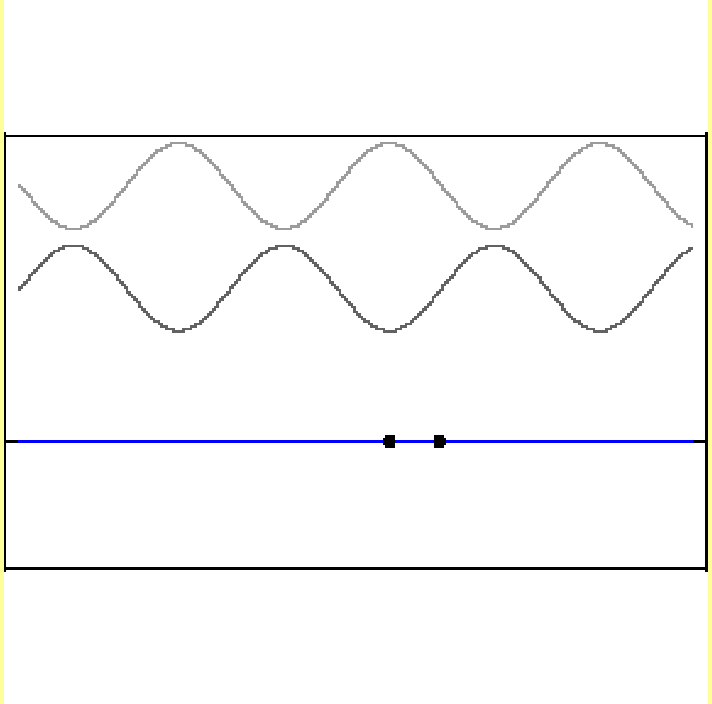
Física II, Ondas

Ondas transversales en una cuerda II

Ondas Estacionarias (Modos normales)



Profesor: Pedro Labraña
Departamento de Física,
Universidad del Bío-Bío

Carrera: Ingeniería Civil en Informática
Créditos: 5

Ondas en Medios Elásticos

*Introducción, Ondas Mecánicas, Tipos de Ondas, Ondas viajeras, La ecuación de Onda, El Principio de Superposición, **Ondas en Cuerdas, Ondas Estacionarias**, Potencia e Intensidad en el Movimiento Ondulatorio, Ondas Sonoras, El Efecto Doppler.*

Ondas estacionarias

Estudiamos el comportamiento de ondas transversales en cuerdas de longitud finita L. Consideraremos dos casos:

4) Cuerda de largo L con sus dos extremos fijos.
5) Cuerda de Largo L con un extremo fijo y el otro libre

Con este objetivo debemos resolver la ecuación de onda sujeta a diferentes condiciones de borde o de frontera

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{V^2}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$$

Cuerda de largo L con sus dos extremos fijos

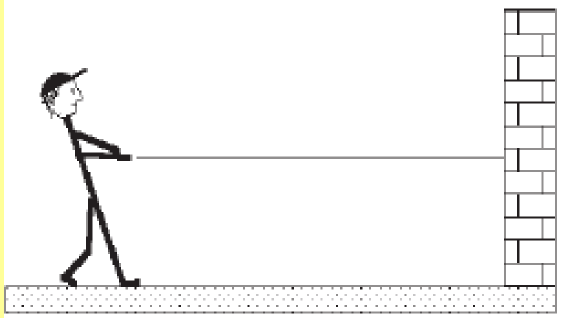
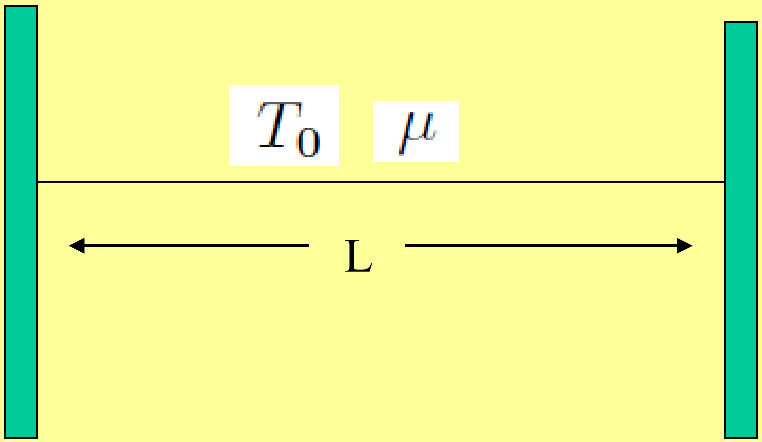


Figura 3.1: Cuerda bajo tensión.



$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \underbrace{\frac{T_0}{\mu}}_{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

con rapidez de onda $c = \sqrt{T_0/\mu}$.

Buscamos soluciones a la ecuación de onda

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{V^2}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$$

que complan con las siguientes condiciones de borde:

$$u(0,t) = 0 \text{ y } u(L,t) = 0$$

Consideramos una solución del tipo

$$u(x,t) = A(x)\,\cos(w\,t)$$

Modos normales

Introducimos esta posible solución el la ecuación y vemos que pasa

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -w^2\,A(x)\,\cos(w\,t)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{d^2 A}{dx^2} \cos(w\,t)$$

y la ecuación de onda queda:

$$-w^2 A(x) \cos(w\,t) = c^2 \frac{d^2 A}{dx^2} \cos(w\,t)$$

de donde sigue:

$$\frac{d^2 A}{dx^2} = -\underbrace{\frac{w^2}{c^2}}_{k^2} A(x)$$

Vemos que $A(x)$ obedece una ecuación tipo *oscilador armónico* pero en que las "oscilaciones" ocurren en el espacio con una "frecuencia ángular" espacial (no temporal) que satisface $k = w/c$ o

$$w = c\,k$$

La solución espacial más general es:

$$A(x) = A_0\, Sen[kx + \alpha]$$

y como queremos que los puntos $x = 0$ y $x = L$ no se muevan se debe tener:

$$\begin{cases} A(0) = 0 \longrightarrow \alpha = 0 \\ A(L) = 0 \longrightarrow k\,L = n\pi \text{ con } n \text{ entero} \end{cases}$$

$$\boxed{k = k_n = \frac{n\pi}{L} \qquad n = 1, 2, \ldots}$$

Los números de onda posible no son cualquiera sino que son multiplos enteros de π/L.

Esto tiene una consecuencia importante: como $w = c\,k$ entonces las frecuencias no son cualquiera sino que son múltiplos de una frecuencia fundamental $w_1 = c\pi/L$. Esto es:

$$w_n = c\,k_n = c\frac{n\pi}{L} \qquad n = 1, 2, \ldots$$

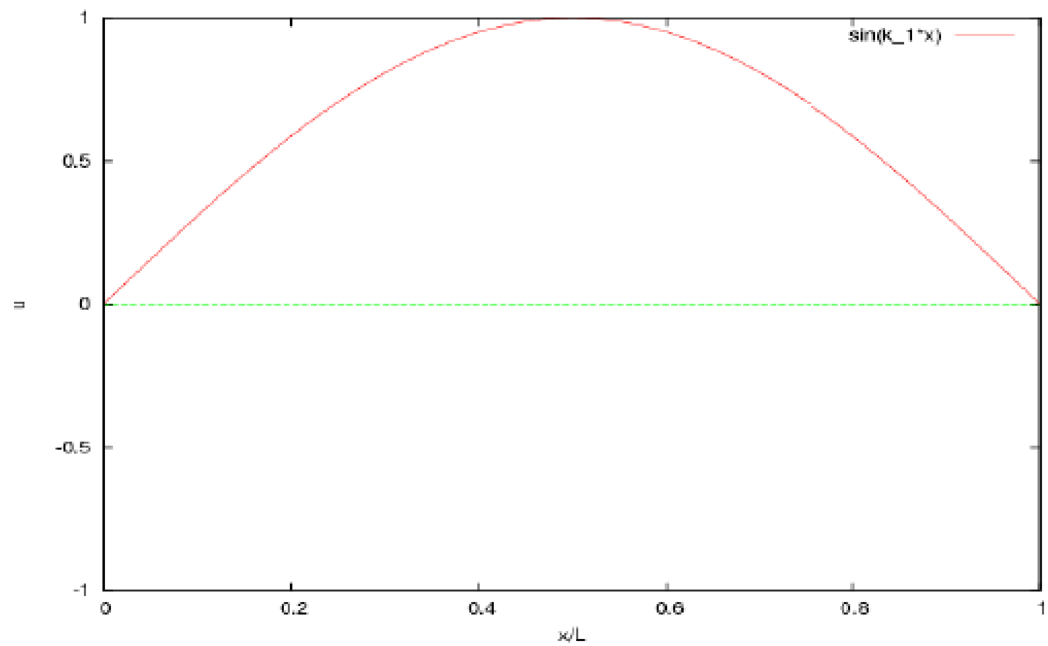
Luego la solución será:

$$u(x,t) = A_0\,Sen[k_n x]\,Cos[w_n t]$$

Grafiquemos los distintos modos normales que resultan:

El caso $n = 1$ corresponde a:

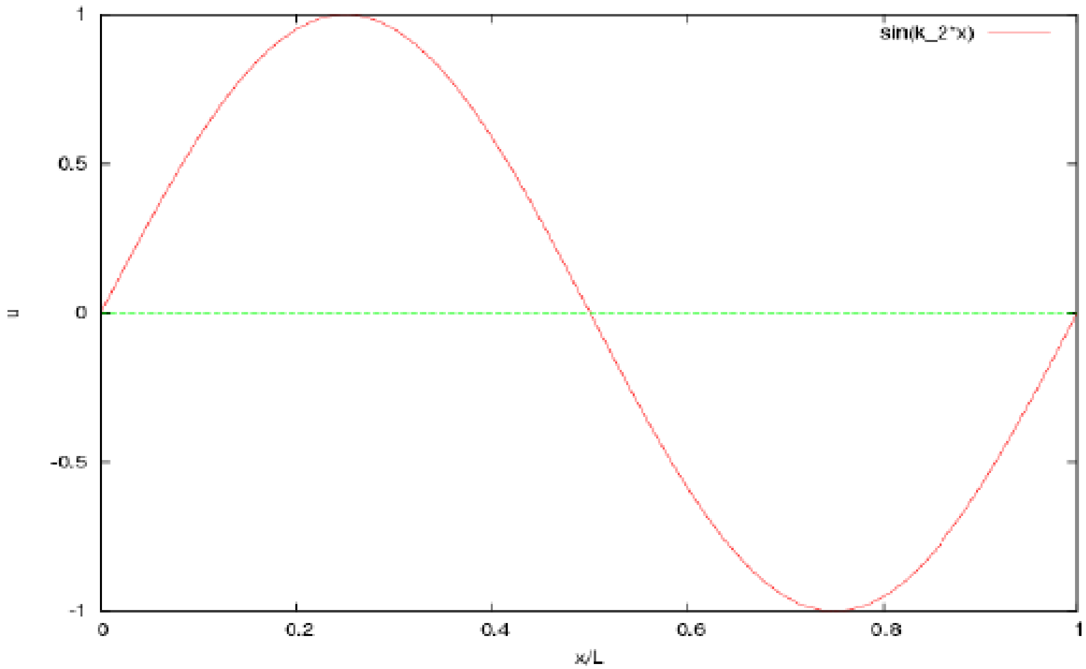
$$u(x,t) = A_0 \sin\left(\frac{\pi}{L}\ x\right)\ \cos(w_1\ t)$$



y tiene 2 puntos nodales en los extremos fijos.

El caso $n = 2$ corresponde a:

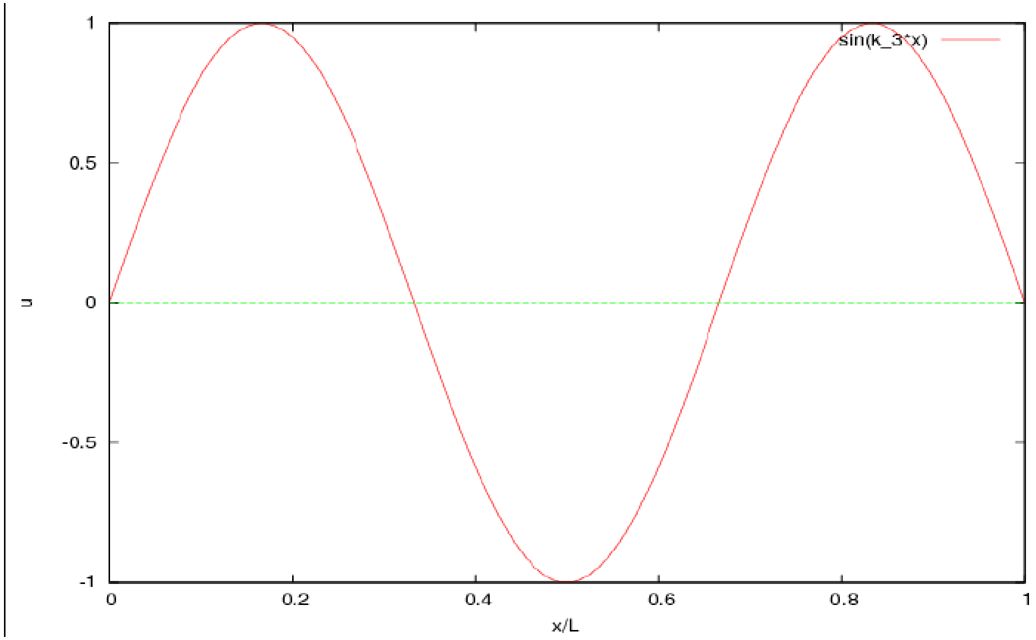
$$u(x,t) = A_0 \sin\left(\frac{2\pi}{L}\; x\right)\cos(w_2\, t)$$



y tiene, adicionalmente, un punto nodal en el centro.

El caso $n = 3$ corresponde a:

$$u(x,t) = A_0 \sin\left(\frac{2\pi}{L}\ x\right)\ \cos(w_2\, t)$$



y tiene dos puntos nodales en el centro, equiespaciados. Aquí $w_3 > w_2$.

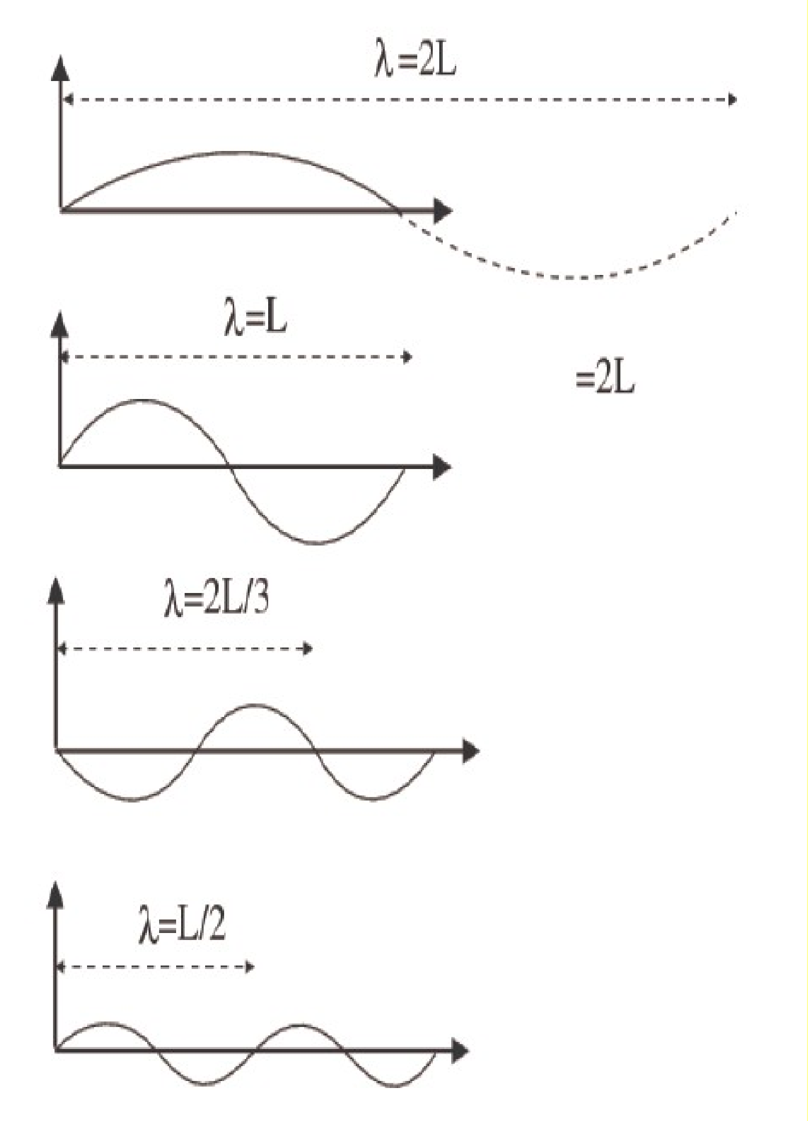
$$w_2 > w_1$$

Ahora recordamos que el número de onda k está relacionado con la longitud de onda

$$\boxed{\lambda = \frac{2\pi}{k}}$$

- Si $n = 1$ entonces $\lambda_1 = 2\pi/k_1 = 2\pi/(\pi/L) = 2\,L$.
- Si $n = 2$ entonces $\lambda_2 = 2\pi/k_2 = 2\pi/(2\pi/L) = L$.
- Si $n = 3$ entonces $\lambda_3 = 2\pi/k_3 = 2\pi/(3\pi/L) = \frac{2}{3}\,L$.
- Si $n = 4$ entonces $\lambda_4 = 2\pi/k_3 = 2\pi/(4\pi/L) = \frac{1}{2}\,L$.

lo que está bosquejado en la figura siguiente para los distintos modos:



De modo que la **longitud de onda** $\lambda = 2\pi/k$ mide la longitud en que ocurre una "oscilación" espacial.

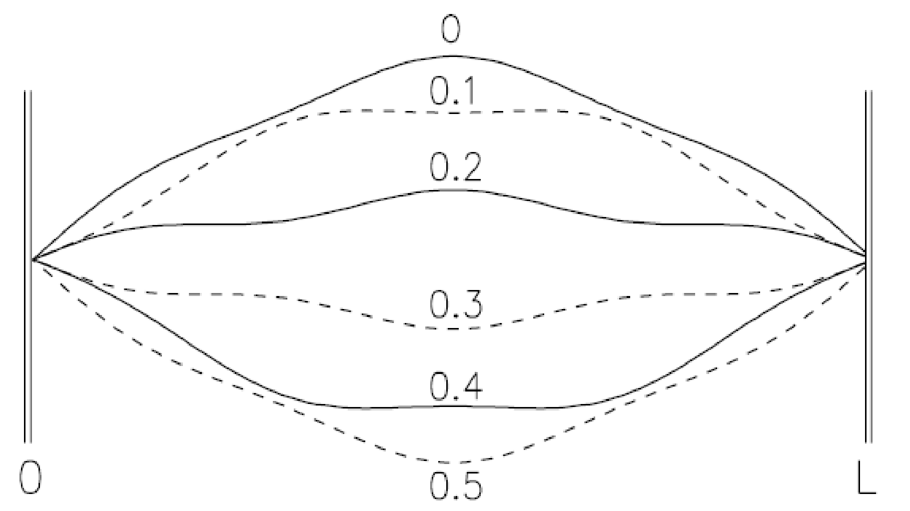
Superposición de Armónicos

Una vibración arbitraria de una cuerda se puede entender con el resultado de la superposición de la vibración de muchos modos normales (armónicos).
¿De cuales? Dependerá de cómo se golpee la cuerda.
Notar que el sonido será generado por la superposición de una serie armónica.

En la sección anterior vimos que una cuerda puede moverse (oscilar), en forma regular, de distintas maneras (los distintos armónicos). Sin embargo, no son éstos los únicos movimientos posibles. De acuerdo con el principio de superposición, un movimiento de la cuerda en el que estén presentes varios armónicos también es posible.

De hecho, al pulsar, por ejemplo, una cuerda de guitarra, el movimiento resultante no corresponderá al asociado a un armónico puro, sino que siempre será el resultado de una *superposición* de numerosos armónicos.

Ilustramos una suma de armónicos en la figura 3.6, para el caso particular de una cuerda que oscila simultáneamente en el estado fundamental y el quinto armónico.



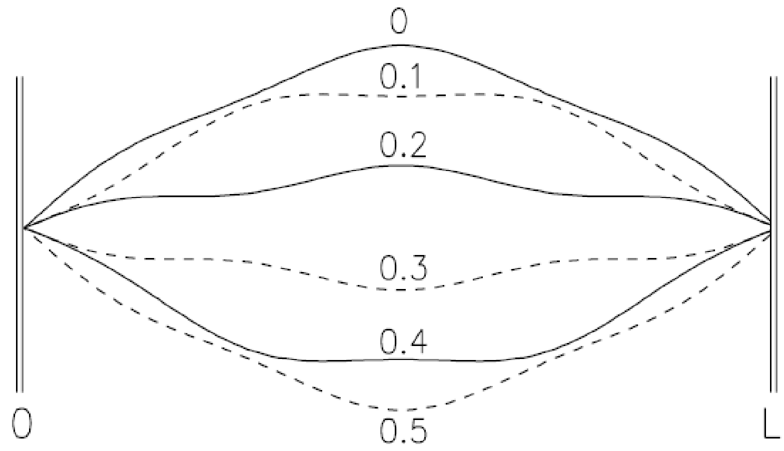


Figura 3.6: Cuerda oscilando en una superposición del estado fundamental y del quinto armónico. Se muestra la deformación de la cuerda para seis instantes entre $t = 0$ y $t = T/2$, en incrementos de un décimo de período.

Notemos que:

1. Para todos los armónicos de una cuerda (con extremos fijos), el desplazamiento de la cuerda en los extremos es nulo; por consiguiente, también lo será para cualquier suma de ellos.

2. Al sumar movimientos que tienen frecuencias que son múltiplos enteros de una frecuencia ν_1, el movimiento resultante será necesariamente periódico, con un período $T = 1/\nu_1$.

De la observación anterior deducimos que si el movimiento de una cuerda consiste en una superposición de varios armónicos, entonces seguirá teniendo la frecuencia del armónico fundamental.

Aun cuando el movimiento de una cuerda se deba a una suma de distintos modos de oscilación (de frecuencias ν_1, $2\nu_1$, $3\nu_1$, $4\nu_1$, etc.), el movimiento resultante tendrá la frecuencia ν_1, siendo, por consiguiente, también ésa la frecuencia del tono generado por ella.

INSTRUMENTOS MUSICALES

Artesanía y Ciencia

Herbert Massmann Rodrigo Ferrer

Páginas 47-51

¿ Y qué pasó con las soluciones tipo onda viajera?

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{V^2}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$$

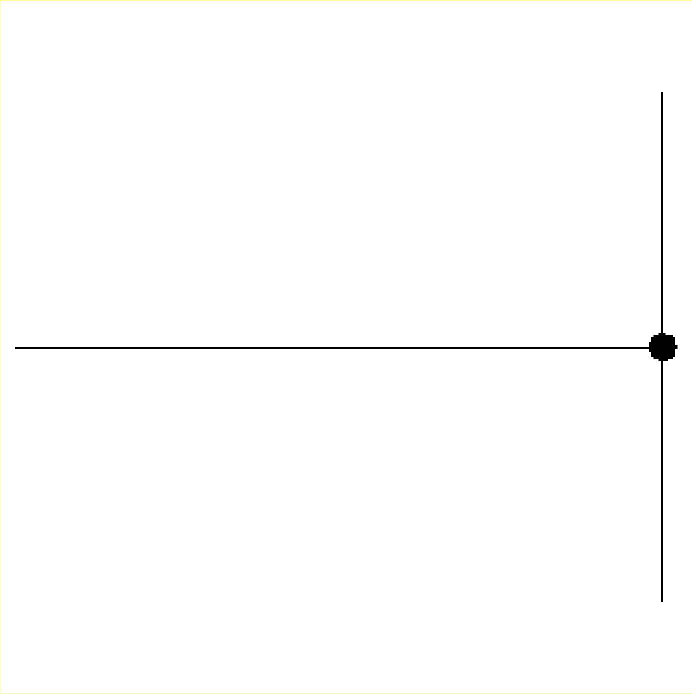
Soluciones a esta ecuación

$u(x,t) = f(x - vt)$ Si el pulso viaja a la derecha

$u(x,t) = f(x + vt)$ Si el pulso viaja a la izquierda

$T(x,t) = f(x - vt) + g(x + vt)$

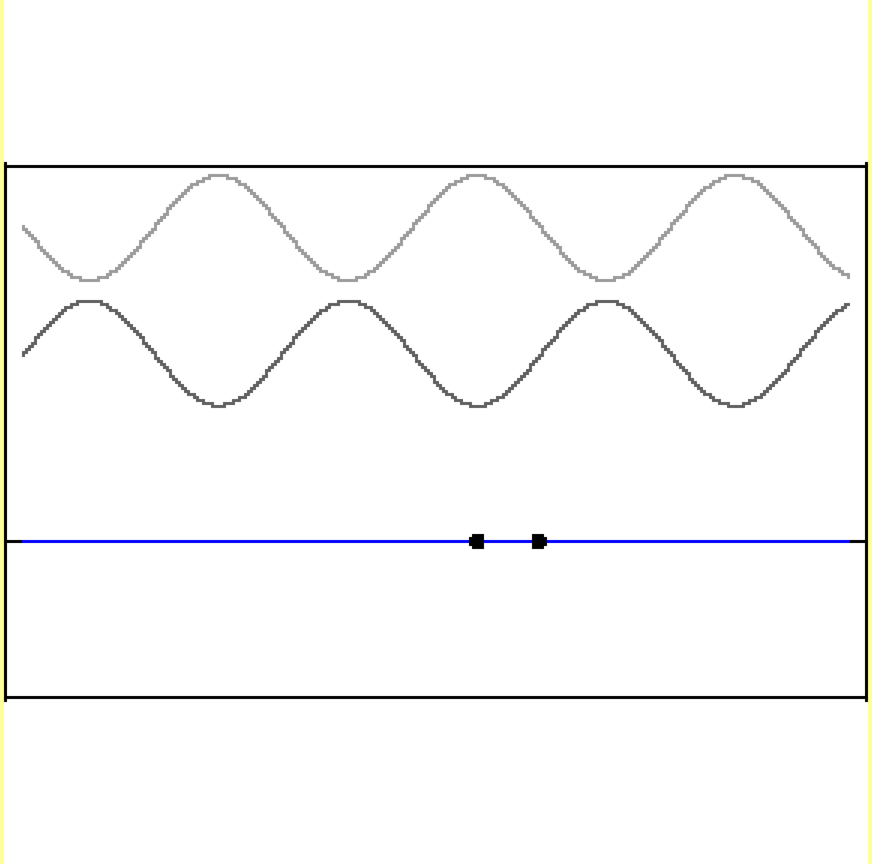
Onda viajera y un extremo fijo



<u>Reflexión de una onda en un extremo fijo:</u> El pulso al chocar contra un extremo fijo genera un pulso de igual amplitud y forma que viaja con la misma rapidez que el pulso original pero en dirección contraria y además invertido. El pulso reflejado tiene la misma polaridad que el pulso original.

"Si una onda llega a un extremo fijo de una cuerda se refleja con una cambio de signo."

De igual modo podemos demostrar que si enviamos un tren de ondas armónicas viajeras hacia la derecha en una cuerda de largo finito L, pasado un cierto tiempo, obtendremos la interferencia de ondas viajeras que viajan hacia la derecha y que viajan hacia la izquierda.



Interferencia de dos trenes de ondas armónicas de igual frecuencia y amplitud que viajan en sentidos contrarios en una cuerda tensa.

$$y_1(x,t) = y_m \, Sen[kx - wt]$$

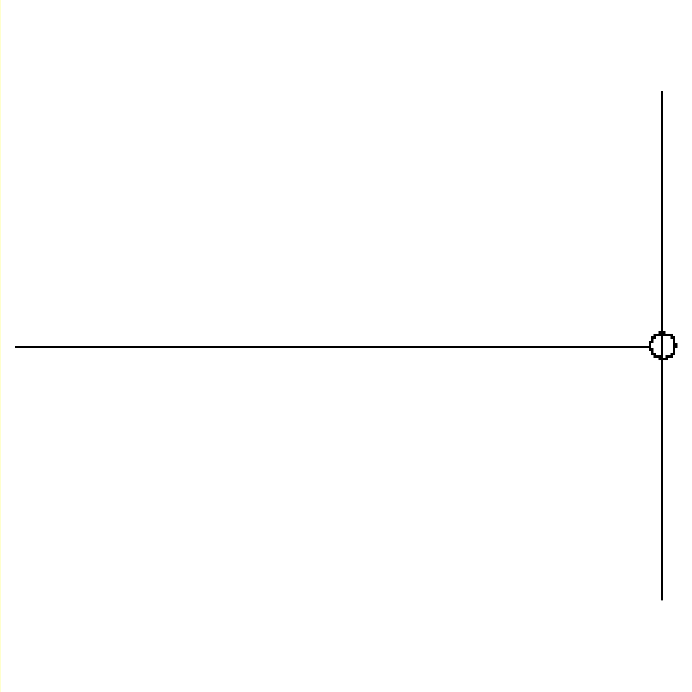
$$y_2(x,t) = y_m \, Sen[kx + wt]$$

$$Y(x,t) = y_1 + y_2$$

Resultado

$$Y(x,t) = 2y_m \, Sen[kx] \, Cos[wt]$$

Cuerda de Largo L con un extremo fijo y el otro libre



Solución: Ver pizarra

Fin