Física II, Ondas
Clase 3

Profesor: Pedro Labraña
Departamento de Física,
Universidad del Bío-Bío

Carrera: Ingeniería Civil en Informática
Créditos: 5

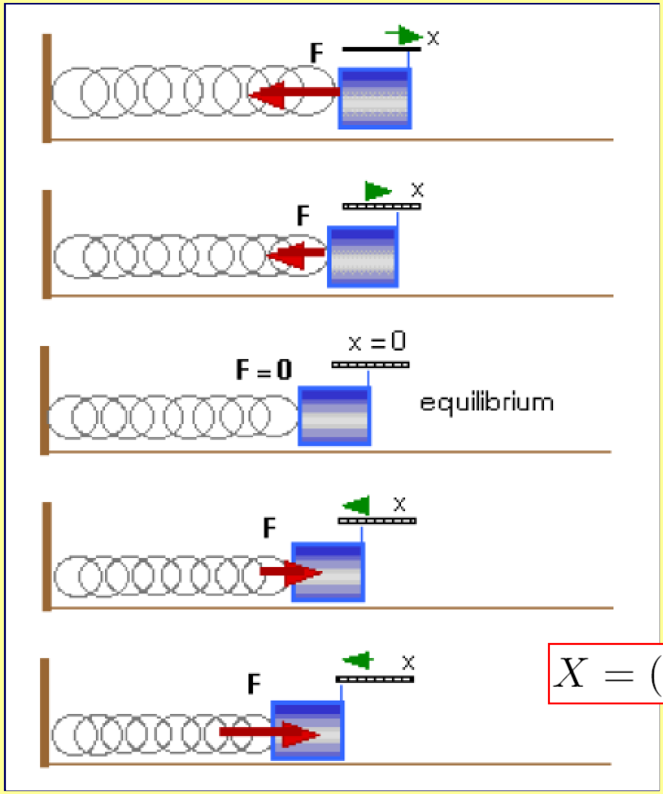
Movimiento Oscilatorio

Conceptos Básico, El Oscilador Armónico Simple, Movimiento Armónico Simple, Consideraciones de Energía en el Movimiento Armónico Simple

Clase anterior

El Oscilador Armónico Simple

Un ejemplo de oscilador armónico simple es una partícula de masa m fija a un resorte de constante k.



$X = (x - l_0)$

Por simplicidad supondremos que la masa y el resorte están sobre una superficie horizontal sin roce. Si el resorte tiene un largo natural l_0. Entonces tenemos que la fuerza que ejerce el resorte sobre la masa m está dada por:

$$F_r = -k\,(x - l_0)$$

Ley de Hooke

x = l_0 Posición de equilibrio para la masa m

Definimos: $\omega_0 \equiv \sqrt{\frac{k}{m}}$ Frecuencia angular

Luego la ecuación del oscilador armónico simple queda:

$$\frac{d^2X}{dt^2} + \omega_0^2 X = 0 \quad (*)$$

La idea es determinar cuanto vale la función X(t)

$$X(t) = ?$$

Es posible demostrar que una solución general de esta ecuación es la siguiente

$$X(t) = A\,Cos(w_0\,t + \delta)$$

Donde

$$A = Cte.$$

$$\delta = Cte.$$

Demostración (Ver la pizarra)

Son constantes por determinar.
Constantes arbitrarias.

Significado físico de las constantes

$$\boxed{\omega_0 \equiv \sqrt{\frac{k}{m}}}$$

Determinada por el sistema

$$\boxed{A = Cte.}$$

$$\boxed{\delta = Cte.}$$

Comstantes libres (no determinadas por la ecuación)

Relevancia física de la frecuencia angular

$$\omega_0 \equiv \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Recordemos que X(t) mide el desplazamiento de la masa m desde su punto de equilibrio. Ahora, ya que resolvimos la ecuación del movimiento armónico simple, sabemos como es esta función X(t)

$$X(t) = A\,Cos\left(w_0\,t + \delta\right)$$

En particular podemos notar que esta función es periódica

$$X(t + \frac{2\pi}{\omega_0}) = A\,Cos\left[w_0\,(t + \frac{2\pi}{\omega_0}) + \delta\right] = A\,Cos\left[w_0\,(t) + \delta + 2\pi\right]$$

$$= A\,Cos\left(w_0\,t + \delta\right) = X(t)$$

Por lo tanto la función X(t) es una función periódica con periodo T

$$X(t + T) = X(t)$$

Donde el periodo está dado por

$$T = \frac{2\pi}{w_0}$$

Luego $$T = \frac{2\pi}{w_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Luego todos los movimientos que son solución de la ecuación (*) tiene el mismo periodo de oscilación y este queda determinado sólo por la masa m de la partícula que vibra y por la constante del resorte k.

No depende de la amplitud del movimiento, no depende de la velocidad con que soltaron la masa, no depende del color del resorte, no depende de la temperatura, no depende de ......

La frecuencia del oscilador viene dada por: $$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega_o}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

Por lo tanto: $$\omega_o = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\,\nu$$

Lo que justifica el nombre de frecuencia angular para w

Verificamos las unidades

$$[w_o^2] = [\frac{k}{m}] = \frac{\text{Newton}/\text{metro}}{\text{Kg}} = \frac{\text{Kg metro}/\text{seg}^2/\text{metro}}{\text{Kg}} = \frac{1}{\text{seg}^2}$$

Todo bien

$$\omega_o = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\,\nu$$

Significado físico de la constante A

A es la amplitud del movimiento de la masa m. A tiene unidades de longitud ([Metros])

Significado físico de la constante δ

Esta constante se denomina constante de fase y no tiene unidades. Sirve para que la solución general X(t) satisfaga las condiciones iniciales.

La amplitud A y la constante de fase quedan determinadas por la posición y velocidad iniciales de la partícula de masa m.

Elongación, velocidad, y aceleración en un movimiento armónico simple

Elongación = Desplazamiento respecto del punto de equilibrio

$$X(t) = A\,Cos(w_0\,t + \delta)$$

Máximo desplazamiento A

Velocidad de la masa m:

$$V = V(t) = \frac{dX}{dt} = -A\,\omega_0\,Sen(w_0\,t + \delta)$$

Máxima velocidad

$$A\,\omega_0$$

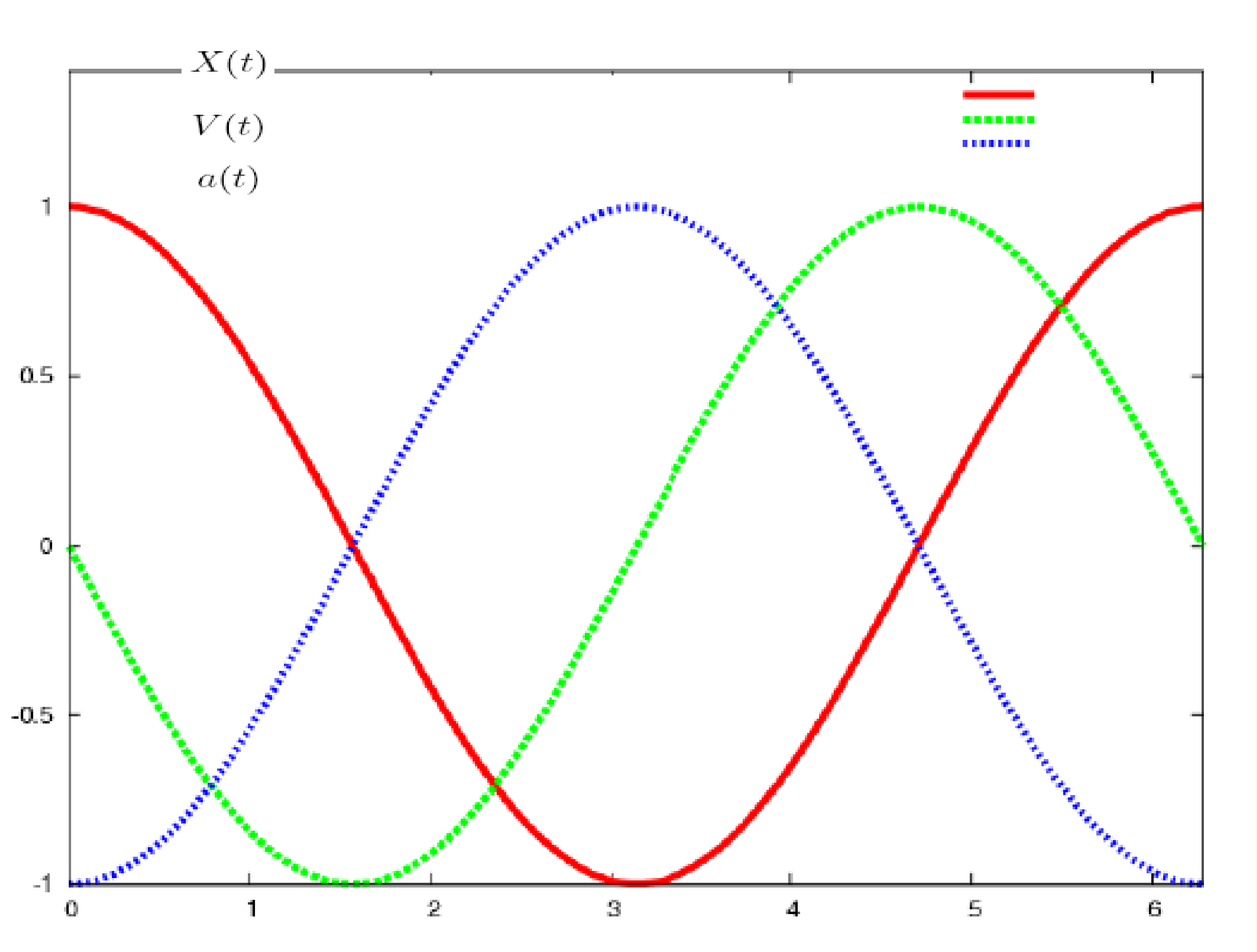
Aceleración de la masa m:

$$a = a(t) = \frac{d^2X}{dt^2} = -A\,\omega_0^2\,Cos(w_0\,t + \delta)$$

Máxima aceleración

$$A\,\omega_0^2$$

(Ver animación)



Caso A= 1 y $\delta = 0$

Por lo tanto podemos predecir cual va a ser la posición, la velocidad y la aceleración de la masa m para todo tiempo t.

Cuando la elongación es máxima entonces la rapidez es cero y la aceleración es máxima pero apunta en sentido contrario a la elongación

Cuando la elongación es cero entonces la rapidez es máxima y la aceleración es cero.

¿cuánto vale la fuerza cuando X=0?

¿cuánto vale la fuerza cuando la elongación es máxima?

Determinación de las constantes A y δ (parte I)

Recordemos que la solución X(t) es una solución general que describe todo posible movimiento de una masa m unida a un resorte de constante k. Esto es posible debido a las dos constantes arbitrarias que la solución X(t) posee. Luego para describir un movimiento particular con nuestra solución X(t) debemos determinar las constante A y δ .

Para determinarlas usamos las condiciones iniciales. Esto es la información de cuanto vale X(t=0) y cuanto vale v(t=0). Esta información es un dato del problema, es decir "alguien" debe proporcionarnos esa información.

Si queremos predecir el movimiento de la masa m para todo t, entonces alguien debe darnos todos los datos del movimiento (X, v) de m en un tiempo dado t_0. Típicamente consideraremos $t_0 = 0$

A esto denominamos condiciones iniciales

Condiciones iniciales

$$X(t) = A\,Cos(w_0\,t + \delta)$$

$(t_0 = 0)$

$$V = V(t) = \frac{dX}{dt} = -A\,\omega_0\,Sen(w_0\,t + \delta)$$

Para nosotros la velocidad V(0) inicial y la posición inicial X(0) de m serán dos datos conocidos

Luego de las siguientes dos ecuaciones podemos despejar cuanto valen las constantes A y δ

$$X(0) = A\,Cos(\delta)$$

$$V(0) = -A\,\omega_0\,Sen(\delta)$$

Ej. 1 Si en t = 0 la masa es desplazada una distancia 1m y soltada desde el reposo. ¿Cuánto valen las constantes A y δ

(Ver problemas de la guía)

Fin