del espacio si conocemos el campo eléctrico en un camino que nos lleve de $\vec{r}_0$ a $\vec{r}$.

El valor $V_0 = V(\vec{r}_0)$ es, en general, un potencial de referencia respecto del cual se mide el potencial en otros puntos del espacio. Se acostumbra escoger $V_0 = 0$ en $\vec{r}_0 = \infty$.

Ejemplo 1: Una batería produce una diferencia de potencial de 12 V entre dos placas conductoras planas y paralelas, conectadas a los terminales de la batería (ver dibujo). Si la separación de las placas es d = 0.30 cm, y si asumimos que al campo eléctrico entre las placas es uniforme (esta simplificación es razonable si la separación entre las placas es pequeña comparada con el tamaño de las placas). Determine el valor del campo eléctrico entre las placas.



Ejemplo 2: Considere dos cascarones esféricos conductores uno de radio a y el otro de radio b, donde (b > a). Estos cascarones se conectan a una batería de modo que entre ellos existe una diferencia de potencia de ΔV.

a) Determine el valor del campo eléctrico entre las placas.

b) Determine el valor de la carga inducida en el cascarón de radio a.

Ver ejemplos Guía

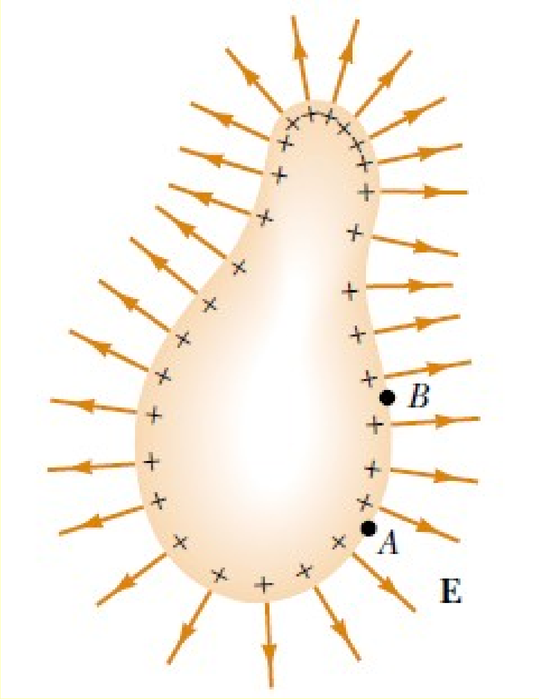
1- Se tiene una esfera maciza no conductora de radio a y carga total Q distribuida uniformemente en ella.

a) Determine el valor del campo eléctrico $\vec{E}(\vec{r})$ en todo el espacio generado por esta esfera cargada.

b) Determine el valor del potencial electrostático en todo el espacio. Asuma que el potencial en infinito vale cero.

b) Calcule el trabajo que se debe hacer para llevar una carga q desde el infinito hasta el centro de esta esfera no conductora.

Potencial Electrostático debido a materiales conductores cargados



Como hemos mencionado en las clases pasadas, en equilibrio electrostático el campo eléctrico en el interior de un material conductor es nulo.
Esto implica que en todo el material conductor el potencial electrostático es constante (ver pizarra)

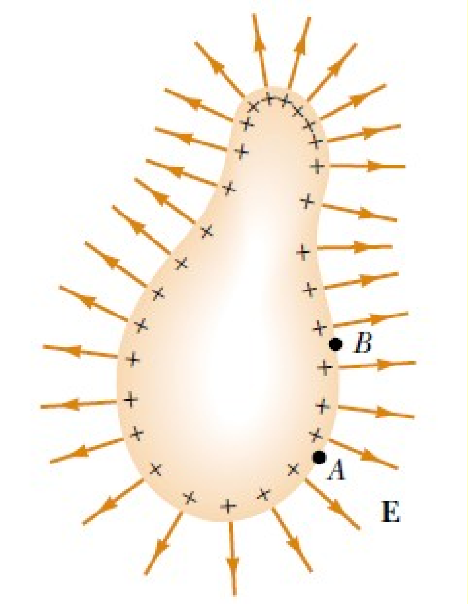
$$V(B) - V(A) = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

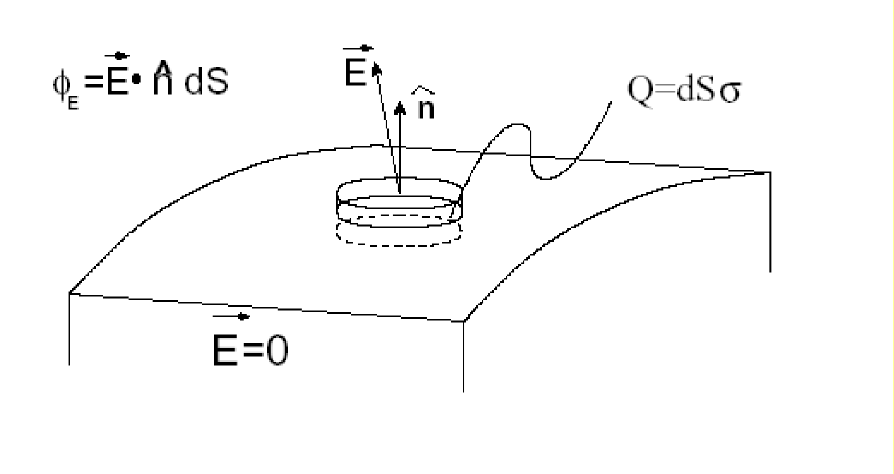
En este caso V(B) = V(A)

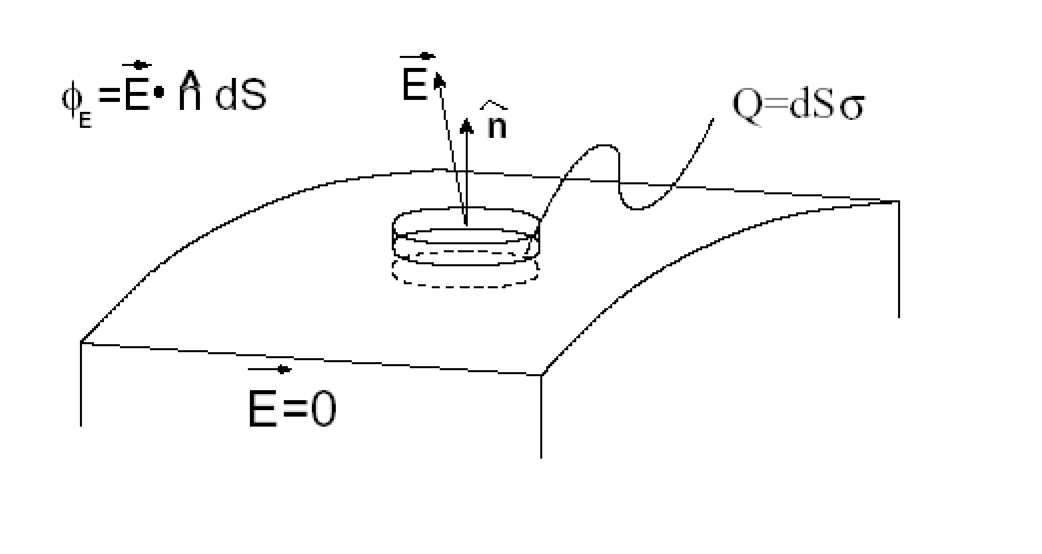
En particular la superficie del material conductor es una superficie equipotencial, por lo tanto el campo eléctrico cerca de la superficie exterior del material conductor es perpendicular a ella. Recordemos, además, que la carga neta en el material conductor está en su superficie exterior.

Densidad de carga en la superficie de un conductor de forma arbitraria

Si consideramos un punto cualquiera de la superficie de un conductor de forma cualquiera es posible probar, usando el Teorema de Gauss aplicado a un pequeño cilindro que contiene dicho punto en la superficie (ver figura), que la componente normal $E_n = \vec{E} \cdot \hat{n}$ a la superficie del campo eléctrico en dicho lugar se relaciona directamente con la densidad de carga en dicha parte de la superficie







$$
\begin{aligned}
\vec{E} \cdot \hat{n} \Delta S &= \frac{\sigma \Delta S}{\varepsilon_0} \\
E_n &= \frac{\sigma}{\varepsilon_0}
\end{aligned}
$$

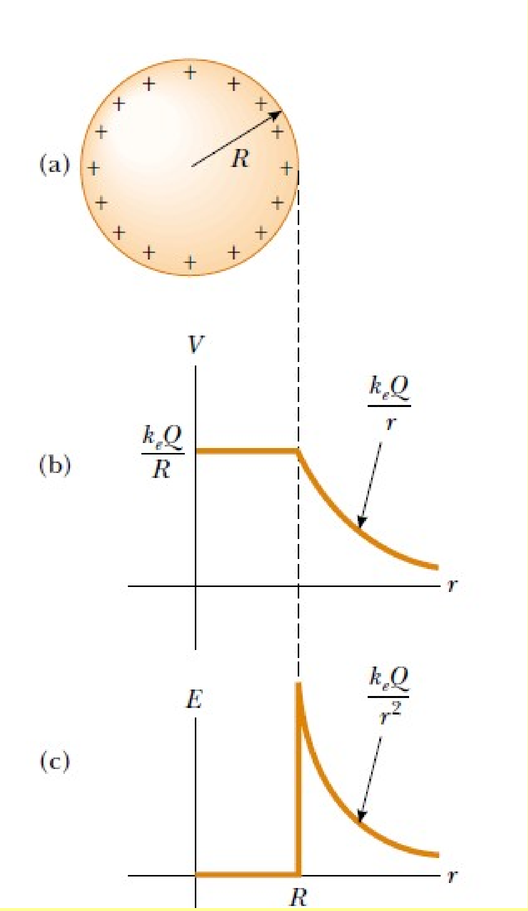
donde hemos usado que el cilindro es mucho menos alto que ancho de manera que el flujo por el manto resulta nulo en el límite que el alto del cilindro va a cero.

Más adelante veremos que en la superficie de un conductor, no hay componente tangencial del campo eléctrico. Es decir el campo eléctrico es perfectamente perpendicular (o normal) a la superficie del conductor y luego la intensidad de este es $E_{sup} = E_n$. Otro punto que es importante observar aquí que esto vale localmente en cada punto de la superficie, es decir $\sigma = \sigma(\vec{r})$, y luego el campo en cada punto de la superficie depende del valor de la densidad de carga allí:

$$\vec{E}_{sup}(\vec{r}) = \frac{\sigma(\vec{r})}{\varepsilon_0}\hat{n}$$

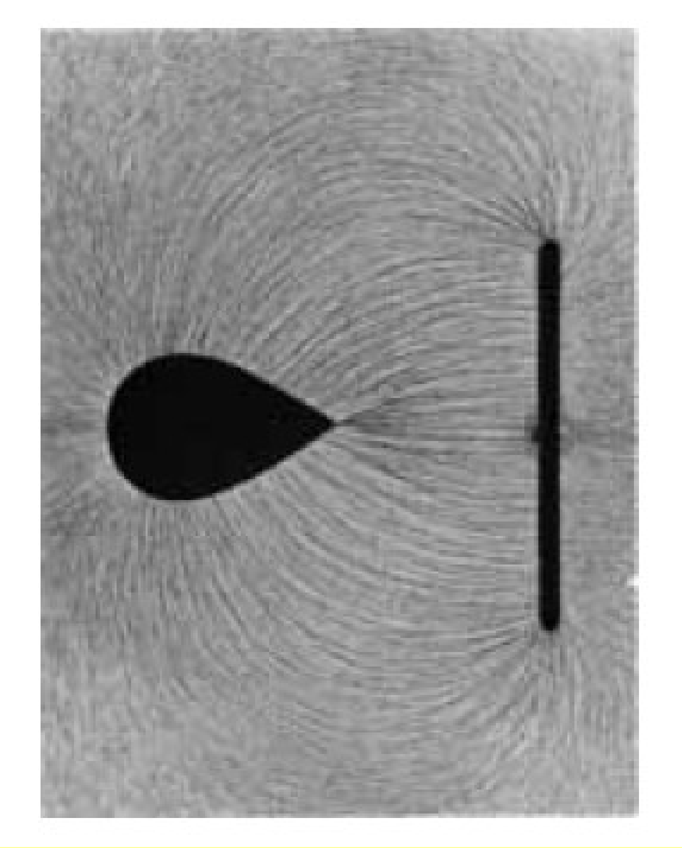
Valor del campo eléctrico cerca de la superficie de un material conductor cargado

Ejemplo: Calcule el campo eléctrico y el potencial electrostático de una esfera conductora de radio R y carga neta Q.



El Efecto Punta

Cuando un conductor esférico es cargado con carga neta Q esta se distribuye en forma homogénea sobre su superficie (ver ejemplo anterior). Sin embargo si el conductor no es esférico (como en la figura de abajo) entonces la densidad de carga superficial es mayor donde el radio de curvatura del objeto es menor y la superficie es convexa (en las puntas). Por otro lado la densidad de carga es menor en los lugares donde el radio de curvatura es mayor y donde el radio de curvatura es pequeño pero la superficie es cóncava.



Como el campo eléctrico fuera del material conductor es proporcional a la densidad superficial de carga

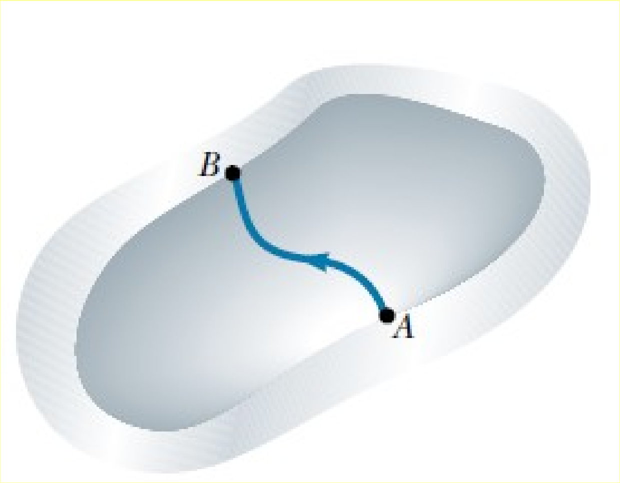
$$\vec{E}_{sup}(\vec{r}) = \frac{\sigma(\vec{r})}{\varepsilon_0}\hat{n}$$

Tenemos que el campo eléctrico es intenso cerca de puntos convexos donde el radio de curvatura sea pequeño y en particular alcanza valores muy altos en las puntas.

Averigüe que son las descargas tipo corona!!!

Materiales conductores con huecos interiores

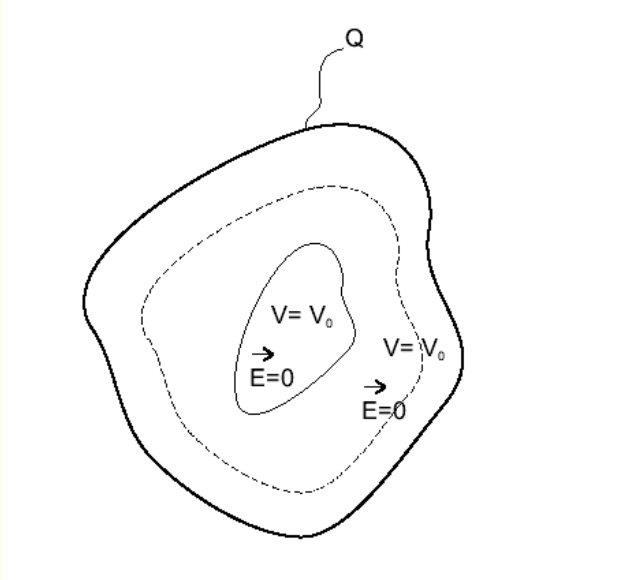
Conductor hueco, de forma arbitraria, cargado.



Utilizando la relación:

$$V(B) - V(A) = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

En este caso V(B) = V(A)



Podemos fácilmente convencernos de que el campo eléctrico en el hueco debe ser nulo y que por lo tanto el potencial electroestático en el hueco es constante y tiene el mismo valor que el potencial en el interior del material conductor (Ver pizarra). Lo cual implica que la carga neta del conductor se va a la superficie exterior de este.

Fin