Física II, Ondas

Ondas Viajeras

Profesor: Pedro Labraña
Departamento de Física,
Universidad del Bío-Bío

Carrera: Ingeniería Civil en Informática
Créditos: 5

Ondas en Medios Elásticos

Introducción, Ondas Mecánicas, Tipos de Ondas, ***Ondas viajeras, La ecuación de Onda****, El Principio de Superposición, Ondas en Cuerdas, Ondas Estacionarias, Potencia e Intensidad en el Movimiento Ondulatorio, Ondas Sonoras, El Efecto Doppler.*

Ondas viajeras

$u(x,t) = f(x - vt)$ Si el pulso viaja a la derecha

$u(x,t) = f(x + vt)$ Si el pulso viaja a la izquierda

Pregunta 2:

a) Determine cuáles de las siguientes expresiones describen a una onda viajera (son dos). Justifique su respuesta.

$$\Psi_1(x,t) = e^{-(a^2\,x^2 + b^2\,t^2 - 2a\,b\,x\,t)} \tag{1}$$

$$\Psi_2(x,t) = A\left[Cos\left(\frac{x}{a} + \frac{t}{b}\right)\right]^2 \tag{2}$$

$$\Psi_3(x,t) = A\,Sen(a\,x^2 - b\,t^2) \tag{3}$$

$$\Psi_4(x,t) = A\,Sen(a\,x)\,Cos(b\,t) \tag{4}$$

Para las dos funciones que representan ondas viajeras:

b) Indique la dirección del movimiento

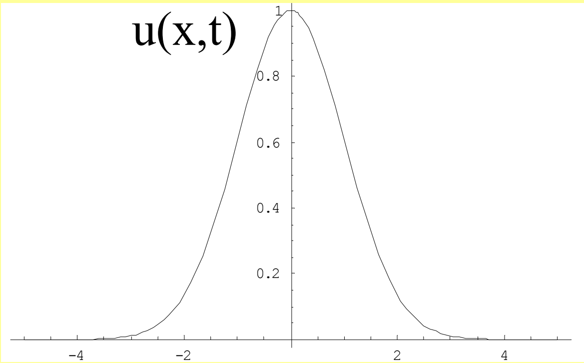
c) Si $a < b$, indique que onda es más rápida.

Ejemplo de onda viajera

$$u(x,t) = e^{-(x-t)^2}$$

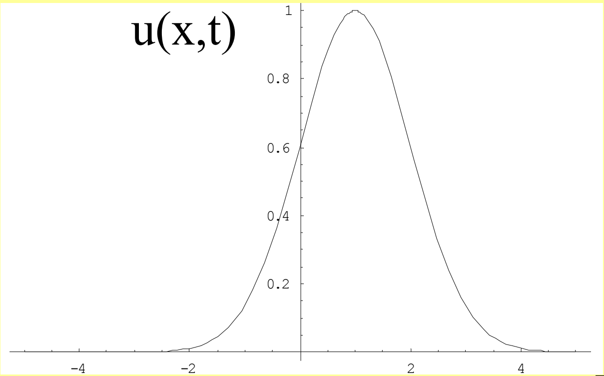
En este caso corresponde a una onda que viaja hacia la derecha. Si x se mide en metros y t en segundos, entonces en este caso v = 1 m/s

t = 0



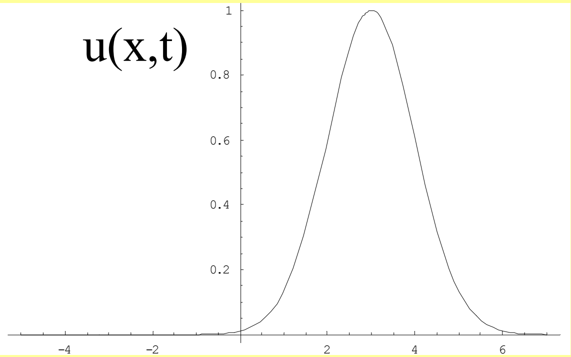
x

t = 1



x

t = 3



x

Ecuación de onda

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{V^2}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$$

TAREA: Demostrar que las funciones f(x – vt) y g(x + vt) son soluciones de esta ecuación.

La ecuación de onda es lineal luego si las funciones f(x – vt) y g(x + vt) son soluciones de la ecuación de onda tenemos que T(x,t) también será una solución de esta ecuación

T(x,t) = f(x – vt) + g(x + vt)

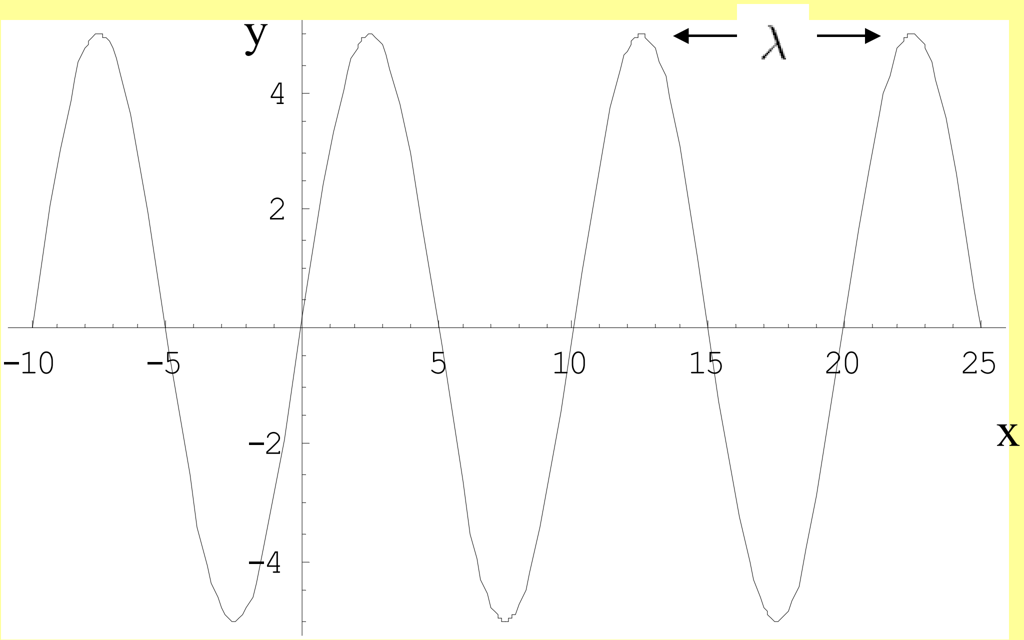
Ver pizarra

Ondas armónicas

Consideramos una forma particular de onda viajera, cuya importancia se comprenderá pronto. Además para fijar ideas consideraremos que es una onda transversal que viaja sobre una cuerda horizontal.

Supóngase que en t = 0 tenemos en la cuerda un tren de onda dado por:

$$y = y_m \, Sen[2\pi \, \frac{x}{\lambda}]$$



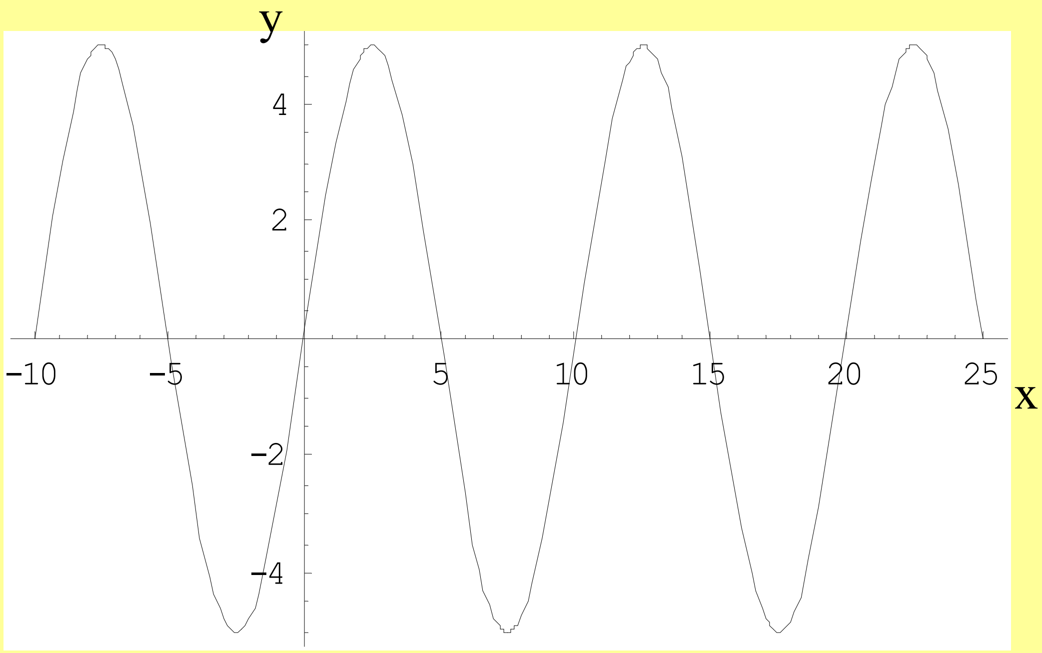
La amplitud máxima es y_m

El valor de la elongación transversal y, es el mismo en x y en (x + λ)

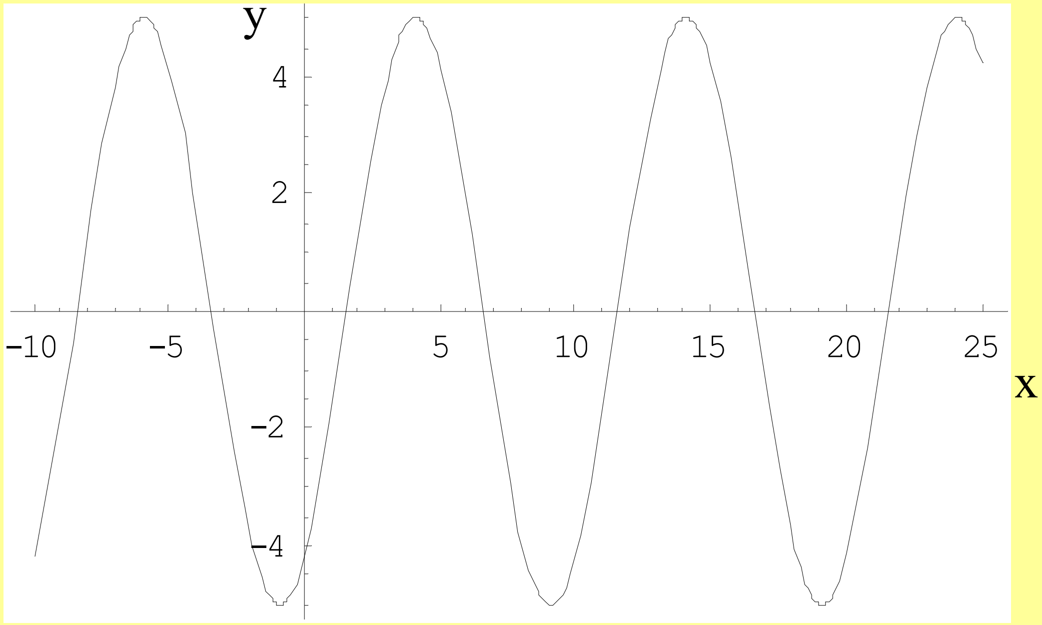
λ = Longitud de onda

Ahora consideramos que al transcurrir un tiempo t la onda avanza hacia la derecha con velocidad v. Luego la ecuación que describe a la onda en el tiempo t es:

$$y(x,t) = y_m \, Sen[\frac{2\pi}{\lambda}\,(x - vt)]$$



$t = 0$



$t \neq 0$

Definimos al periodo T como el tiempo necesario para que la onda avance una distancia de una longitud de onda λ

Luego tenemos que $$\lambda = vT$$

Rescribimos la ecuación para la onda

$$y(x,t) = y_m\, Sen\left[2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)\right]$$

Podemos notar que esta función tiene "periodo" espacial λ (longitud de onda)

Tiene periodo temporal T

Definimos el número de onda y la frecuencia angular

Número de onda

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

El número de onda tiene unidades de 1/m en el sistema MKS

Frecuencia angular

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

Luego la ecuación de una onda armónica que viaja a la derecha será

$$y(x,t) = y_m\, Sen[kx - \omega t]$$

De igual modo una onda armónica que viaja a la izquierda queda descrita por

$$y(x,t) = y_m\, Sen[kx + \omega t]$$

La expresión general para una onda viajera que viaja hacia la derecha será

$$y(x,t) = y_m \, Sen[kx - \omega t + \delta]$$

Donde δ es una constante (ángulo de fase o fase inicial)

Notemos que estas ondas (trenes de onda) son de extensión infinita. Es decir, para cualquier valor fijo de t, x varía de – infinito a + infinito.

Además cada onda tiene sólo una frecuencia constante y por consiguiente se dice que es monocromática

Ejemplos de trenes de ondas que no son ondas armónicas

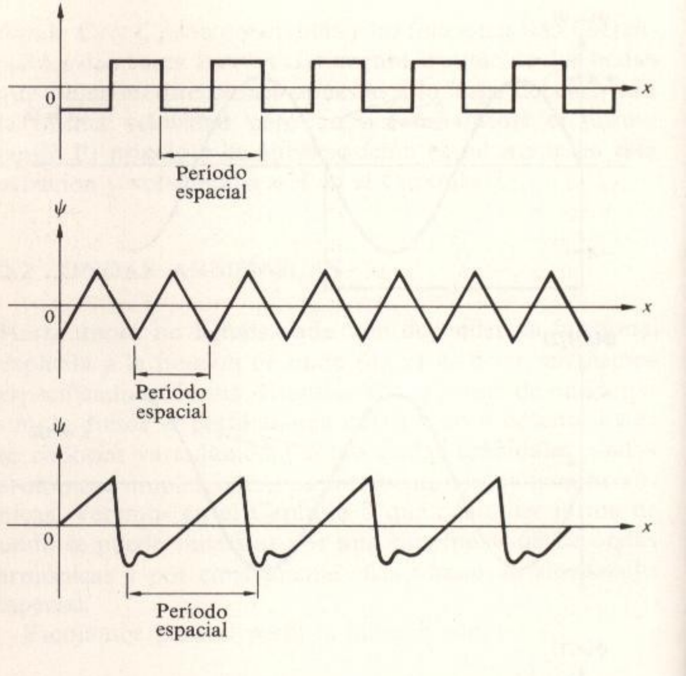


Fig. 2.6 Ondas periódicas anarmónicas.

Fase y Velocidad de Fase

$$y(x,t) = y_m \, Sen[kx - \omega t + \delta]$$

El argumento completo de la función seno se conoce como la fase Φ de la onda:

$$\Phi = kx - \omega t + \delta$$

La derivada temporal de Φ manteniendo x constante, es la rapidez de cambio de la fase con el tiempo:

$$\left|\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right|_{x=Cte.} = w$$

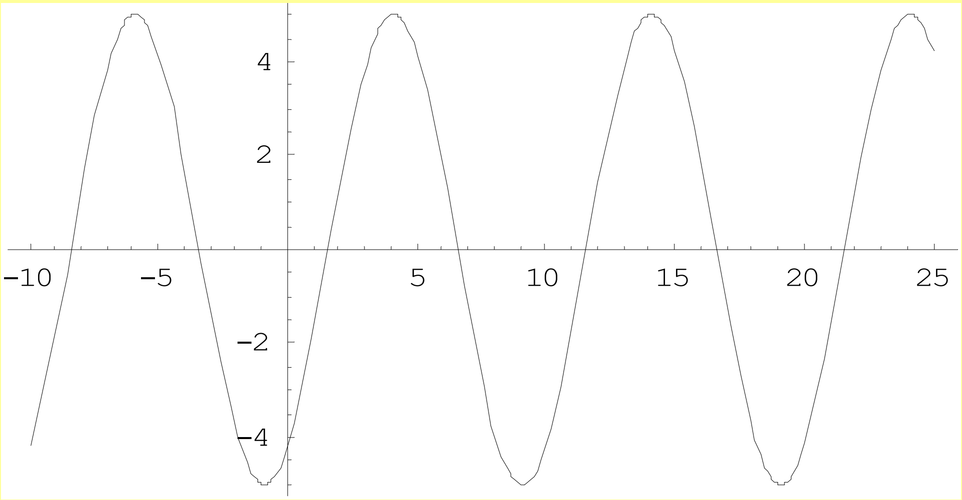
La derivada espacial de Φ manteniendo t constante, es la rapidez de cambio de la fase con la posición:

$$\left.\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right|_{t=Cte.} = k$$

Para cada valor de la fase tenemos un valor diferente para y(x,t)

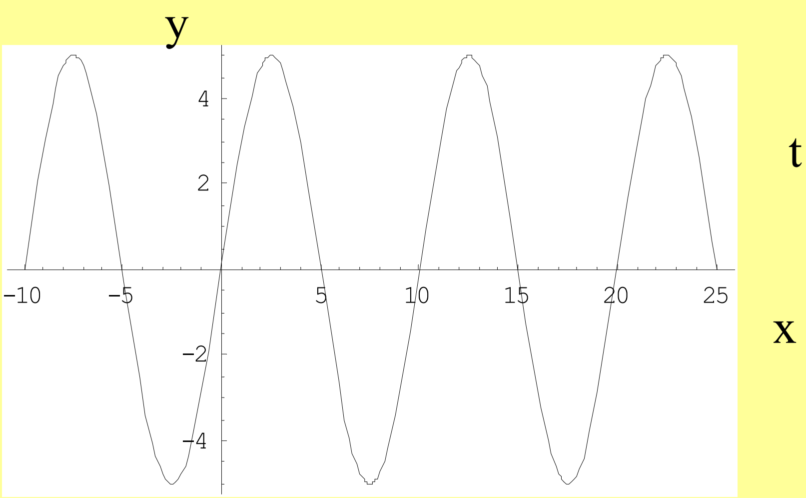
$$y(x,t) = y_m\, Sen[kx - \omega t + \delta]$$

$$\Phi = kx - \omega t + \delta$$

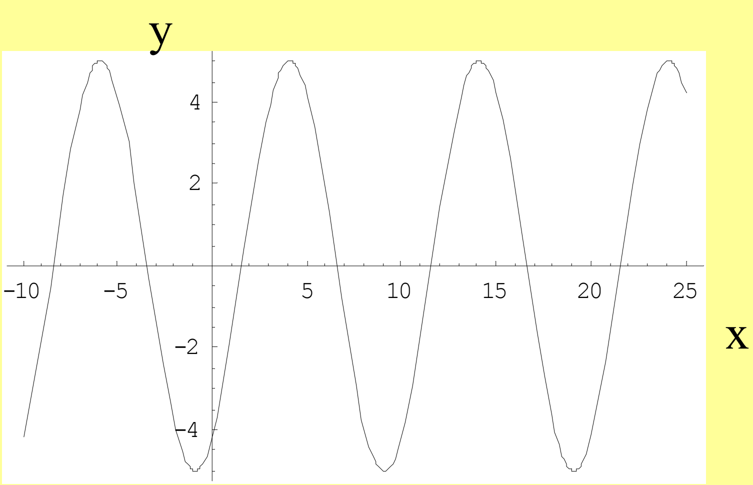


Si nos preguntamos como debemos movernos en la dirección de x de modo que al avanzar el tiempo mantengamos el valor de la fase constante obtenemos que:

$$\Phi = kx - \omega t + \delta$$



$t = 0$



$t \neq 0$

Si nos quedamos quietos por ejemplo en x = 0 y dejamos que el tiempo transcurra la fase variará con velocidad ω. Pero si nos movemos hacia la derecha podemos lograr mantener el valor de la fase Φ constante.

Lo que tenemos que hacer es conseguir que una variación en x (dx) cancele la variación en t (dt)

Queremos

$$kx - wt + \delta = Cte.$$

Por lo tanto

$$kdx - wdt = 0$$

Luego debemos movernos a la derecha esta distancia para mantener la fase constante.

$$dx = \frac{w}{k}dt$$

O dicho de otra manera debemos movernos a la derecha con velocidad w/k para mantener la fase constante

$$\frac{dx}{dt} = \frac{w}{k} = V_f$$

$$\frac{w}{k} = V_f$$

Velocidad de fase o "velocidad de la onda"

De las definiciones para ω y para k obtenemos que

$$\frac{w}{k} = V_f = V$$

Más adelante veremos que podemos definir otra velocidad que caracteriza a un fenómeno ondulatorio denominada velocidad de grupo

$$V_g = \frac{dw}{dk}$$

La relación de dispersión

Función que relaciona al número de onda con la frecuencia angular de la onda.

Podemos entender a la frecuencia angular como una función del número de onda ω(k). Para el caso de la ecuación de onda que estamos estudiando esta relación es muy simple

$$v = \frac{\lambda}{T} = \frac{\omega}{k}$$

$$\boxed{w(k) = vk}$$

El principio de superposición

Es un hecho experimental que para muchas clases de ondas dos o más ondas puedan atravezar el mismo espacio independientemente unas de otras.

Ej. La luz que recibimos de los objetos
Ej. Sonido: Podemos distingir las notas de los diversos instrumentos que estén tocando en una orquesta.

El hecho de que las ondas actúen independientemente una de la otra, significa que el movimiento de cualquier partícula en un momento dado es simplemente la suma de los movimientos que le darían las ondas individuales solas.
Este proceso de suma se denomina superposición.

Fin