Física II, Ondas
Descripción Matemática del Movimiento Periódico No Armónico

Profesor: Pedro Labraña
Departamento de Física,
Universidad del Bío-Bío

Carrera: Ingeniería Civil en Informática
Créditos: 5

Descripción Matemática del Movimiento Periódico No Armónico

<u>*Movimiento Armónico y movimiento no armónico. El péndulo no lineal. Fasores.*</u>
Descripción de un movimiento periódico no armónico mediante las Series de Fourier. Serie de Fourier real. Serie de Fourier Compleja. Transformada de Fourier.

Movimientos armónicos (Repaso)

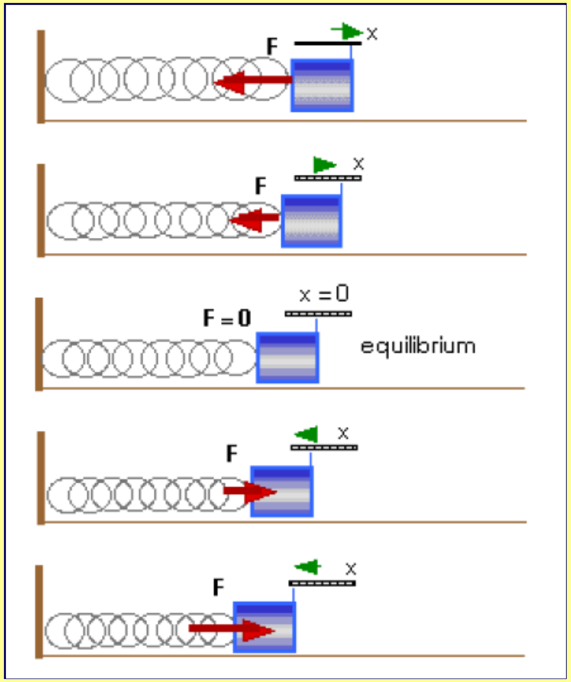
Movimiento armónico simple: Ej. Masa atada a un resorte

$$m\,\frac{d^2x}{dt^2} = -k\,(x - l_0)$$

$$X = (x - l_0)$$

$$\omega_0 \equiv \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$X(t) = A\,Cos\big(w_0\,t + \delta\big)$$



Elongación, velocidad, y aceleración en un movimiento armónico simple

Elongación = Desplazamiento respecto del punto de equilibrio

$$\boxed{X(t) = A\,Cos\left(w_0\,t + \delta\right)}$$

Máximo desplazamiento $\boxed{A}$

Velocidad de la masa m:

$$\boxed{V = V(t) = \frac{dX}{dt} = -A\,\omega_0\,Sen\left(w_0\,t + \delta\right)}$$

Máxima velocidad

$$\boxed{A\,\omega_0}$$

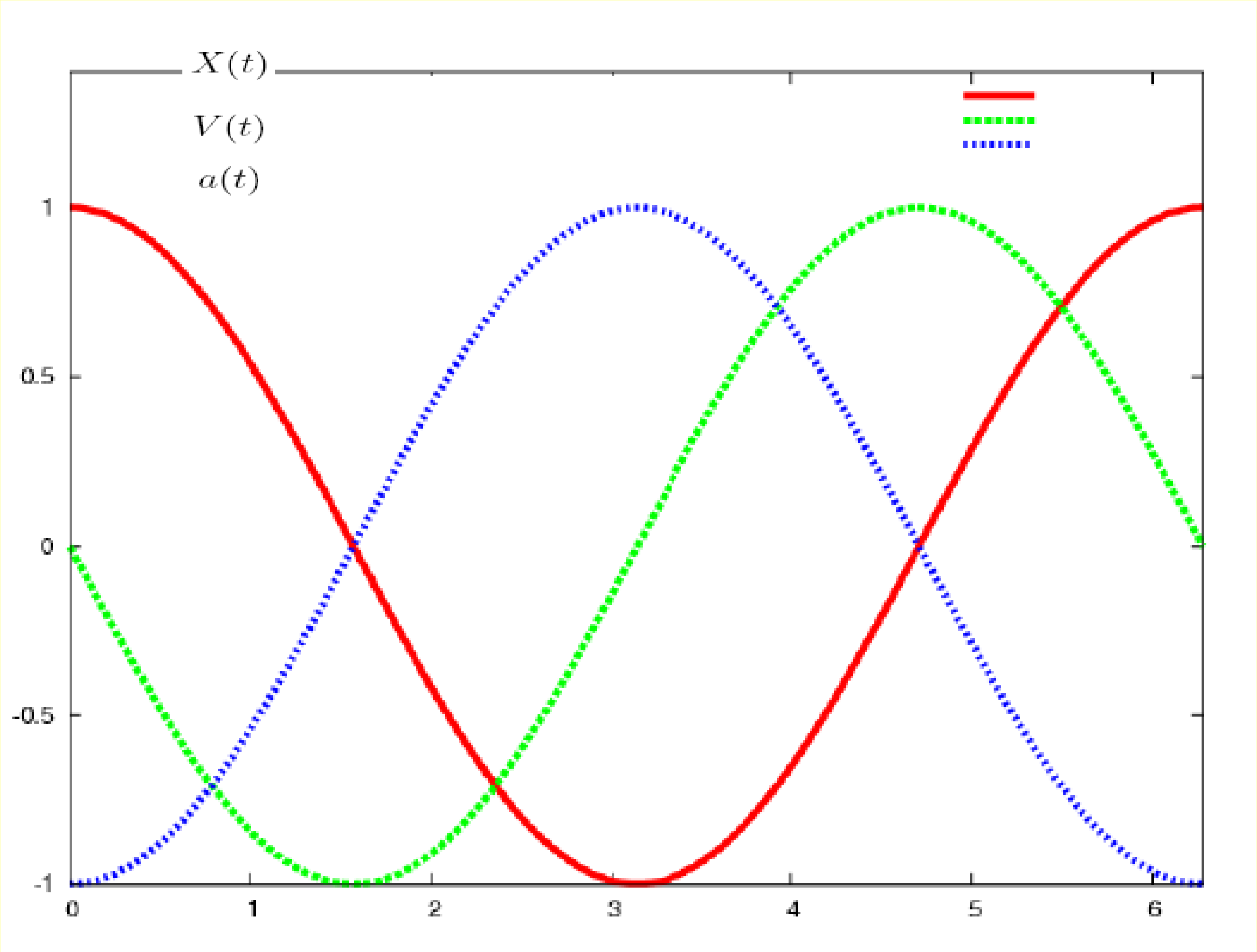
Aceleración de la masa m:

$$\boxed{a = a(t) = \frac{d^2X}{dt^2} = -A\,\omega_0^2\,Cos\left(w_0\,t + \delta\right)}$$

Máxima aceleración

$$\boxed{A\,\omega_0^2}$$

(Ver animación Resorte1)



Caso A= 1 y $\delta = 0$

Por lo tanto podemos predecir cual va a ser la posición, la velocidad y la aceleración de la masa m para todo tiempo t.

Ondas armónicas viajeras

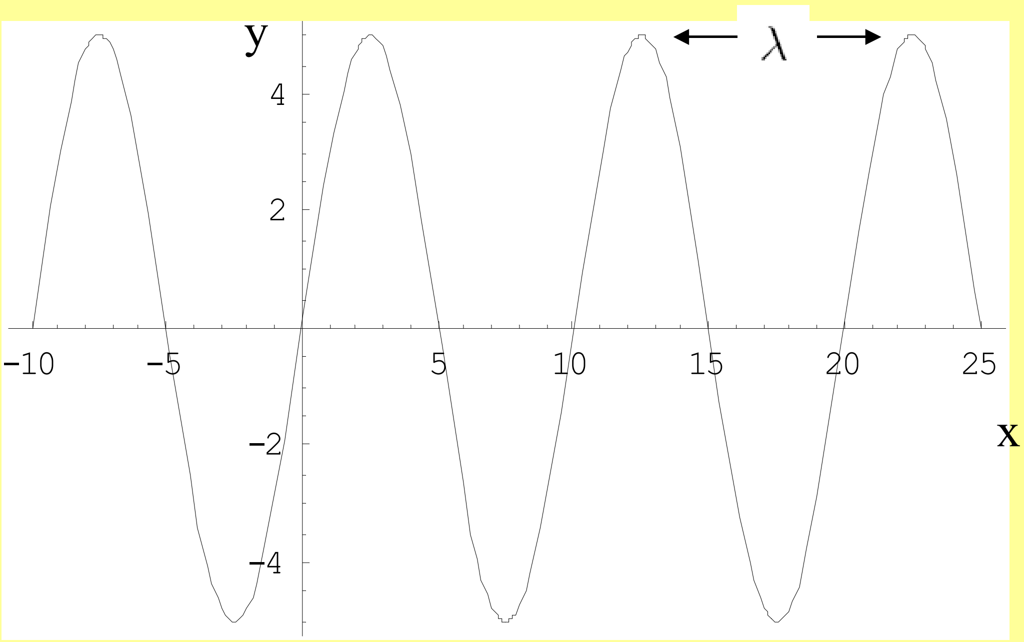
La expresión general para una onda viajera armónica que viaja hacia la derecha

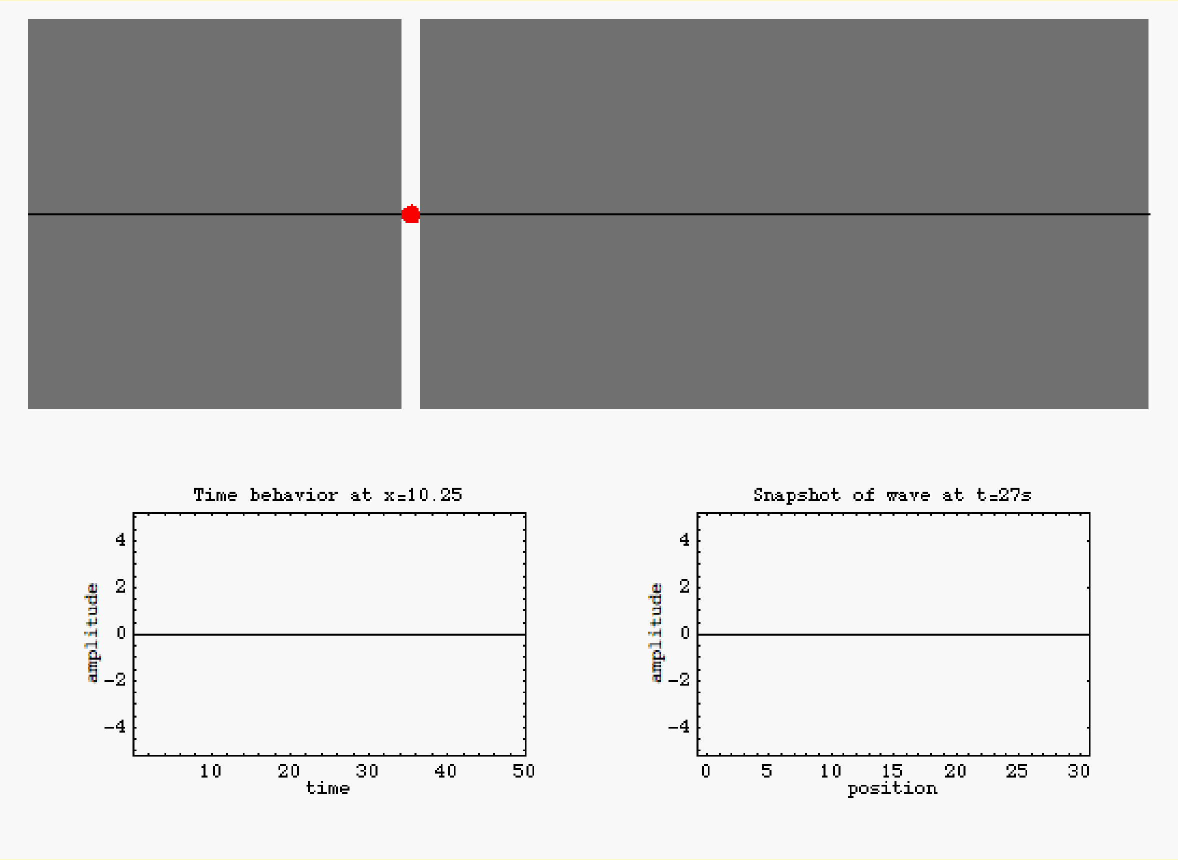
$$y(x,t) = y_m\, Sen[kx - \omega t + \delta]$$

Donde δ es una constante (ángulo de fase o fase inicial)

Número de onda $$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Frecuencia angular $$\omega = \frac{2\pi}{T}$$





Cada punto de la cuerda realiza un movimiento armónico simple con frecuencia angular w y amplitud Ym

$$y(x,t) = y_m\, Sen[kx - \omega t + \delta]$$

Ondas Estacionarias en cuerdas

Ej. Cuerda de largo L con sus dos extremos fijos

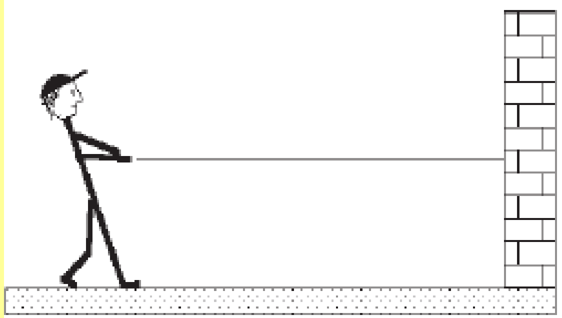
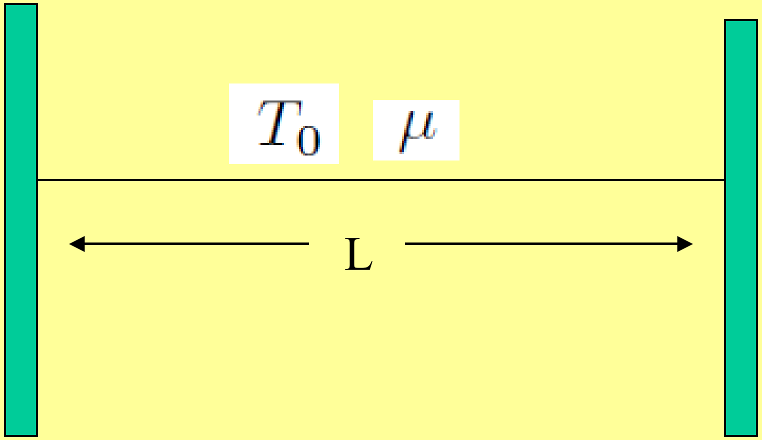


Figura 3.1: Cuerda bajo tensión.



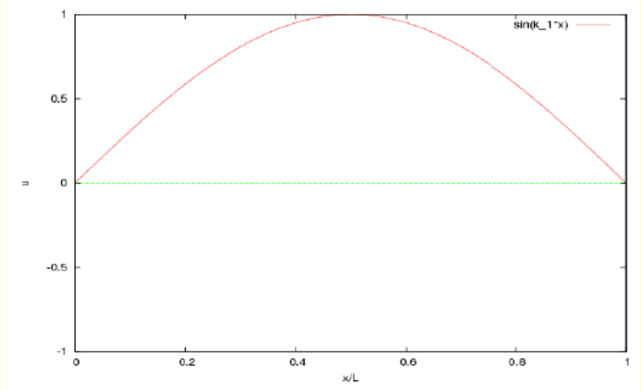
$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \underbrace{\frac{T_0}{\mu}}_{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

con rapidez de onda $c = \sqrt{T_0/\mu}$.

Luego la solución será: $u(x,t) = A_0\, Sen[k_n x]\, Cos[w_n t]$

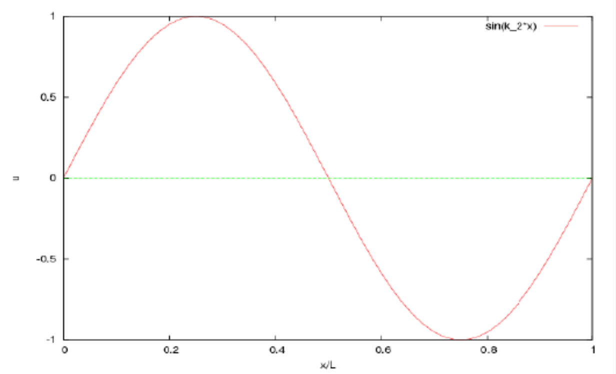
$$\boxed{w_n = c\,k_n = c\frac{n\pi}{L} \qquad n = 1, 2, \ldots}$$

El caso $n = 1$ corresponde a:

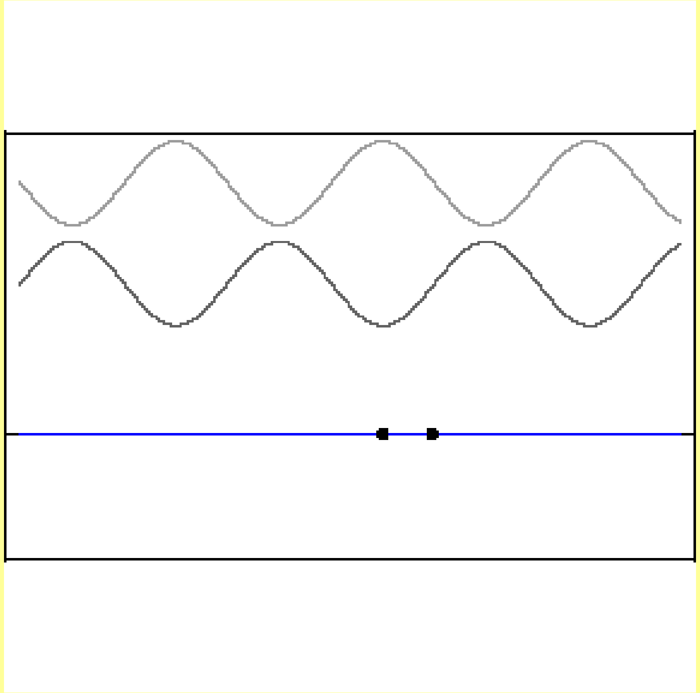


y tiene 2 puntos nodales en los extremos fijos.

El caso $n = 2$ corresponde a:



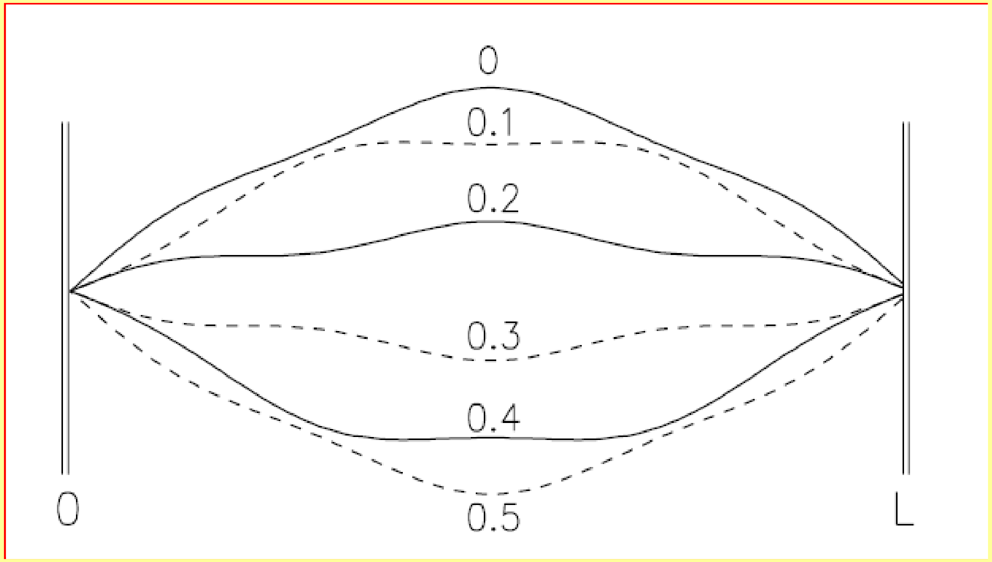
y tiene, adicionalmente, un punto nodal en el centro.



Nuevamente cada punto de la cuerda realiza un movimiento armónico simple con frecuencia ω_n. La amplitud de oscilación dependera de la posición del punto en la cuerda. Hay puntos donde la oscilación es máxima (Antinodos) y hay puntos donde la oscilación tiene amplitud cero (nodos), ver animación.

Movimientos No Armónicos

¿cómo vibra una cuerda al golpearla?



La cuerda realiza un movimiento **periódico** pero el cual **no** es armónico.

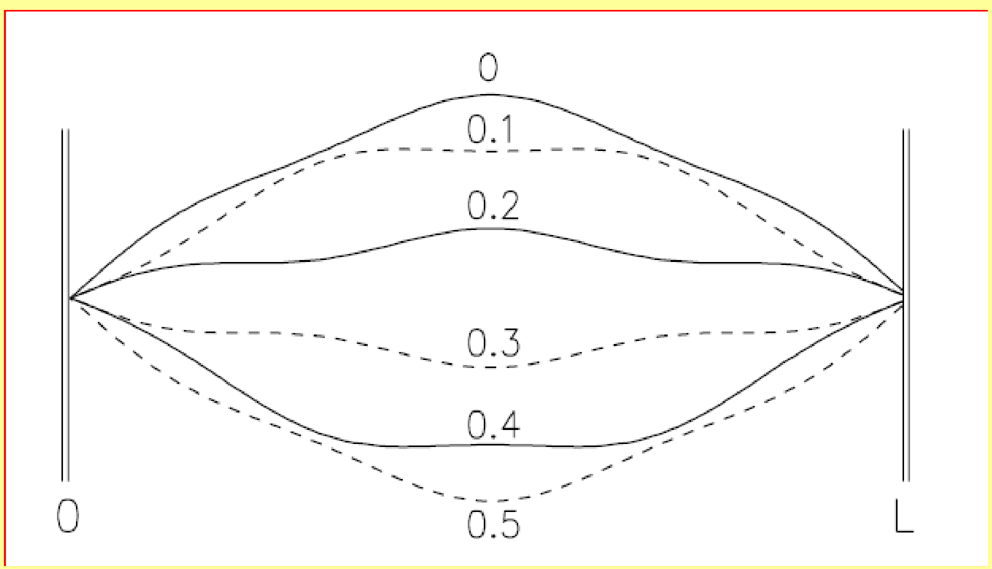
Cada punto de la cuerda no realiza un movimiento armónico simple aunque su movimiento si se repite cada cierto intervalo (i.e. Realiza un movimiento periódico)

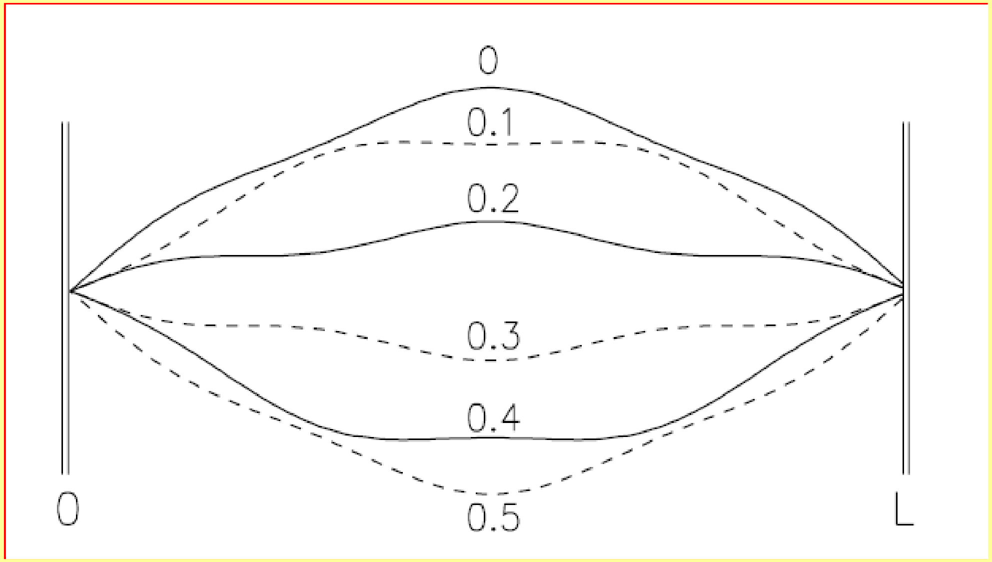
¿cuál es el periodo T de oscilación una cuerda de largo L tensión T_0 masa M?

Luego la cuerda no vibra siguiendo la ecuación de solo un modo normal

$$\cancel{u(x,t) = A_0\, Sen[k_n x]\, Cos[w_n t]}$$

Sin embargo su movimiento se puede describir como una combinación lineal de estos modos normales de vibración





$$u(x,t) = A_1\, Sen[k_1 x]\, Cos[w_1 t] + A_2\, Sen[k_2 x]\, Cos[w_2 t] + A_3\, Sen[k_3 x]\, Cos[w_3 t] + \cdots$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n\, Sen[k_n x]\, Cos[w_n t]$$

Movimiento no armónico pero periódico de frecuencia f_1

El péndulo no lineal

Ecuación de movimiento: (ver pizarra)

$$\boxed{\ddot{\phi}(t) + \frac{g}{l}\, Sen\left[\phi(t)\right] = 0}$$

Solución $\boxed{\phi(t) = ?}$

$$\cancel{\phi(t) = A\,Cos[w_0\, t + \delta]}$$

Esta es una ecuación no lineal. No la podemos resolver analíticamente. Sólo la podemos resolver en forma numérica.

$\longrightarrow$ No es solución de esta ecuación

Podemos encontrar una solución analítica aproximada valida sólo para ángulos pequeños.

Aproximamos la función seno para ángulos pequeños (Usamos la serie de Taylor)

$$\sin\phi = \phi - \phi^3/3! + \phi^5/5! - \phi^7/7! + \dots$$

De este modo la ecuación queda

$$\ddot{\phi}(t) + \frac{g}{l}\phi(t) = 0$$

Solución

$$\phi(t) = A\,Cos[w_0\,t + \delta]$$

No hay que olvidar que esta es una solución aproximada del problema real

Ver animación

Fin