Física II, Ondas

Descripción Matemática del Movimiento Periódico No Armónico IV

Profesor: Pedro Labraña
Departamento de Física,
Universidad del Bío-Bío

Carrera: Ingeniería Civil en Informática
Créditos: 5

Descripción Matemática del Movimiento Periódico No Armónico

El péndulo no lineal. Fasores. Descripción de un movimiento periódico no armónico mediante las Series de Fourier. ***<u>Serie de Fourier real. Serie de Fourier Compleja.</u>*** *Transformada de Fourier.*

Clase anterior

Serie de Fourier real

Este tipo de representación se denomina **serie de Fourier** y el caso más general (para una función que no es par ni impar) es:

$$f(\theta) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\theta) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\theta)$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\, d\theta$$

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\, \cos(m\theta)\, d\theta$$

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\, \sin(m\theta)\, d\theta$$

Serie de Fourier compleja

$$f(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} c_n\, e^{in\theta}$$

$$c_m = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{2\pi} e^{-im\theta}\, f(\theta)\, d\theta$$

Funciones con periodo 2π

Función periódica de periodo arbitrario

Hasta aquí hemos supuesto que la función tiene periodo 2π. En el caso que la función tenga periodo T, hacemos en las expresiones anteriores el cambio de variable $\theta \to t$ mediante $\theta = 2\pi t/T$ y se obtiene:

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{2\pi n}{T} t} \\
c_n &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x)\, e^{-\frac{2\pi n}{T} t}\, dt
\end{aligned}
$$

Las cantidades

$$
w_n = \frac{2\pi n}{T} \qquad n = \ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots
$$

se denominan frecuencias de Fourier. Todas ellas son múltiplos de una frecuencia fundamental $w = 2\pi/T$. Es decir $w_n = nw$. Estos multiplos se denominan frecuencias armónicas.

Asociada a cada una de estas frecuencias está la amplitud compleja c_n. Esta amplitud $c_n = 1/2(a_n - ib_n)$. contiene tanto información acerca de la magnitud de la amplitud $\|c_n\| = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ como el desfasaje $\delta_n = \arctan(b_n/a_n)$.

Serie de Fourier real para una función de periodo arbitrario T

De manera análoga al caso de la serie de Fourier compleja podemos encontrar la serie de Fourier real de una función de periodo arbitrario T.

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, Cos\Big[\Big(\frac{2\pi}{T}n\Big)\,t\Big] + \sum_{n=1}^{\infty} b_n\, Sen\Big[\Big(\frac{2\pi}{T}n\Big)\,t\Big]$$

Donde los coeficientes se calculan de la siguiente manera

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\, dt$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\ Cos\Big[\Big(\frac{2\pi}{T}n\Big)\,t\Big]\, dt$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\ Sen\Big[\Big(\frac{2\pi}{T}n\Big)\,t\Big]\, dt$$

Espectro de frecuencia de una función periódica

Hemos visto que una función periódica cualquiera resulta de la superposición de varias frecuencias. Por ejemplo para el caso $f(\theta) = \cos^3\theta$, se obtiene que los coeficientes de Fourier complejos resultan:

$$
\begin{aligned}
c_{-3} &= 1/8 \\
c_{-1} &= 3/8 \\
c_{3} &= 1/8 \\
c_{1} &= 3/8
\end{aligned}
$$

Gráficamente se tendría:

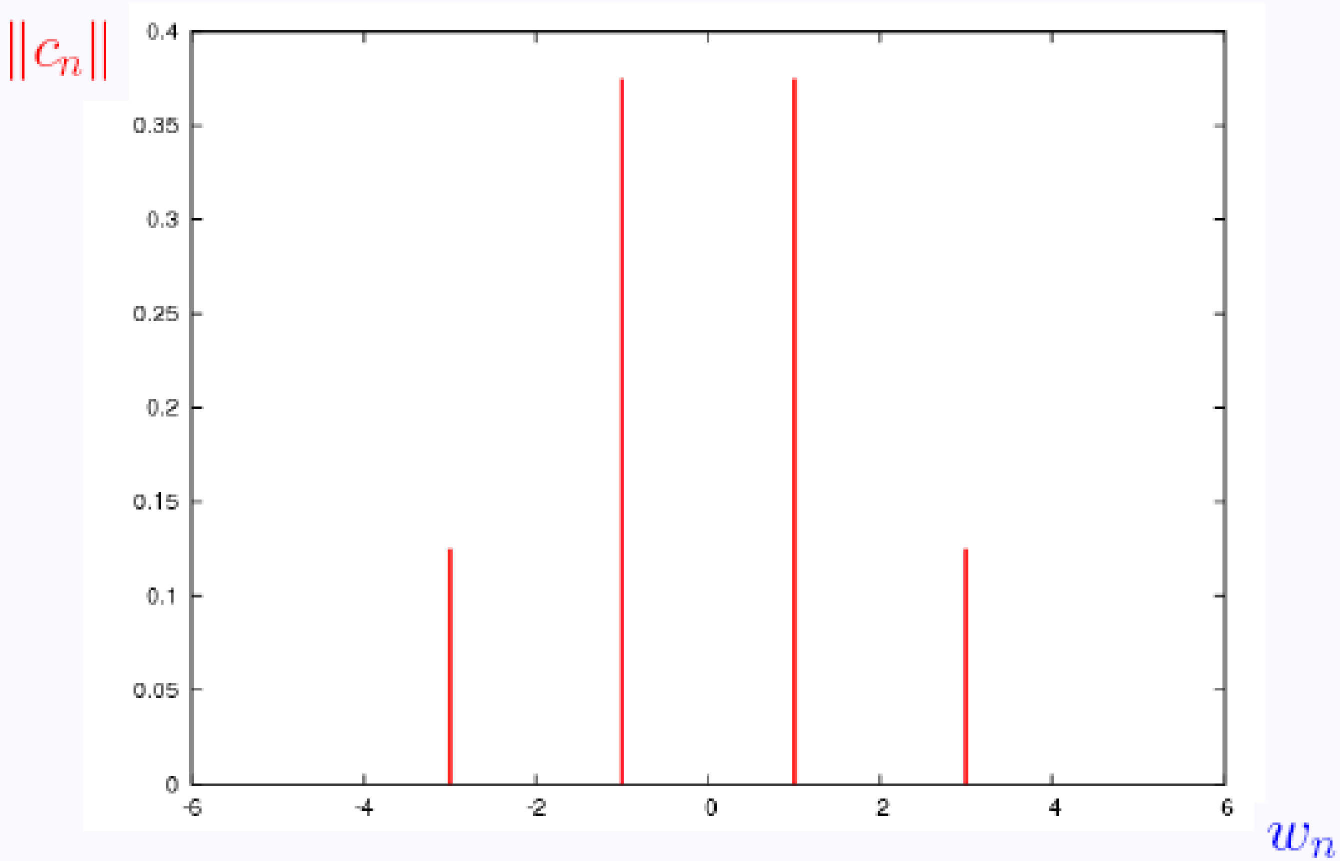
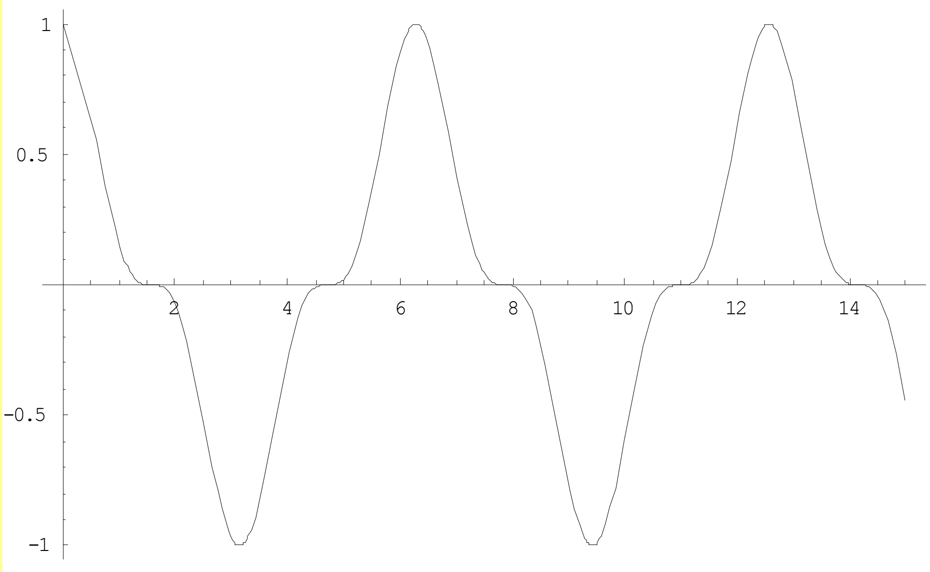


Figura 2.3: Espectro de Fourier de la función $f(\theta) = \theta^3$.

lo que se conoce como espectro de frecuencia de la función.

Recordemos como es esta función

```
In[19]:= Plot[Cos[x]^3, {x, 0, 15}]
```



El *Espectro de Frecuencia* **es una medida de la distribución de los valores de las amplitudes asociadas a cada frecuencia de una función o señal periódica.**

En el caso de la transformada de Fourier real (no compleja) se refiere a la distribución de los coeficientes a_n, a_0, b_n versus el indice n, es decir el espectro tiene de información acerca de la amplitud y defasaje de cada uno de los armónicos o términos de fourier (también llamados *modos de fourier*).

Por ejemplo para la función $f(\theta) = \theta$ (definida entre $-\pi$ y π con periodicidad 2π) este espectro resulta:

$$\begin{aligned} a_0 &= 0 \\ a_n &= 0 \\ b_n &= -\frac{2(-1)^n}{n} \end{aligned}$$

y en la grafica siguiente se muestra su distribución:

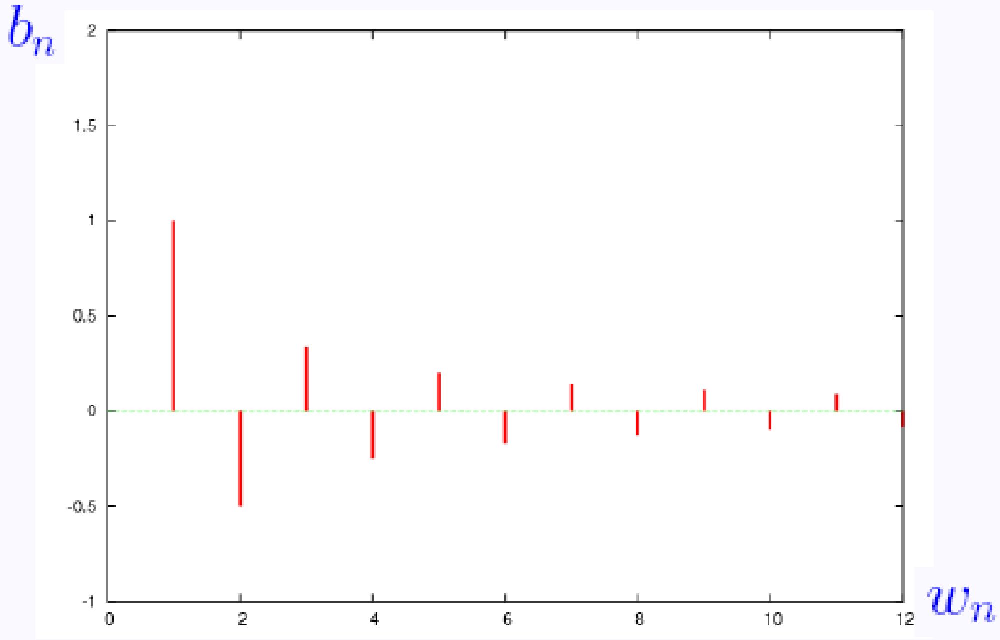


Figura 2.4: Espectro de Fourier de la función $f(\theta) = \theta$ definida (definida entre $-\pi$ y π con periodicidad 2π).

También se llama a veces en la literatura, espectro de frecuencia, a $\|c_n\| = (\sqrt{a_n^2 + b_n^2})/2$ versus la frecuencia w_n, pero es más comun

referirse a $\|c_n\|^2$ versus w_n lo que se denomina *espectro de energía* (recordemos que la energía de un oscilador armónico esta dada por $\frac{1}{2}kA^2$ que en nuestro caso corresponde (salvo un factor de proporcionalidad) a $\|c_n^2\|$.

Fin