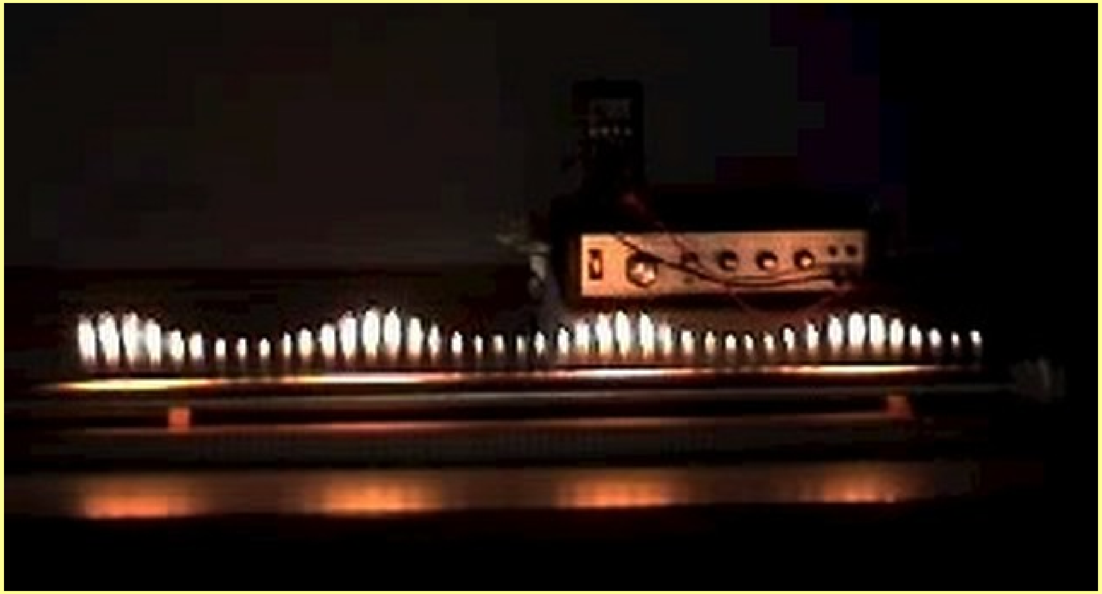
Física II, Ondas

Descripción Matemática del Movimiento Periódico No Armónico III



Profesor: Pedro Labraña
Departamento de Física,
Universidad del Bío-Bío

Carrera: Ingeniería Civil en Informática
Créditos: 5

Descripción Matemática del Movimiento Periódico No Armónico

El péndulo no lineal. Fasores. Descripción de un movimiento periódico no armónico mediante las Series de Fourier. ***Serie de Fourier real. Serie de Fourier Compleja.*** *Transformada de Fourier.*

Clase anterior

Este tipo de representación se denomina **serie de Fourier** y el caso más general (para una función que no es par ni impar) es:

$$f(\theta) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\theta) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\theta)$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\, d\theta$$

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\, \sin(m\theta)\, d\theta$$

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\, \cos(m\theta)\, d\theta$$

Serie de Fourier compleja

Un resultado interesante y útil es que la serie de Fourier puede reescribirse en término de expresiones complejas:

$$
\begin{aligned}
f(\theta) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \underbrace{\left(\frac{e^{in\theta} + e^{-in\theta}}{2}\right)}_{\cos(n\theta)} + \\
&\quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \underbrace{\left(\frac{e^{in\theta} - e^{-in\theta}}{2i}\right)}_{\sin(n\theta)} \\
&= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\underbrace{\frac{a_n - ib_n}{2}}_{c_n} e^{in\theta} + \underbrace{\frac{a_n + ib_n}{2}}_{c_n^*} e^{-in\theta} \right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[c_n\, e^{in\theta} + c_n^*\, e^{-in\theta} \right] \\
&= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n\, e^{in\theta} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} c_n^*\, e^{-in\theta}}_{\sum_{-\infty}^{n=-1} c_{-n}^* e^{in\theta}} \\
&= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n\, e^{in\theta} + \sum_{-\infty}^{n=-1} c_{-n}^* e^{in\theta} \\
&= \sum_{-\infty}^{n=-1} c_{-n}^* e^{in\theta} + c_0 e^{i0\theta} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n\, e^{in\theta}
\end{aligned}
$$

donde en la última línea se ha renombrado $c_{-n}^* \longrightarrow c_n$ y $a_0 \longrightarrow c_0$.

Con esto se obtiene la representación más simple:

$$\boxed{f(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} c_n\, e^{in\theta}}$$

conocida como Serie de Fourier Compleja:

Donde hemos definido

$$\begin{aligned} c_0 &= a_0 \\ c_n &= \frac{b_n - i a_n}{2} \\ c_n^* &= \frac{b_n + i a_n}{2} \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} a_0 &= c_0 \\ a_n &= c_n + c_n^* \\ b_n &= \frac{c_n - c_n^*}{i} = i(c_n - c_n^*) \end{aligned}$$

$$f(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} c_n\, e^{in\theta}$$

Los coeficientes c_n se pueden obtener en forma directa usando la *relación de ortogonalidad*:

$$\int_0^{2\pi} e^{in\theta}\, e^{-im\theta}\, d\theta = \begin{cases} 2\pi & \text{si } n = m \\ 0 & \text{si } n \neq m \end{cases}$$

Tarea: demostrar esta relación (problema 2 guía #3)

Aplicando a ambos lados de la serie e integrando se obtiene:

$$\int_0^{2\pi} f(\theta)\, e^{-im\theta}\, d\theta = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} c_n \underbrace{\int_0^{2\pi} e^{in\theta}\, e^{-im\theta}\, d\theta}_{2\pi \quad \text{si } n = m} = 2\pi\, c_m$$

De donde obtenemos que

$$\boxed{c_m = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-im\theta}\, f(\theta)\, d\theta}$$

Ejemplo: Considere $f(\theta) = \cos^3\theta$, determine los coeficientes c_n de la Serie de Fourier compleja:

$$
\begin{aligned}
c_n &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-im\theta}\,\cos^3\theta\,d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-im\theta}\,\left[\frac{1}{4}(cos(3\theta)+3\cos\theta)\right]\,d\theta \\
&= \frac{1}{8\pi}\int_0^{2\pi} e^{-im\theta}\,\left[\frac{e^{3i\theta}+e^{-3i\theta}}{2}+3\left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)\right]\,d\theta \\
&= \frac{1}{8\pi}\left[\frac{1}{2}\underbrace{\int_0^{2\pi} e^{3i\theta}\,e^{-im\theta}\,d\theta}_{2\pi \quad \text{si } m=3}+\frac{1}{2}\underbrace{\int_0^{2\pi} e^{-3i\theta}\,e^{-im\theta}\,d\theta}_{2\pi \quad \text{si } m=-3}\right. \\
&\qquad \left. +\frac{3}{2}\underbrace{\int_0^{2\pi} e^{i\theta}\,e^{-im\theta}\,d\theta}_{2\pi \quad \text{si } m=1}+\frac{3}{2}\underbrace{\int_0^{2\pi} e^{-i\theta}\,e^{-im\theta}\,d\theta}_{2\pi \quad \text{si } m=-1}\right]
\end{aligned}
$$

asi que tenemos: $c_{-3}=1/8$, $c_{-1}=3/8$, $c_3=1/8$ y $c_1=3/8$, el resto de los coeficientes es nulo.

Fin