Campos Electromagnéticos
Guía 4

Ingeniería Civil en Automatización
Profesor: Pedro Labraña.

Pregunta 1: Derivación parcial

a) Calcule las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$ de las funciones:

$$
\begin{aligned}
f(x,y,z) &= kxyz \\
f(x,y,z) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\
f(x,y,z) &= \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}}
\end{aligned}
$$

b) Calcule las derivadas parciales (coordenadas cilíndricas) $\frac{\partial f}{\partial \rho}$, $\frac{\partial f}{\partial \phi}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$ de las funciones:

$$
\begin{aligned}
f(\rho,\phi,z) &= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln(\rho_0/\rho) \\
f(\rho,\phi,z) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{\sqrt{\rho^2+z^2}} \\
f(\rho,\phi,z) &= \frac{\lambda a}{2\pi\epsilon_0}\frac{\cos\phi}{\rho^2}
\end{aligned}
$$

c) Calcule las derivadas parciales (coordenadas esféricas) $\frac{\partial f}{\partial r}$, $\frac{\partial f}{\partial \phi}$, $\frac{\partial f}{\partial \theta}$ de las funciones:

$$
\begin{aligned}
f(r,\phi,\theta) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r} \\
f(r,\phi,\theta) &= -E_0\left(\frac{a^3}{r^2}-r\right)\cos\theta \\
f(r,\phi,\theta) &= \frac{Qa}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{\sqrt{d^2+r^2-2dr\cos\theta}}
\end{aligned}
$$

Pregunta 2: Gradiente

a) Considere la distancia $u = |\vec{r}-\vec{r}_i|$. En que $\vec{r}_i$ es un vector fijo en el espacio ($\vec{r}_i = x_i\hat{x} + y_i\hat{y} + z_i\hat{z}$), y $\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$ es el vector de posición usual (el vector variable). Calcule $\vec{\nabla}u$ y muestre que este resulta

$$\vec{\nabla}u = \vec{\nabla}(|\vec{r}-\vec{r}_i|) = \frac{\vec{r}-\vec{r}_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|}$$

(NOTA: use coordenadas cartesianas y reescriba al final su resultado en termino de la diferencia vectorial $\vec{r}-\vec{r}_i$).

b) En los cálculos de a continuación será util el siguiente resultado

$$\nabla f = f'(u)\,\nabla u$$

válido para una función $f(u)$ de la distancia $u = |\vec{r}-\vec{r}_i|$ y donde para $\vec{\nabla}u$ se debe usar su resultado en (i) .

- $\vec{\nabla}(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_i|})$
- $\vec{\nabla}(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_i|^3})$
- $\vec{\nabla}(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_i|^n})$
- $\vec{\nabla}\ln(|\vec{r}-\vec{r}_i|)$

Nota: Preguntas 1-2 gentileza de D. Risso.

Pregunta 3:

El vector unitario normal a la superficie $\phi(\vec{r}) = Cte.$ es:

$$\hat{n} = \frac{\vec{\nabla}\phi}{|\vec{\nabla}\phi|}$$

a) Encuentre $\hat{n}$ para la esfera e interprete:

$$\phi(\vec{r}) = a(x^2 + y^2 + z^2)$$

b) Encuentre $\hat{n}$ para el elipsoide:

$$\phi(\vec{r}) = ax^2 + by^2 + cz^2$$

Pregunta 4:

De la definición del operador "Nabla" $\vec{\nabla}$ obtenga una expresión para $\vec{\nabla} \cdot \vec{F}(\vec{r})$ en coordenadas cilíndricas.

Pregunta 5:

a) Encuentre la divergencia del campo vectorial:

$$\vec{A} = (x^2 + xy)\hat{i} + (y^2 + zx)\hat{j} + (z^2 + xy)\hat{k}$$

b) Encuentre también el rotor de $\vec{A}$.

Pregunta 6:

Si $\vec{r}$ es un vector que va desde el origen al punto (x, y, z), demustre las formulas:

$$i) \;\; \vec{\nabla} \cdot \vec{r} = 3$$

$$ii) \;\; \vec{\nabla} \times \vec{r} = 0$$

$$iii) \;\; (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{r} = \vec{u}$$

Nota: $\vec{u}$ es un vector arbitrario.

Pregunta 7:

Si r es la magnitud del vector que va desde el origen al punto (x, y, z) y $f(r)$ es una función arbitraria de r, demuestre que (puede usar los resultados de la pregunta 2):

$$\vec{\nabla} f(r) = \frac{\vec{r}}{r}\frac{df}{dr}$$

$$\vec{\nabla} f(r) \times [f(r)\vec{r}] = 0$$

Pregunta 8: Teorema de Green

Usando el teorema de la divergencia demuestre la siguiente identidad:

$$\int_V \left(\Psi\nabla^2\phi - \phi\nabla^2\Psi\right) dV = \oint_S \left(\Psi\vec{\nabla}\phi - \phi\vec{\nabla}\Psi\right)\cdot\hat{n}\, ds$$

Se sugiere que utilise el siguiente campo vectorial para demostrar la identidad de Green $\vec{F} = \Psi\vec{\nabla}\phi - \phi\vec{\nabla}\Psi$.