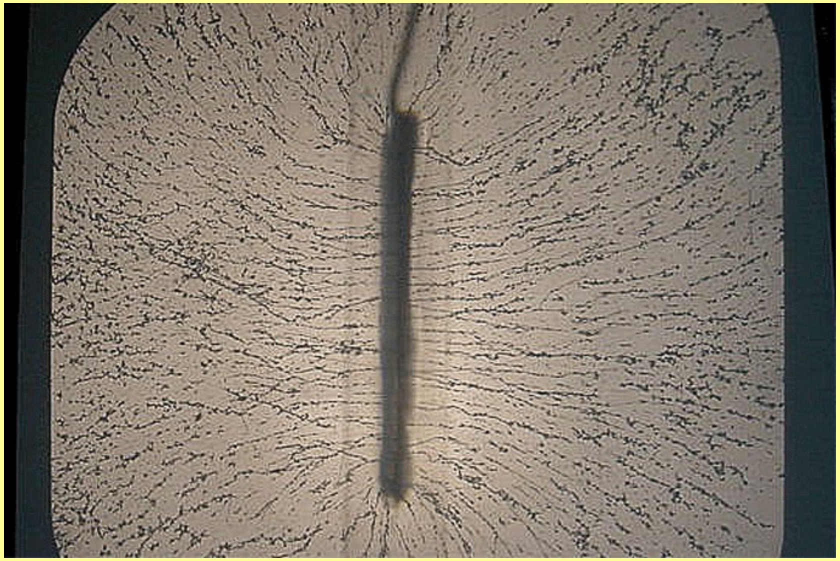
Campos Electromagnéticos
"Campo Eléctrico Generado por Distribuciones Continuas de Carga"



Profesor: Pedro Labraña
Departamento de Física,
Universidad del Bío-Bío

Carrera: Ingeniería Civil en Automatización
Créditos: 5

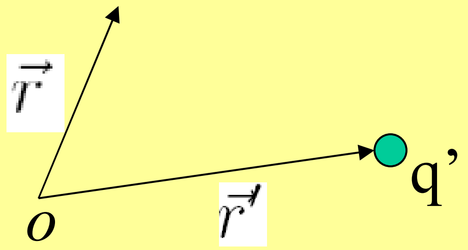
Campos Eléctricos

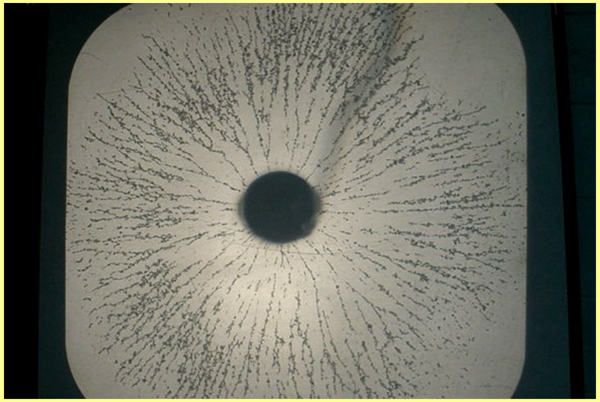
Cargas Eléctricas, Aisladores y conductores, Ley de Coulomb, Campo Eléctrico. Movimiento de partículas cargadas en campos eléctricos uniformes. ***Campo eléctrico de distribuciones continuas****. Líneas de Campo Eléctrico.*

Clases anteriores: Campo Eléctrico

Campo eléctrico de una carga puntual ubicada en $\vec{r}'$ evaluado en $\vec{r}$

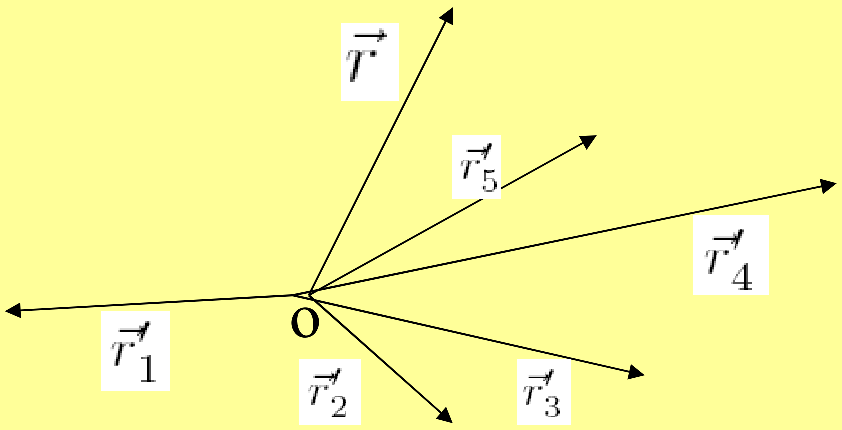
$$\vec{E}(\vec{r}) = K \frac{q'}{||\vec{r}-\vec{r}'||^3}(\vec{r}-\vec{r}')$$



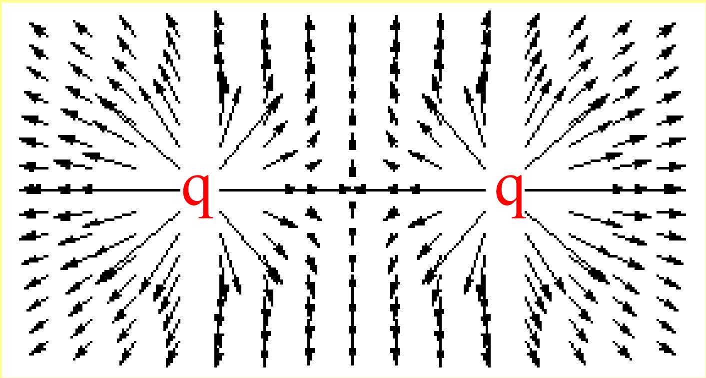


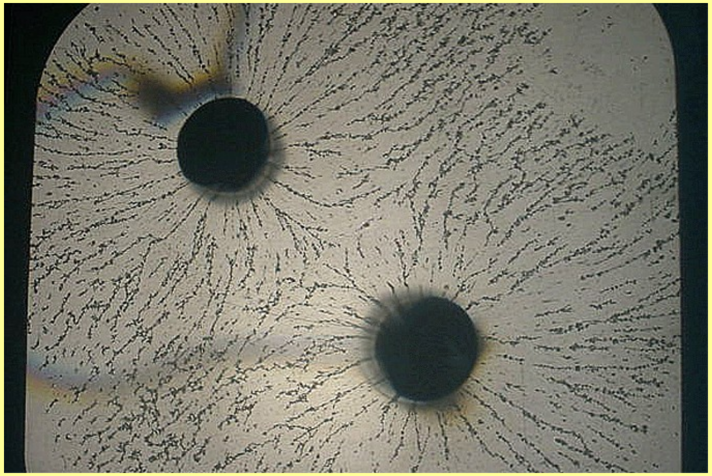
Campo eléctrico de una distribución de cargas puntuales evaluado en $\vec{r}$

$$\vec{E}(\vec{r}) = K \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i'}{||\vec{r} - \vec{r}_i'||^3} (\vec{r} - \vec{r}_i')$$

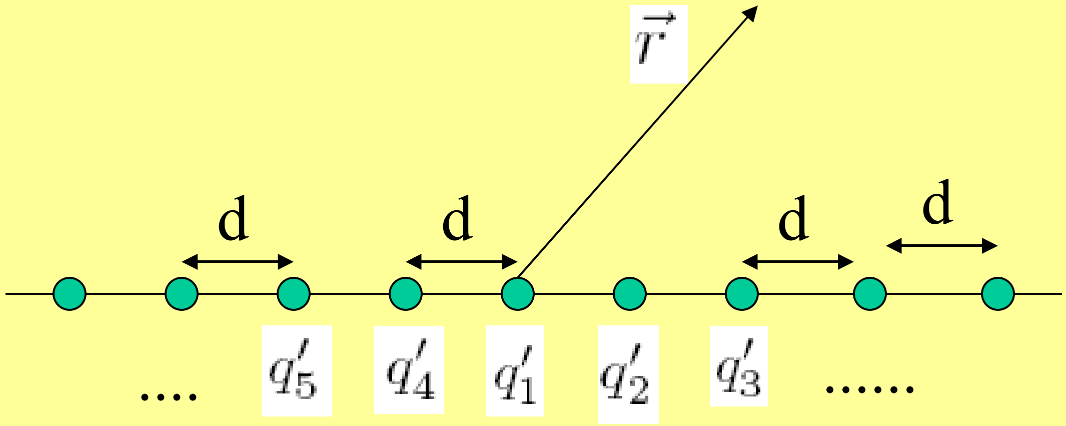


Ej. Dos cargas puntuales del mismo signo





¿Qué pasa si consideramos la siguiente distribución de cargas discretas?



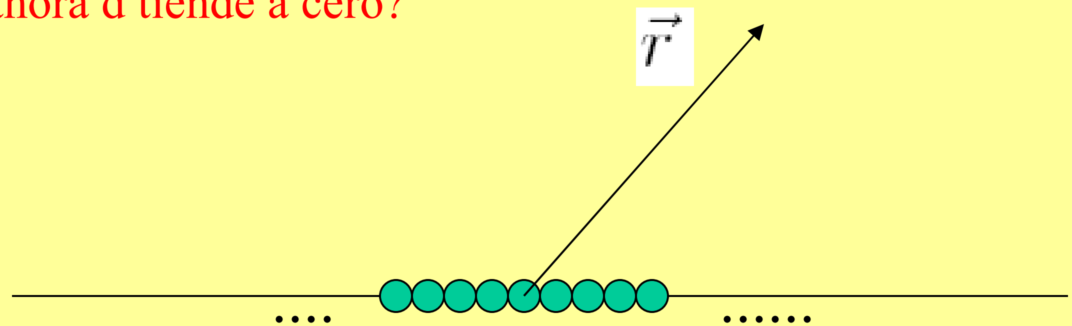
¿Cuanto vale el campo eléctrico en $\vec{r}$?

$$\vec{E}(\vec{r}) = K\,\frac{q_1'}{||\vec{r}-\vec{r_1}'||^3}(\vec{r}-\vec{r_1}') + K\,\frac{q_2'}{||\vec{r}-\vec{r_2}'||^3}(\vec{r}-\vec{r_2}') + K\,\frac{q_3'}{||\vec{r}-\vec{r_3}'||^3}(\vec{r}-\vec{r_3}')$$

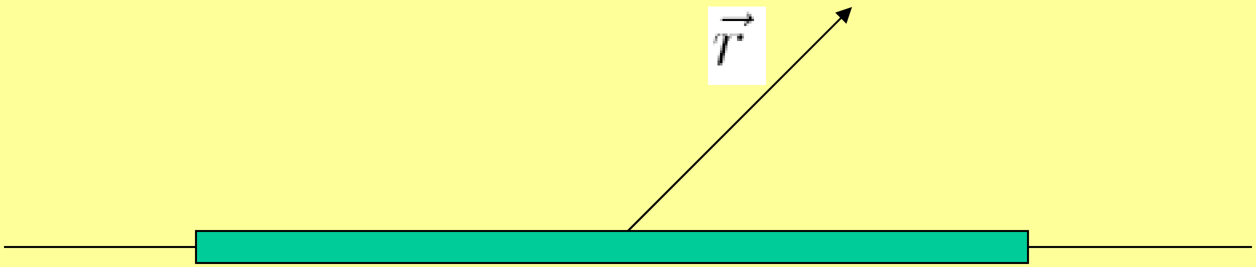
$$+K\,\frac{q_4'}{||\vec{r}-\vec{r_4}'||^3}(\vec{r}-\vec{r_4}') + K\,\frac{q_5'}{||\vec{r}-\vec{r_5}'||^3}(\vec{r}-\vec{r_5}') + \dots$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = K\sum_{i=1}^{N}\frac{q_i'}{||\vec{r}-\vec{r}_i'||^3}(\vec{r}-\vec{r}_i')$$

¿Qué pasa si ahora d tiende a cero?



Podemos considerar que ahora esta es una distribución de carga continua. En particular este caso corresponde a una distribución lineal de carga



¿Cuánto vale ahora el campo eléctrico en $\vec{r}$?

$$\vec{E}(\vec{r}) = K \frac{q_1'}{||\vec{r}-\vec{r_1}'||^3}(\vec{r}-\vec{r_1}') + K \frac{q_2'}{||\vec{r}-\vec{r_2}'||^3}(\vec{r}-\vec{r_2}') + K \frac{q_3'}{||\vec{r}-\vec{r_3}'||^3}(\vec{r}-\vec{r_3}')$$
$$+K \frac{q_4'}{||\vec{r}-\vec{r_4}'||^3}(\vec{r}-\vec{r_4}') + K \frac{q_5'}{||\vec{r}-\vec{r_5}'||^3}(\vec{r}-\vec{r_5}') + \cdots$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = K \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i'}{||\vec{r}-\vec{r}_i'||^3}(\vec{r}-\vec{r}_i')$$

Sólo que ahora hay que tener un poco más de cuidado al realizar esta sumatoria

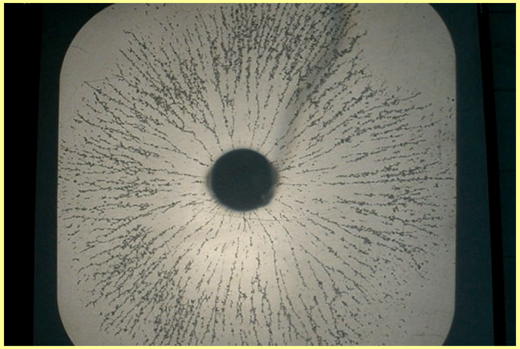
En particular lo que obtenemos es lo siguiente

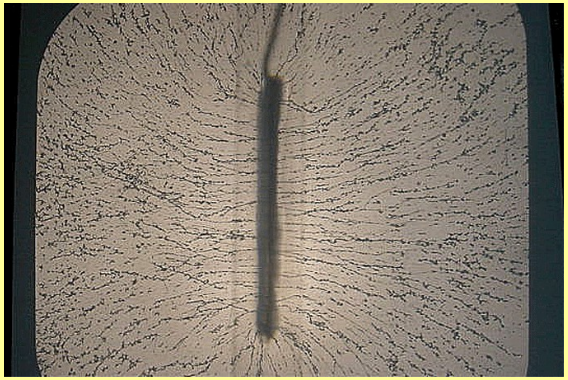
$$\vec{E}(\vec{r}) = K \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i'}{||\vec{r} - \vec{r}_i'||^3}(\vec{r} - \vec{r}_i') \quad \Rightarrow \quad \vec{E}(\vec{r}) = K \int \frac{\lambda(\vec{r}')dr'}{||\vec{r} - \vec{r}'||^3}(\vec{r} - \vec{r}')$$

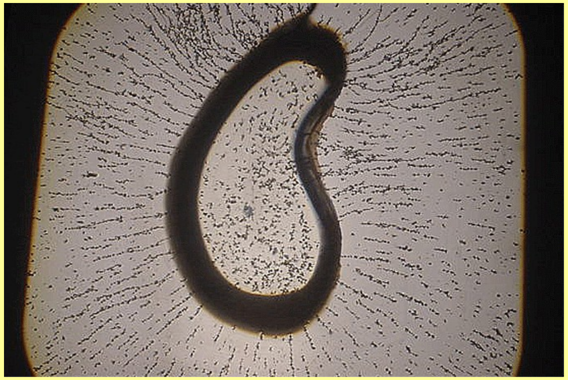
Donde $\lambda(\vec{r}')$ es la densidad de carga por unidad de longitud [C/m]

Ver pizarra !!

Algunos ejemplos de distribuciones continuas de carga eléctrica







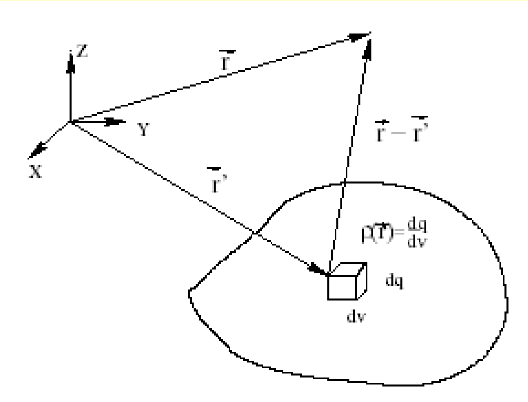
Por medio del uso de aceite, semillas de grama y empleando un pequeño electrodo cilíndrico que se carga con el generador de Wimshurt, se obtienen las líneas de campo.

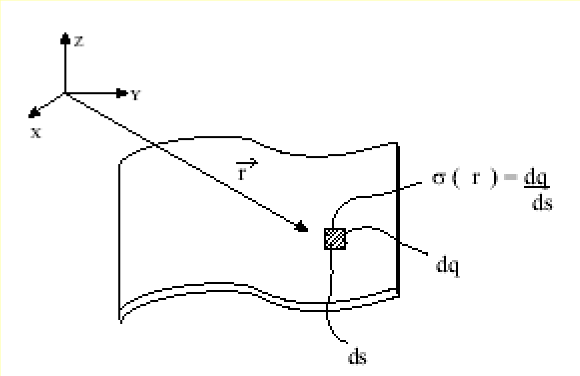
http://ephysics.physics.ucla.edu/MIT/mappingfields/HTML/mappingfields.htm

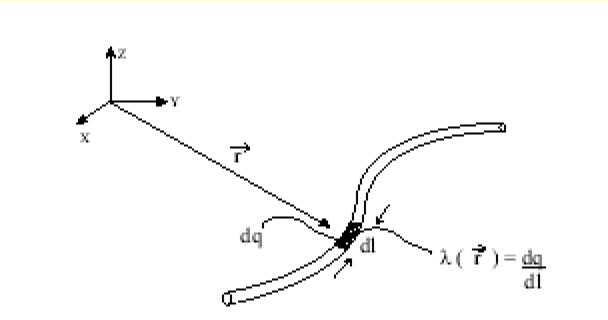
Campo Eléctrico Generado por Distribuciones Continuas de Carga Eléctrica

En la electricidad clásica hablamos de cargas puntuales o cargas discretas y de distribución contínua de cargas, ya sea en un volumen, en una superficie o en una línea. Definimos:

- ρ la densidad de carga por unidad de volumen [C/m^3],
- σ la densidad de carga por unidad de área [C/m^2] y
- λ la densidad de carga por unidad de longitud [C/m].



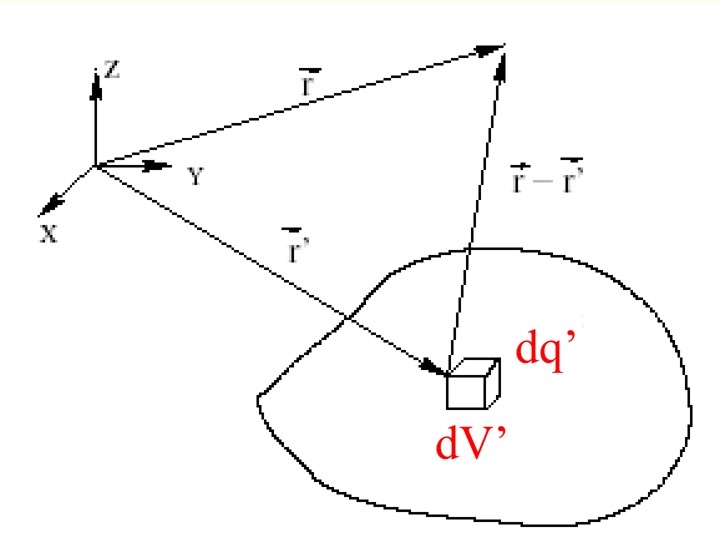




Cada una de estas distribuciones de carga generan un campo eléctrico

El campo eléctrico debido a cada una de estas distribuciones de carga puede considerarse como la sumatoria del campo al que contribuyen las numerosas cargas puntuales que forman las distribuciones de carga.

Consideremos como ejemplo la siguiente distribución de carga volumétrica



Un elemento de volumen dV' contendrá un elemento de carga dq'. Este elemento de carga generara un elemento de campo eléctrico (diferencial de campo eléctrico) dado por la siguiente expresión:

$$d\vec{E}(\vec{r}) = K\,\frac{dq'}{||\vec{r}-\vec{r}\,'||^3}(\vec{r}-\vec{r}\,')$$

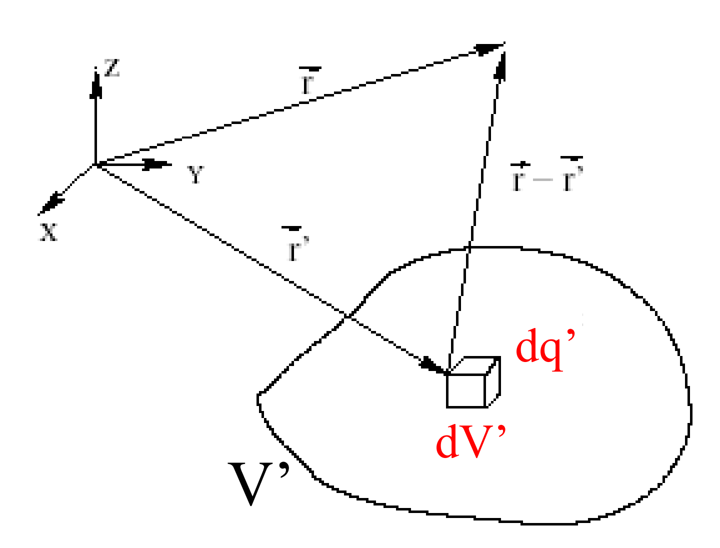
Luego el campo eléctrico total generado por la distribución será "la sumatoria" de estos diferenciales de campo eléctrico

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int d\vec{E}(\vec{r})$$

Luego para las diferentes distribuciones de carga tenemos

Distribución de carga volumétrica

$$d\vec{E}(\vec{r}) = K \frac{dq'}{||\vec{r} - \vec{r}'||^3} (\vec{r} - \vec{r}')$$



$$\vec{E}(\vec{r}) = \int d\vec{E}(\vec{r})$$

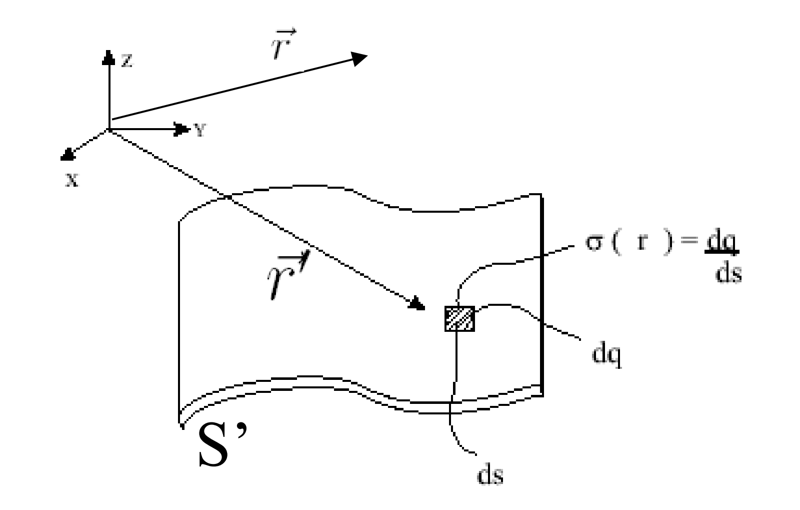
En este caso: $dq' = \rho(\vec{r}')d^3r'$

Donde $\vec{r}'$ es el vector posición de la carga dq'.
También hemos utilizado que dV' = d^3r'

Luego el campo eléctrico para esta distribución será

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho(\vec{r}')(\vec{r} - \vec{r}')}{||\vec{r} - \vec{r}'||^3} d^3r'}$$

Distribución de carga superficial



$$d\vec{E}(\vec{r}) = K \frac{dq'}{||\vec{r} - \vec{r}'||^3}(\vec{r} - \vec{r}')$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int d\vec{E}(\vec{r})$$

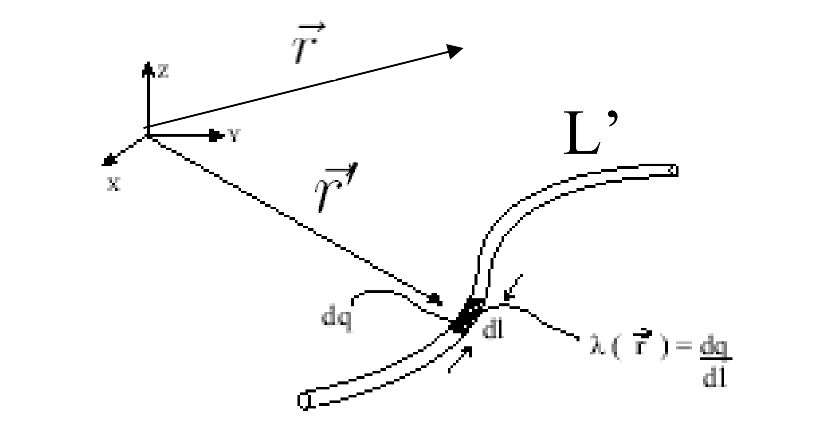
En este caso: $dq' = \sigma(\vec{r}')d^2r'$

Donde $\vec{r}'$ es el vector posición de la carga dq'.

Luego el campo eléctrico para esta distribución será

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{S'} \frac{\sigma(\vec{r}')(\vec{r} - \vec{r}')}{||\vec{r} - \vec{r}'||^3} d^2r'}$$

Distribución de carga lineal



$$d\vec{E}(\vec{r}) = K\,\frac{dq'}{||\vec{r}-\vec{r'}||^3}(\vec{r}-\vec{r'})$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int d\vec{E}(\vec{r})$$

En este caso: $dq' = \lambda(\vec{r'})dr'$

Donde $\vec{r'}$ es el vector posición de la carga dq'.

Luego el campo eléctrico para esta distribución será

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{L'}\frac{\lambda(\vec{r'})(\vec{r}-\vec{r'})}{||\vec{r}-\vec{r'}||^3}dr'$$

Algunos ejemplos

1) Calcular el campo eléctrico debido a una carga uniformemente distribuida a lo largo de una línea infinita

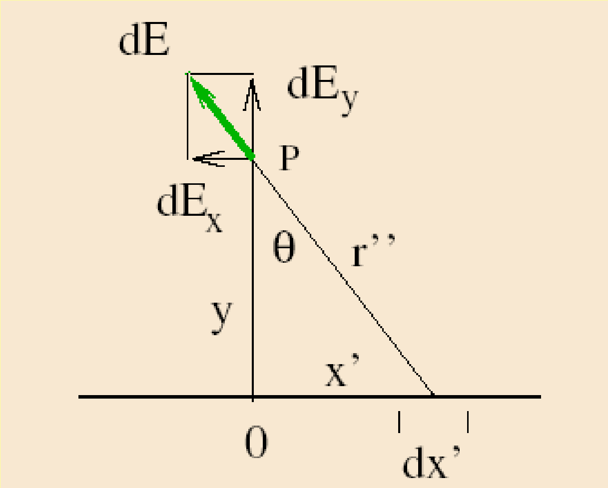
Tarea

Respuesta

$$d\vec{E}(\vec{r}) = K\,\frac{dq'}{||\vec{r}-\vec{r}'||^3}(\vec{r}-\vec{r}')$$

$$dq' = \lambda(\vec{r}')dr'$$

Para resolver este problema utilizamos la ecuación , donde $\vec{r} = 0\hat{\imath} + y\hat{\jmath}$, $\vec{r}' = x'\hat{\imath} + 0\hat{\jmath}$, $dr' = dx'$ y $\lambda(\vec{r}') = \lambda = \text{const.}$. También $\vec{r}-\vec{r}' = r''\hat{r}'' = (y^2 + x'^2)^{1/2}\hat{r}''$.



Notar que trabajamos en cartesianas

por lo tanto la magnitud de dE es : $k\dfrac{dq}{r''^2} = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{\lambda dx'}{y^2 + x'^2}$

La formula anterior nos da la magnitud del campo debido a $dq = \lambda dx'$, en un punto del eje de las y, i.e. para $x = 0$. El resultado no depende de la eleccion de x, ya que la línea es infinita. Para calcular el campo $\vec{E}$ debemos calcular las componentes x e y de $d\vec{E}$ antes de integrar. Sin embargo podemos notar que por simetría la componente x es cero. Para obtener dE_y debemos mutiplicar por el coseno del angulo correspondiente:

$$\cos\theta = \frac{y}{\sqrt{x'^2 + y^2}}$$

y después integrar. Así llegamos a:

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_o}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{y^2 + x'^2}\frac{y}{\sqrt{x'^2 + y^2}}dx'\,\hat{\jmath} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_o y}\,\hat{\jmath}$$

2) Considere un segmento de recta de largo L cargado con densidad de carga uniforme, ubicado a lo largo del eje z, con el origen en el centro del segmento.

a) Encuentre el campo eléctrico producido por esta distribución de carga en todo el espacio.
b) Considere el límite r >> L y compare con el ejemplo anterior.

(Problema 5 de la guía 2)

Respuesta ver pizarra

Fin