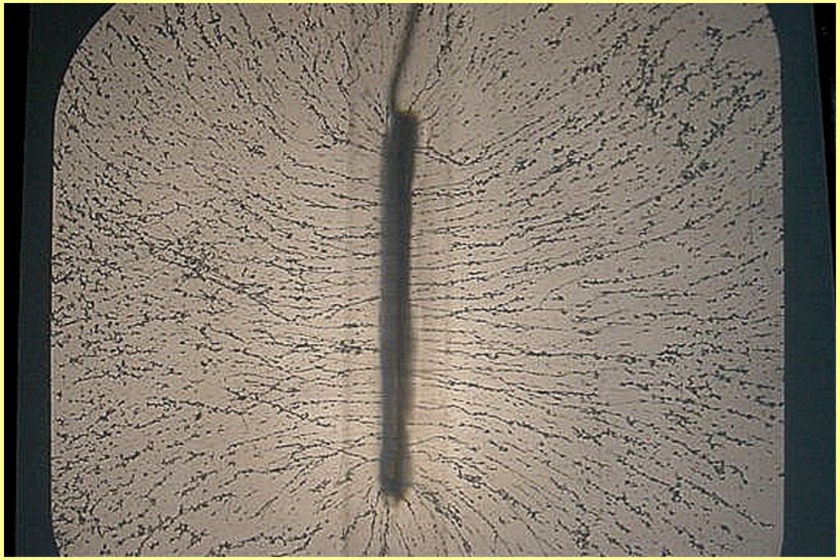
Campos Electromagnéticos

“Campo Eléctrico Generado por Distribuciones Continuas de Carga II”

Problemas: Distribuciones lineales de carga



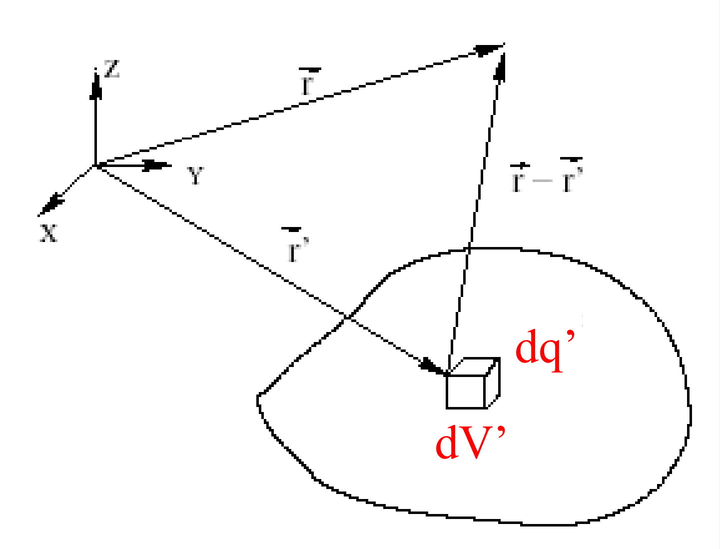
Profesor: Pedro Labraña
Departamento de Física,
Universidad del Bío-Bío

Carrera: Ingeniería Civil en Automatización
Créditos: 5

Campos Eléctricos

Cargas Eléctricas, Aisladores y conductores, Ley de Coulomb, Campo Eléctrico. Movimiento de partículas cargadas en campos eléctricos uniformes. ***Campo eléctrico de distribuciones continuas****. Líneas de Campo Eléctrico.*

Clases anterior



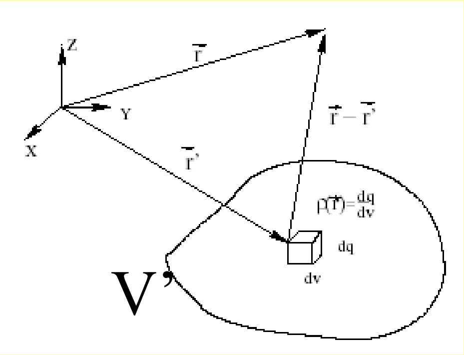
Un elemento de volumen dV' contendrá un elemento de carga dq'. Este elemento de carga generara un elemento de campo eléctrico (diferencial de campo eléctrico) dado por la siguiente expresión:

$$d\vec{E}(\vec{r}) = K \frac{dq'}{||\vec{r}-\vec{r}'||^3}(\vec{r}-\vec{r}')$$

Luego el campo eléctrico total generado por la distribución será la "suma" de estos diferenciales de campo eléctrico.

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int d\vec{E}(\vec{r})$$

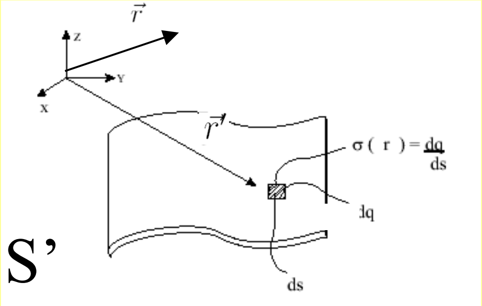
Distribución volumétrica



$$dq' = \rho(\vec{r}')d^3r'$$

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{V'}\frac{\rho(\vec{r}')(\vec{r}-\vec{r}')}{||\vec{r}-\vec{r}'||^3}d^3r'}$$

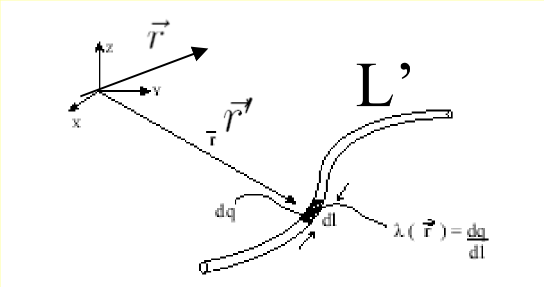
Distribución superficial



$$dq' = \sigma(\vec{r}')d^2r'$$

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{S'}\frac{\sigma(\vec{r}')(\vec{r}-\vec{r}')}{||\vec{r}-\vec{r}'||^3}d^2r'}$$

Distribución lineal



$$dq' = \lambda(\vec{r}')dr'$$

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{L'}\frac{\lambda(\vec{r}')(\vec{r}-\vec{r}')}{||\vec{r}-\vec{r}'||^3}dr'}$$

Algunos ejemplos

1) Calcular el campo eléctrico debido a una carga uniformemente distribuida a lo largo de una línea infinita

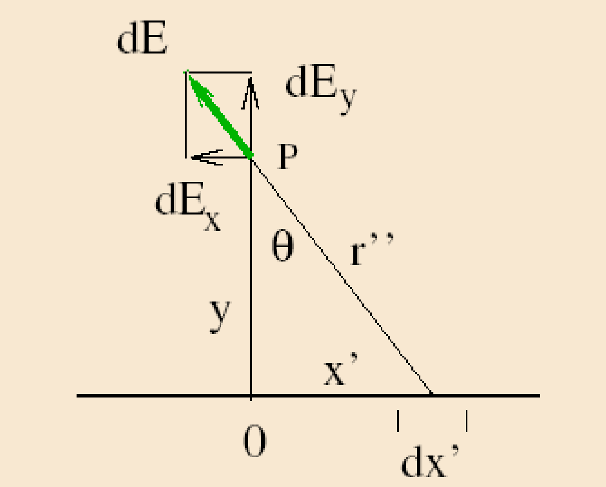
Tarea

Respuesta

$$d\vec{E}(\vec{r}) = K\,\frac{dq'}{||\vec{r}-\vec{r}'||^3}(\vec{r}-\vec{r}')$$

$$dq' = \lambda(\vec{r}')dr'$$

Para resolver este problema utilizamos la ecuación , donde $\vec{r} = 0\hat{\imath} + y\hat{\jmath}$, $\vec{r}' = x'\hat{\imath} + 0\hat{\jmath}$, $dr' = dx'$ y $\lambda(\vec{r}') = \lambda = \text{const.}$. También $\vec{r}-\vec{r}' = r''\hat{r}'' = (y^2 + x'^2)^{1/2}\hat{r}''$.



Notar que trabajamos en cartesianas

por lo tanto la magnitud de dE es : $k\dfrac{dq}{r''^2} = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{\lambda dx'}{y^2 + x'^2}$

La formula anterior nos da la magnitud del campo debido a $dq = \lambda dx'$, en un punto del eje de las y, i.e. para $x = 0$. El resultado no depende de la eleccion de x, ya que la línea es infinita. Para calcular el campo $\vec{E}$ debemos calcular las componentes x e y de $d\vec{E}$ antes de integrar. Sin embargo podemos notar que por simetría la componente x es cero. Para obtener dE_y debemos mutiplicar por el coseno del angulo correspondiente:

$$\cos\theta = \frac{y}{\sqrt{x'^2 + y^2}}$$

y después integrar. Así llegamos a:

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_o}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{y^2 + x'^2}\frac{y}{\sqrt{x'^2 + y^2}}dx'\,\hat{\jmath} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_o y}\,\hat{\jmath}$$

2) Considere un segmento de recta de largo L cargado con densidad de carga uniforme, ubicado a lo largo del eje z, con el origen en el centro del segmento.

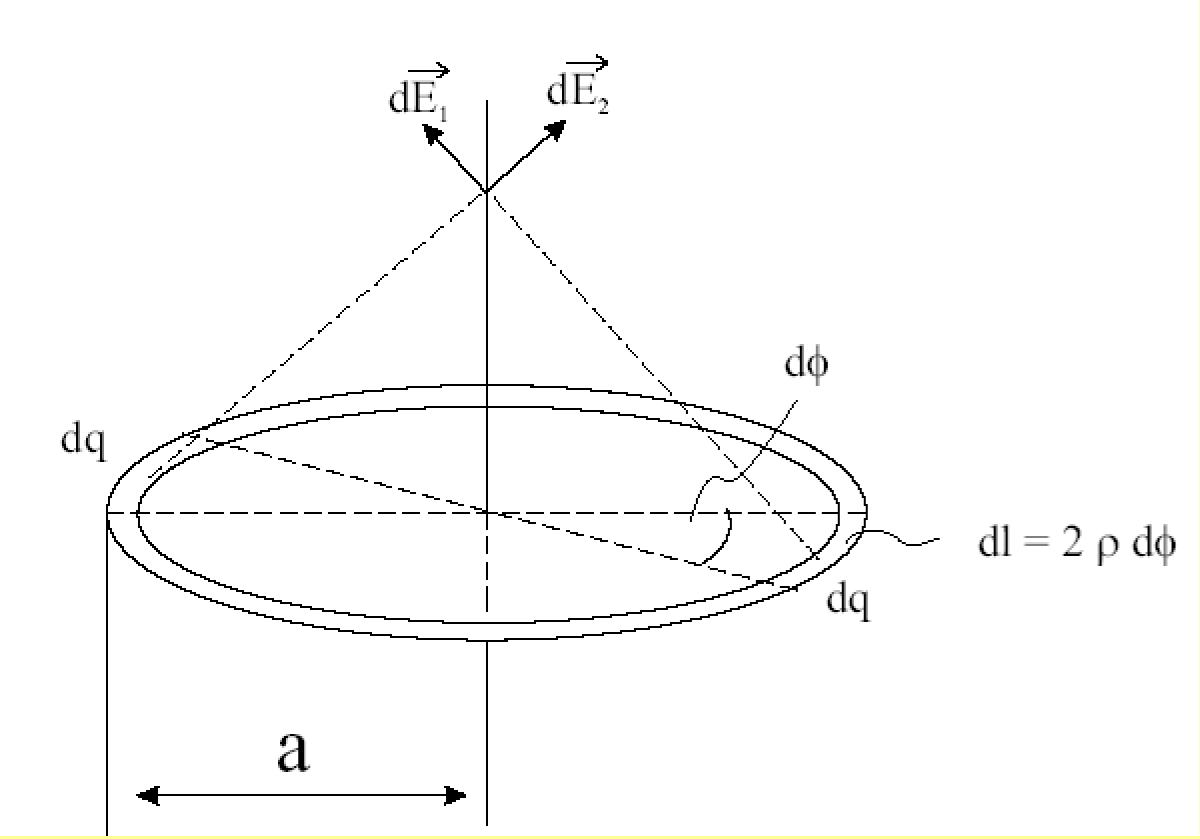
a) Encuentre el campo eléctrico producido por esta distribución de carga en todo el espacio.
b) Considere el límite $r >> L$ y compare con el ejemplo anterior.

(Problema 5 de la guía 2)

Respuesta ver pizarra

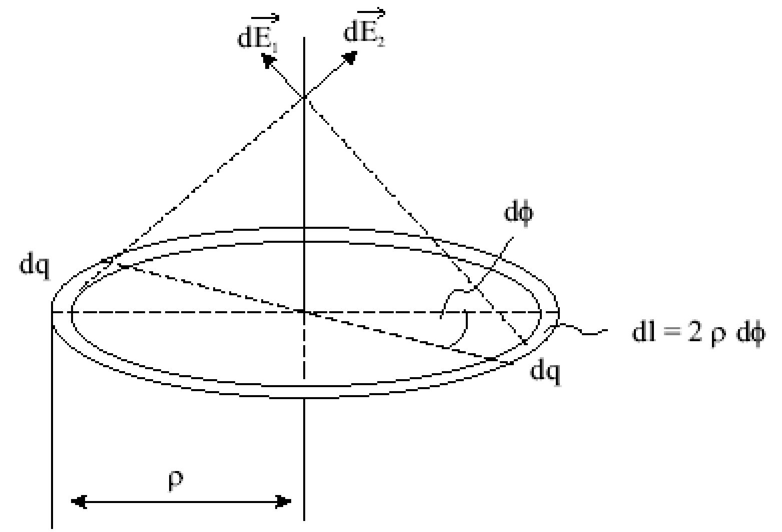
Ejemplo 3

Calcular el campo eléctrico creado sobre su eje axial por un anillo delgado de radio **a**, con una distribución uniforme de carga λ



Respuesta del problema

Rpta. Nos aprovecharemos de un resultado anterior. Un elemento de carga dq sobre el anillo producira un campo como el que muestra la figura.



Si en el extremo opuesto del anillo escogemos otro elemento infinitesimal de carga dq de la misma magnitud, como vimos en los ejemplos de la sección ??, los campos generados por cada uno de estos dos elementos infinitesimales se superponen (suman) para dar una componente neta a lo largo del eje axial, y con magnitud

$$dE_z = \frac{2K\,z\,dq}{(\rho^2+z^2)^{3/2}}$$

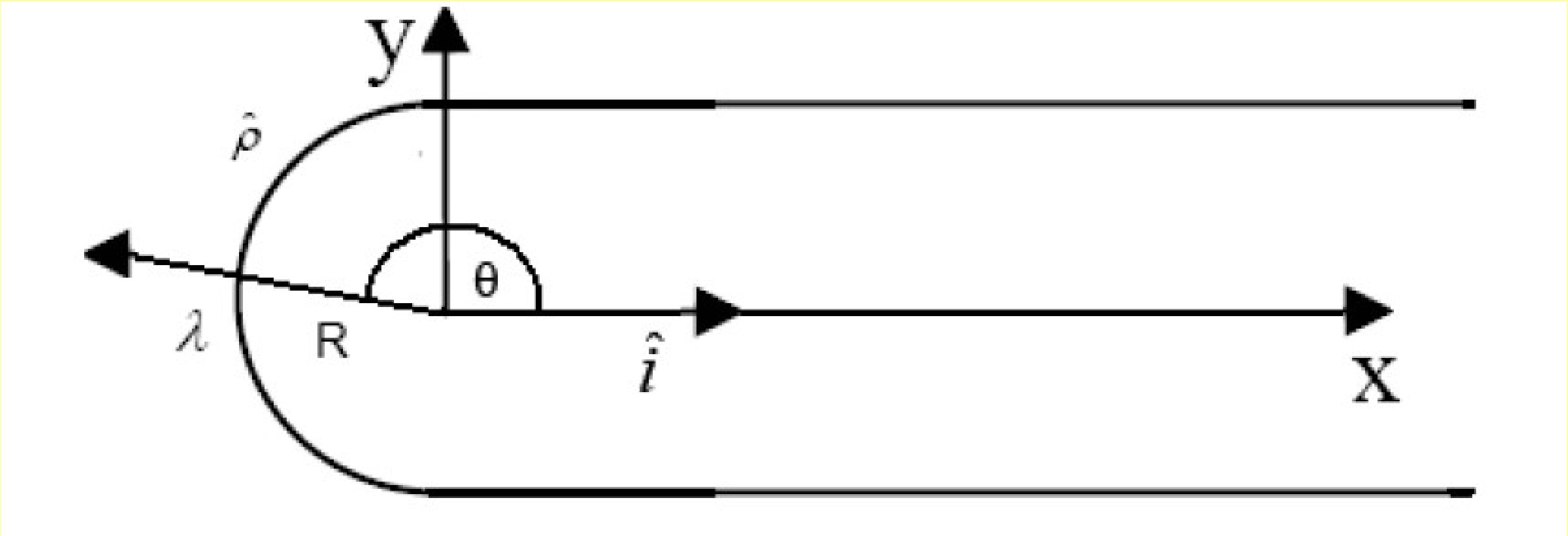
en que z es la distancia de donde se ubica la carga de prueba al plano que contiene al anillo. Podemos reescribir la carga $dq = \lambda\ d\ell$ en que $d\ell = \rho\ d\phi$, siendo $d\phi$ un ángulo infinitesimal de integración. Hasta aquí se tiene:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \int_0^{\pi} \frac{2K\,z\,\lambda\rho\,d\phi}{(\rho^2+z^2)^{3/2}}\hat{z} \\ &= 2\pi K\lambda \frac{z\rho}{(\rho^2+z^2)^{3/2}}\hat{z} \end{aligned}$$

La integral se hace entre $\phi = 0$ a $\phi = \pi$ (la mitad de la circunferencia) puesto que ya se ha incluido tanto dq como la carga opuesta a dq en el otro extremo del anillo (esto se hace para no contar 2 veces esta carga).

Guía 2

4-Un alambre infinito con densidad lineal de carga λ se dobla en forma de horquilla como se muestra en la figura 1. Determine el campo eléctrico en el punto O.



Fin