Física II, Ondas
Descripción Matemática del Movimiento Periódico No Armónico II

Profesor: Pedro Labraña
Departamento de Física,
Universidad del Bío-Bío

Carrera: Ingeniería Civil en Informática
Créditos: 5

Descripción Matemática del Movimiento Periódico No Armónico

El péndulo no lineal. ***<u>Fasores. Descripción de un movimiento periódico no armónico mediante las Series de Fourier. Serie de Fourier real.</u>*** *Serie de Fourier Compleja. Transformada de Fourier.*

Fasores

(Números complejos)

$$z = R\,e^{i\theta}$$

Un número complejo se puede representar como una exponencial de argumento complejo

Recordemos

Por un lado en una sección previa vimos que el movimiento circular uniforme tiene una directa relación con el movimiento oscilatorio cuando uno define

$$\begin{aligned} x &= R\cos\theta \\ y &= R\sin\theta \end{aligned}$$

Donde

$$\theta = wt$$

Un número complejo arbitrario lo podemos escribir de la siguiente manera

$$z = x + iy$$

en que $i = \sqrt{-1}$. Para el caso recien mencionado se tiene:

$$z = R\cos\theta + iR\,\mathrm{sen}\,\theta$$

Tiene una interpretación geométrica

(Ver el diagrama de Argand en la pizarra)

Por lo tanto un número complejo arbitrario lo puedo escribir como

$$z = R\cos\theta + iR\,\mathrm{sen}\,\theta$$

(Ver pizarra)

Propiedad I

Propiedades: La derivada de z respecto de θ será

$$\frac{dz}{d\theta} = \frac{dx}{d\theta} + i\frac{dy}{d\theta} = -R\sin\theta + iR\cos\theta$$

pero si usamos que $-1 = i \times i$ y extraemos un factor i podemos reescribir

$$\frac{dz}{d\theta} = i\,\underbrace{(R\cos\theta + iR\sin\theta)}_{z} = i\,z$$

Las sucesivas derivadas de z con respecto al argumento (fase) θ serán:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 z}{d\theta^2} &= i^2\,z \\ \frac{d^3 z}{d\theta^2} &= i^3\,z \\ \frac{d^4 z}{d\theta^2} &= i^4\,z \\ \ldots &= \ldots \end{aligned}$$

es decir vale la regla general:

$$\frac{d^n z}{d\theta^n} = i^n\, z$$

Propiedad II

Como el modulo del número complejo Z (ver pizarra) se obtiene multiplicando el número complejo por su complejo conjugado se tiene la siguiente relación

$$||z||^2 = (x + iy)\,(x - iy) = x^2 + y^2 = R^2$$

Luego

$$||z|| = R$$

Por otro lado las propiedades de derivación sugieren que z se comporta o tiene las mismas propiedades de las derivadas de la siguiente función exponencial

$$z = R\, e^{i\theta}$$

En efecto:

- para el modulo se tiene $\|z\|^2 = z\, z^* = R\, e^{i\theta}\, R\, e^{-i\theta} = R^2\, e^{i\theta - i\theta} = R^2\, e^0 = R^2$ de modo que $\|z\| = R$

- y para las derivadas se cumple

$$\begin{aligned} \frac{dz}{d\theta} &= Rie^{i\theta} = iz \\ \frac{d^2z}{d^2\theta} &= \frac{d}{\theta} iz = i^2 z \\ \frac{d^3z}{d^3\theta} &= \frac{d}{\theta} i^2 z = i^3 z \\ \ldots &= \ldots \end{aligned}$$

Esto permite identificar la cantidad $e^{i\theta}$ con la cantidad $\cos\theta + i\sin\theta$

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

Notar la belleza de esta ecuación

Aplicaciones

Demostrar las siguientes identidades

1) $$Cos[\theta] = \frac{1}{2}\left[e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right]$$

2) $$Sen[\theta] = \frac{1}{2i}\left[e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right]$$

3) $$\cos^2\theta = \frac{1}{2}(\cos(2\theta) + 1)$$

Tarea

4) $$\cos^3\theta = \frac{1}{4}(\cos(3\theta) + 3\cos\theta)$$

Ver pizarra

Fin del repaso de Fasores.

Descripción de un movimiento periódico no armónico mediante las series de Fourier

(Este tema será tratado siguiendo los apuntes confeccionados por el profesor Dino Risso, los cuales serán entregados en clases)

Descripción de un movimiento periódico no armónico mediante las series de Fourier

Hemos visto que $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$. El complejo conjugado es $e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$. A partir de esta relación es posible deducir que

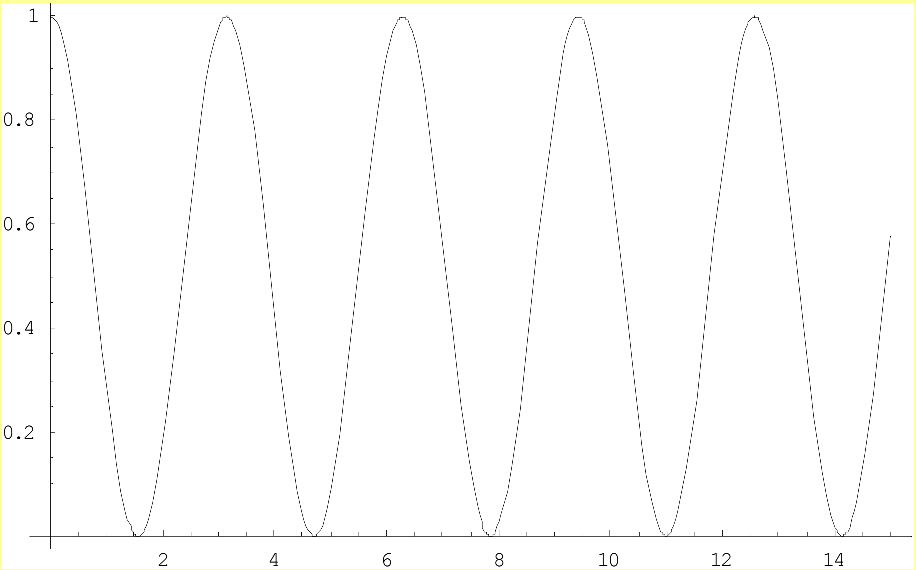
$$\cos^2\theta = \frac{1}{2}\left(\cos(2\theta) + 1\right)$$

o que

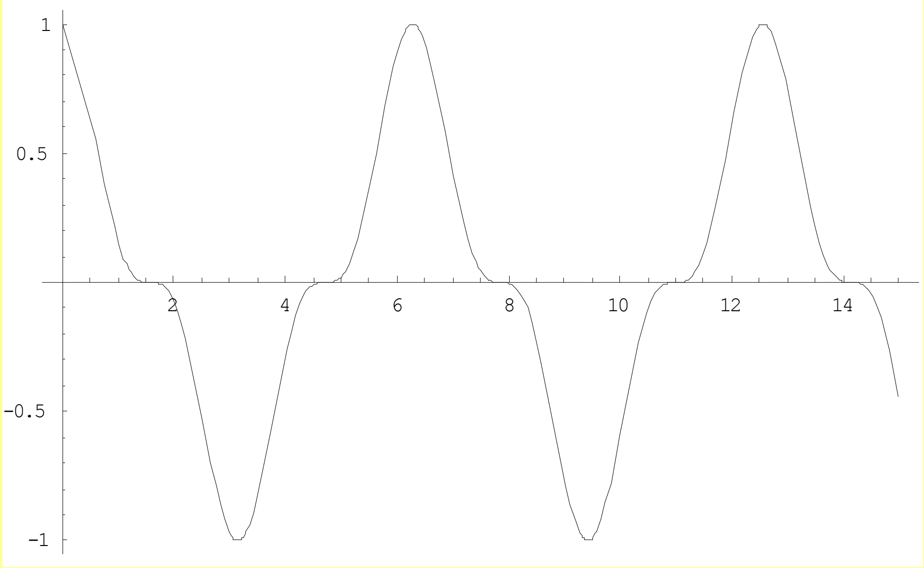
$$\cos^3\theta = \frac{1}{4}\left(\cos(3\theta) + 3\cos\theta\right)$$

Miremos por otro lado las graficas de estas funciones:

```
In[21]:= Plot[Cos[x]^2, {x, 0, 15}]
```




```
In[19]:= Plot[Cos[x]^3, {x, 0, 15}]
```



podemos apreciar que la forma de las funciones es "extraña" sin embargo ambas son funciones periodicas con período 2π.

Notemos tambien que ambas funciones se pueden representar como combinación de funciones de la forma:

$$
\begin{gathered}
1 \\
\cos\theta \\
\cos(2\theta) \\
\cos(3\theta) \\
\dots
\end{gathered}
$$

Efectivamente:

$$
\begin{aligned}
\cos^2\theta &= \frac{1}{2}\times 1 + 0\times\cos\theta + \frac{1}{2}\times\cos(2\theta) + 0\times\cos(3\theta) + \dots \\
\cos^3\theta &= 0\times 1 + \frac{3}{4}\times\cos\theta + 0\times\cos(2\theta) + 3\times\cos(3\theta) + \dots
\end{aligned}
$$

o en forma abreviada, ambas pueden expresarse en la forma:

$$a_0 + a_1\cos\theta + a_2\cos(2\theta) + a_3\cos(3\theta) + a_4\cos(4\theta) + \dots$$

Existen teoremas que permiten afirmar que, en general cualquier función par periodica (ver nota[1]) en 2π se puede representar por una serie infinita de la forma

$$f(\theta) = a_0 + a_1 \cos\theta + a_2 \cos(2\theta) + a_3 \cos(3\theta) + a_4 \cos(4\theta) + \dots$$

de la misma manera una función impar periodica se puede representar vía

$$f(\theta) = b_1 \sin\theta + b_2 \sin(2\theta) + b_3 \sin(3\theta) + b_4 \sin(4\theta) + \dots$$

Este tipo de representación se denomina **serie de Fourier** y el caso más general (para una función que no es par ni impar) es:

$$f(\theta) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\theta) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\theta)$$

Aquí las funciones $\cos(nx)$ y $\sin(nx)$ constituyen lo que se denomína una base para representar funciones periodicas

¿Cómo calcular los coeficientes a_n y b_n para una función dada?

Primero veamos algunas propiedades del cos y del sin. Se tiene:

$$\int_0^{2\pi} \cos\theta \, d\theta = \sin(2\pi) - \sin(0) = 0$$

y también:

$$\int_0^{2\pi} \cos(m\theta) \, d\theta = \left. \frac{\sin(m\,\theta)}{m} \right\|_0^{2\pi} = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq 0 \\ 2\pi & \text{si } m = 0 \end{cases}$$

en que hemos usado que $\sin(2\pi m) = 0$ si m es entero, pero teniendo la salvedad que $\cos(m\theta) = 1$ si $m = 0$, de modo que $\int_0^{2\pi} \cos(0\theta) \, d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi$.

Algo similar pasa con

$$\int_0^{2\pi} \sin\theta \, d\theta = - \sin\theta \|_0^{2\pi} = -(\underbrace{\cos(2\pi)}_{1} - \underbrace{\cos 0}_{1}) = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \sin(m\theta)\, d\theta = -\frac{\cos(m\,\theta)}{m}\Big\|_0^{2\pi} = 0$$

Usando estos resultados y las identidades

$\cos(a \pm b) = \cos(a)\cos(b) \mp \sin(a)\sin(b)$

se puede demostrar las llamadas **relaciones de ortogonalidad**:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\cos(nx)\, dx \;=\; \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ \pi & \text{si n=m} \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\sin(nx)\, dx \;=\; 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} Sin(mx)\, Sin(nx)\, dx \;=\; \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ \pi & \text{si n=m} \end{cases}$$

El coeficiente a_0 se determina directamente integrando $f(\theta)$ entre $-\pi$ y π:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\, d\theta \; = \; \int_{-\pi}^{\pi} a_0\, d\theta + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \sin(n\theta)\, d\theta}_{0} +$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \cos(n\theta)\, d\theta}_{0} = 2\pi a_0$$

Se obtiene:

$$\boxed{a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\, d\theta}$$

Para determinar b_m se multiplica por $sin(m\theta)$ y se integra:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\,\sin(m\theta)\,d\theta \;=\; \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} a_0 \,\sin(m\theta)\,d\theta}_{0} +$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} (\sin(n\theta)\;\sin(m\theta)\,d\theta}_{\pi \text{si } n \neq m} +$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \cos(n\theta)\;\cos(m\theta)\,d\theta}_{0}$$

$$=\;\pi b_m$$

Se obtiene:

$$\boxed{b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\, \sin(m\theta)\, d\theta}$$

de la misma manera se puede demostrar que:

$$\boxed{a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\, \cos(m\theta)\, d\theta}$$

Ejemplo: Considere la función $f(\theta) = \theta$ definida entre $-\pi$ y π con periodicidad 2π. Se tiene:

Ver pizarra

Fin