Campos Electromagnéticos

"El Campo Eléctrico"

Profesor: Pedro Labraña
Departamento de Física,
Universidad del Bío-Bío

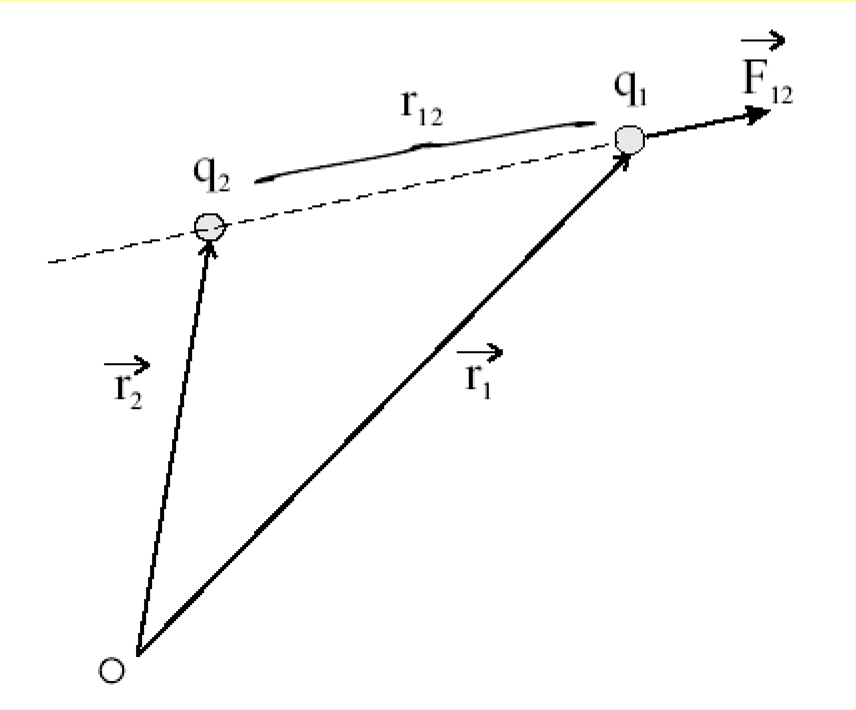
Carrera: Ingeniería Civil en Automatización
Créditos: 5

Campos Eléctricos

*Cargas Eléctricas, Aisladores y conductores, Ley de Coulomb, **Campo Eléctrico**. Movimiento de partículas cargadas en campos eléctricos uniformes. Campo eléctrico de distribuciones continuas. Líneas de Campo Eléctrico.*

Clases anteriores

Ley de Coulomb



La Ley de Coulomb en forma vectorial.
Fuerza sobre la carga q_1:

$$\vec{F}_1 = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_o} \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}$$

El Campo Eléctrico

Se define el Campo Eléctrico $\vec{E}$ creado por una distribución de cargas en un punto arbitrario P (posición $\vec{r}$ en que se encuentra una carga de prueba q_0) como

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}_0}{q_0}$$

En estricto rigor la carga q_0 debe ser tan débil que, al introducirla en un sistema de cargas, ella produzca fuerzas muy pequeñas sobre las otras partículas del sistema y por ese motivo no se altere las configuración de posiciones de ellas. A una carga con estas características se la llama *carga de prueba*. Matemáticamente esto se expresa indicando que la medición se hace en el límite $q_0 \to 0$.

Utilizando la Ley de Coulomb, la definición de campo eléctrico que acabamos de dar, y el Principio de Superposición, es posible escribir una expresión para el campo eléctrico creado por un conjunto discreto de cargas $q_1, \ldots q_i, \ldots q_N$ en un punto P con posición $\vec{r} = \vec{r}_P$

$$\vec{E}(\vec{r}) \equiv \lim_{q_0 \to 0} \frac{\vec{F}_0}{q_0}$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = K \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i (\vec{r} - \vec{r}_i)}{\|\vec{r} - \vec{r}_i\|^3}$$

Por último las unidades de campo eléctrico son *Newtons/Coulomb*: [N/C].

La fuerza electrostática en función del Campo Eléctrico

Si conocemos el valor del campo eléctrico para todo punto del espacio $\vec{E}(\vec{r})$. Entonces la fuerza que siente una carga q ubicada en $\vec{r}$ está dada por la siguiente expresión:

$$\vec{F}(\vec{r}) = q\vec{E}(\vec{r})$$

Una observación importante es que si $q > 0$ tanto $\vec{F}$ como $\vec{E}$ apuntan en la misma dirección, mientras que si $q < 0$ entonces $\vec{F}$ apunta en dirección contraria a $\vec{E}$. Pero esto no tiene ninguna incidencia en la forma de calcular el campo eléctrico.

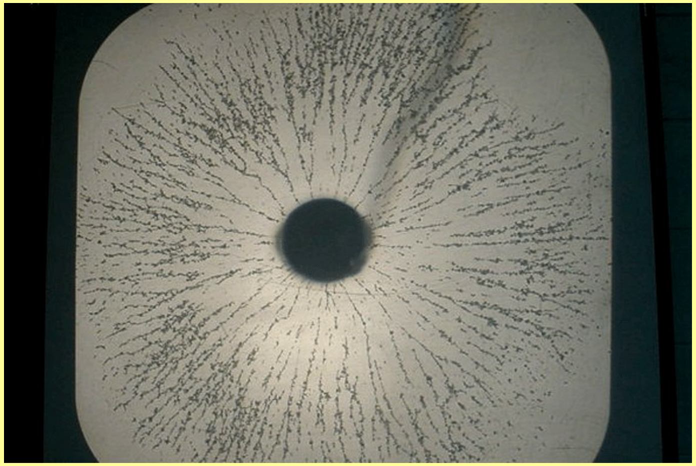
Campo eléctrico de una carga puntual q' ubicada en $\vec{r}'$

$$\vec{E}(\vec{r}) = K \frac{q'}{||\vec{r} - \vec{r}'||^3} (\vec{r} - \vec{r}')$$

<u>Carga puntual ubicada en el origen</u>

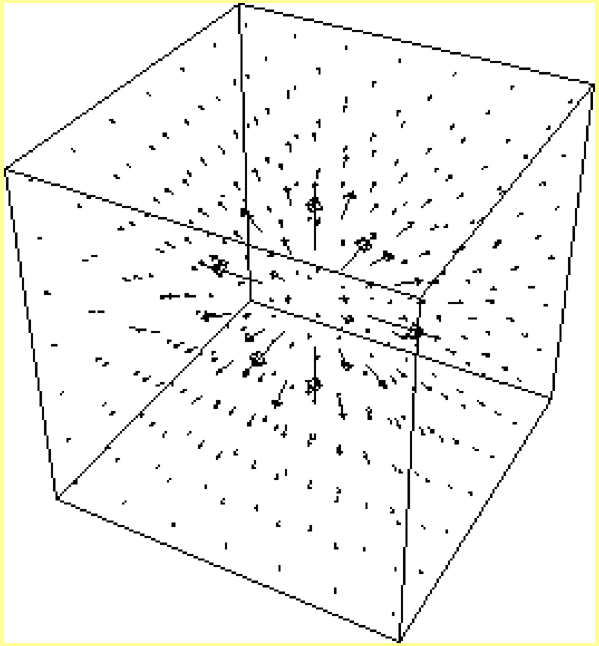
$$\vec{E}(\vec{r}) = K \frac{q}{r^2} \hat{r}$$

Notar que hemos escrito el campo eléctrico en coordenadas esféricas. ¿Como quedaría escrito en coordenadas cartesianas? (Pizarra)

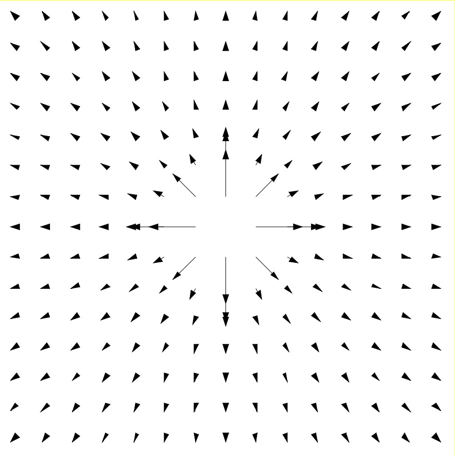


El campo eléctrico es un campo vectorial. Esto es una función que a cada punto del espacio le asocia un vector.

Ej. El campo eléctrico de una carga puntual
se “ve” de la siguiente forma en 3D



Proyección en 2D al plano (x,y)



Comente lo que ve
i) ¿En que sentido apuntan estas flechitas ?
ii) ¿Qué puede decir respecto al largo de estas flechitas?
iii) Notar que estas flechitas parecen formar líneas
iv) ¿Que puede decir respecto a la densidad de estas líneas y el largo de las flechitas?

Ej.0 Versión idealizada del experimento de Millikan (Tarea)

En el experimento de Millikan, se equilibra un 'quanto'de carga $+e$ (ión) bajo la acción de: la fuerza de peso $-mg\hat{\imath}$ y la acción de un campo uniforme $\vec{E} = E_0\hat{\imath}$. Si la partícula corresponde a un protón, ¿cuál es el valor de E_0 necesario para este equilibrio?.

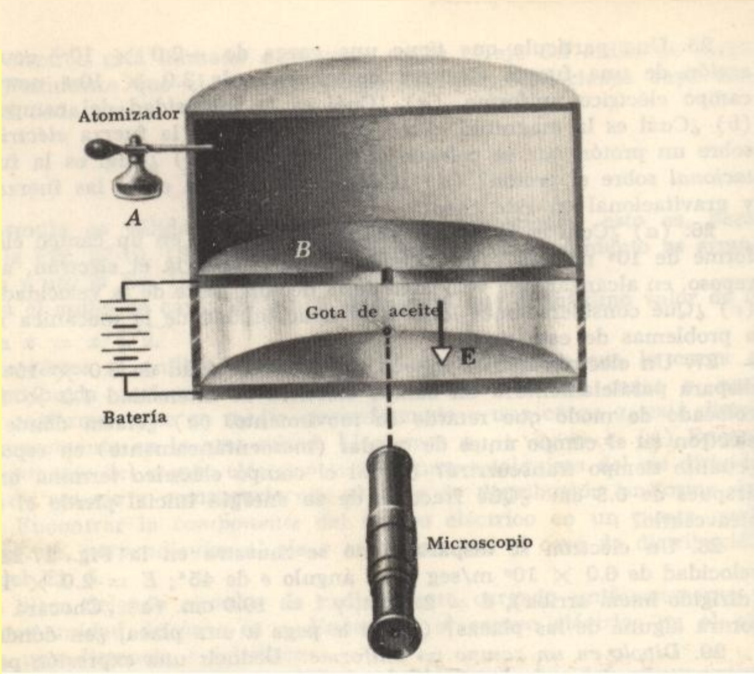
Rpta.

$$
\begin{aligned}
\vec{F}^{\text{neta}} &= m\vec{a} \\
q_e\vec{E} + m_p\vec{g} &= 0 \\
\left(eE_0 - m_p g\right)\hat{\imath} &= 0 \\
E_0 &= m_p g/e = 1.02 \times 10^{-7}[\text{N/C}]
\end{aligned}
$$

Problema capítulo 27 Halliday Resnick

30. *Experimento de la gota de aceite.* R. A. Millikan, preparó un aparato (Fig. 27-24) en el cual una gotita de aceite cargada colocada en un campo eléctrico **E**, podía "equilibrarse" ajustando E hasta que la fuerza eléctrica sobre la gota fuera igual y opuesta a su peso. Si el radio de la gota es 1.64×10^{-4} cm y E en las condiciones de equilibrio vale 1.92×10^{5} nt/coul, (*a*) ¿qué carga lleva la gota? (*b*) ¿Por qué Millikan no trató de equilibrar electrones en su aparato en vez de gotas de aceite? La densidad del aceite es 0.851 g/cm^3. (Millikan fue el primero en medir la carga del electrón por este método. Midió el radio de la gota observando la velocidad límite que alcanzaban las gotas cuando caían en el aire cuando no había campo eléctrico. Cargaba las gotas de aceite irradiándolas con descargas de rayos X.)

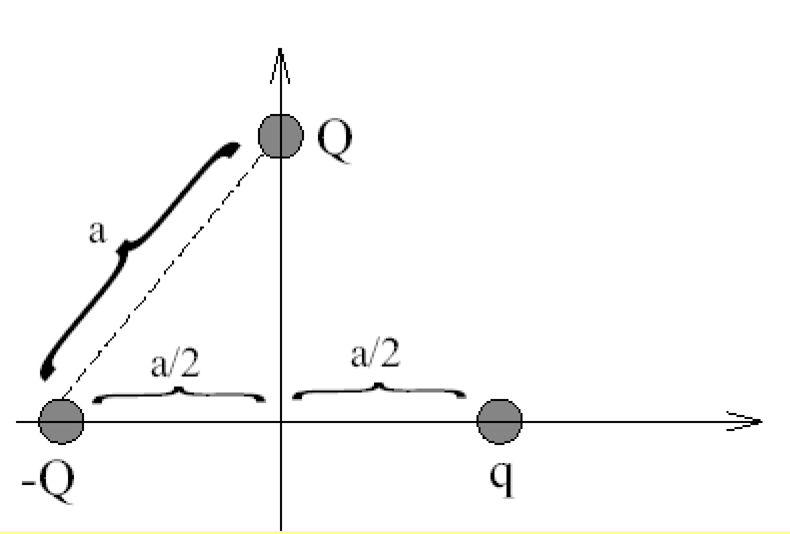
Ver video y pizarra



Tarea problema 31 del mismo capítulo

Ej.2

Tres cargas q, Q y $-Q$ están dispuestas en los vértices de un triangulo equilatero de lado a como muestra la figura. ¿Cuál es el valor del campo que obra sobre q?. ¿Cuál es el valor del campo sobre Q?. ¿Cuál es valor del campo sobre $-Q$?. ¿Cuál es el valor del campo sobre el origen del sistema de coordenadas?. Por último determine la fuerza eléctrica que siente cada una de las cargas.



Solución . Consideramos las posiciones de las cargas:

$$\vec{r}_q = \frac{a}{2}\hat{x}$$

$$\vec{r}_Q = \frac{\sqrt{3}}{2}a\hat{y}$$

$$\vec{r}_{-Q} = -\frac{a}{2}.\hat{x}$$

Para evaluar el campo eléctrico usamos:

En el caso del campo sobre la carga q se considera la contribución de las cargas Q y $-Q$ al campo en el punto en que se ubica la carga q. Así $\vec{r} = \vec{r}_q$ y $\vec{r}_1 = \vec{r}_Q$, $\vec{r}_2 = \vec{r}_{-Q}$. Queda:

$$
\begin{aligned}
\vec{E} &= \frac{KQ(\vec{r}-\vec{r}_Q)}{\|\vec{r}-\vec{r}_Q\|^3} + \frac{(-KQ)(\vec{r}-\vec{r}_{-Q})}{\|\vec{r}-\vec{r}_{-Q}\|^3} \\
&= \frac{KQ(a/2\hat{x}-\sqrt{3}/2a\hat{y})}{\|a/2\hat{x}-\sqrt{3}/2a\hat{y}\|^3} \\
&+ \frac{-KQ(a/2\hat{x}-(-a/2)\hat{x})}{\|a/2\hat{x}-(-a/2)\hat{x}\|^3} \\
&= \mathrm{k}\frac{Q(a/2\hat{x}-\sqrt{3}/2a\hat{y})}{a^3} - \frac{Qa\hat{x}}{a^3}\mathrm{k} \\
&= KQ\left[-\frac{1}{2a^2}\hat{x} - \frac{\sqrt{3}}{2a^2}\hat{y}\right]
\end{aligned}
$$

En el caso del campo sobre la carga Q se considera la contribución de las cargas q y $-Q$ al campo en el punto en que se ubica la carga Q. Así $\vec{r} = \vec{r}_Q$ y $\vec{r}_1 = \vec{r}_q$, $\vec{r}_2 = \vec{r}_{-Q}$. Queda:

$$
\begin{aligned}
\vec{E} &= \frac{Kq(\vec{r} - \vec{r}_q)}{\|\vec{r} - \vec{r}_q\|^3} + \frac{(-KQ)(\vec{r} - \vec{r}_{-Q})}{\|\vec{r} - \vec{r}_{-Q}\|^3} \\
&= \frac{Kq(\sqrt{3}/2a\hat{y} - a/2\hat{x})}{\|\sqrt{3}/2a\hat{x} - a/2\hat{x}\|^3} \\
&+ \frac{-KQ(\sqrt{3}/2a\hat{y} - (-a/2)\hat{x})}{\|\sqrt{3}/2a\hat{y} - (-a/2)\hat{x}\|^3} \\
&= \frac{KQ(a/2\hat{x} - \sqrt{3}/2a\hat{y}}{a^3} - \frac{KQa\hat{x}}{a^3} \\
&= \frac{K}{2a^2}\left(-(q+Q)\hat{x} + (\sqrt{3}(q-Q)\hat{y}\right)
\end{aligned}
$$

En el caso del campo sobre el origen $\vec{r}=0$ se considera la contribución de las cargas q, Q y $-Q$ al campo en el origen. Así $\vec{r}=0$ y $\vec{r}_1=\vec{r}_q, \vec{r}_2=\vec{r}_{-Q}$ y $\vec{r}_3=\vec{r}_Q$.

$$
\begin{aligned}
\vec{E} &= \frac{Kq(\vec{r}-\vec{r}_q)}{\|\vec{r}-\vec{r}_q\|^3}+\frac{K(-Q)(\vec{r}-\vec{r}_{-Q})}{\|\vec{r}-\vec{r}_{-Q}\|^3} \\
&+ \frac{K(Q)(\vec{r}-\vec{r}_Q)}{\|\vec{r}-\vec{r}_Q\|^3} \\
&= \frac{Kq(0-\vec{r}_q)}{\|0-\vec{r}_q\|^3}+\frac{(-KQ)(0-\vec{r}_{-Q})}{\|0-\vec{r}_{-Q}\|^3} \\
&+ \frac{(KQ)(0-\vec{r}_Q)}{\|0-\vec{r}_Q\|^3} \\
&= \frac{Kq(-a/2\hat{x})}{\|-a/2\hat{x}\|^3}+\frac{(-KQ)(-(-a/2\hat{x}))}{\|-(-a/2\hat{x})\|^3} \\
&+ \frac{(KQ)(-(\sqrt{3}/2a))}{\|-(\sqrt{3}/2a)\|^3} \\
&= \frac{Kq(-a/2\hat{x})}{a^3/8}+\frac{(-KQ)(-(-a/2\hat{x}))}{a^3/8} \\
&+ \frac{(KQ)(-(\sqrt{3}/2a\hat{y}))}{3^{3/2}/8a^3} \\
&= -\frac{4Kq}{a^2}\hat{x}+\frac{-4KQ}{a^2}\hat{x}+\frac{-4KQ}{3a^2}\hat{y}
\end{aligned}
$$

Ej. 3

La figura 2.4 muestra dos cargas puntuales positivas iguales y de magnitud q, que están separadas a una distancia $2d$. Sobre el eje de las X se intenta poner un protón a distancia x.

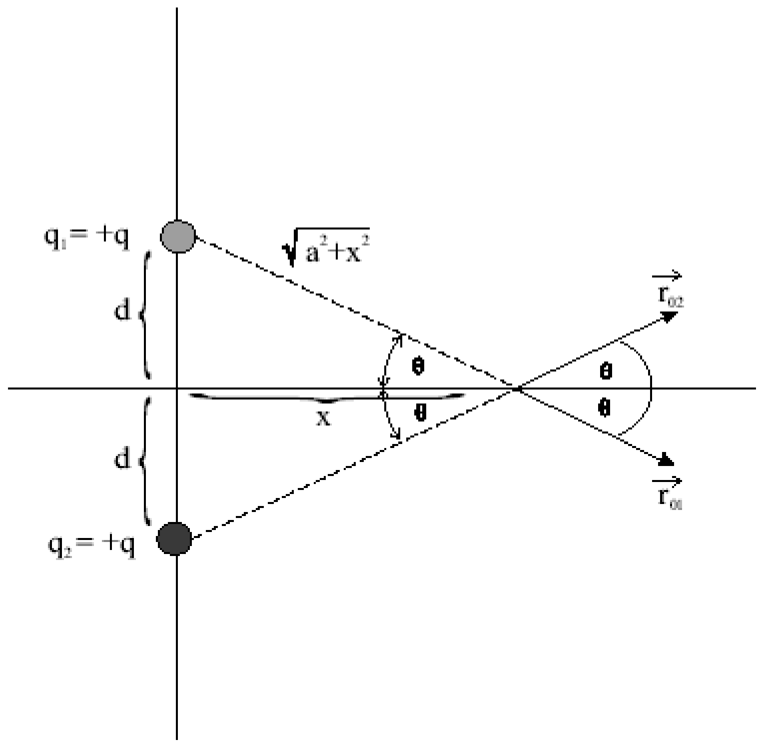


Figura 2.4: **Campo eléctrico sobre un protón debido a dos cargas positivas. La figura grafica los vectores unitarios $\hat{r}_{01}$ y $\hat{r}_{02}$.**

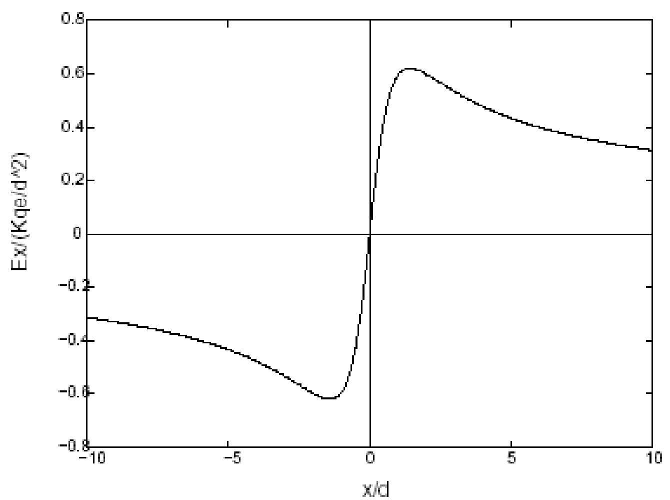
¿Cuanto vale el campo eléctrico que siente el protón? ¿Cuanto vale la fuerza que siente el protón?

Podemos solucionar el problema de dos maneras

A

Claramente los campos, provocadas por cada carga q, por ser de igual magnitud, al ser sumados proyectan una componente neta exclusivamente en la dirección del eje X. El ángulo θ de proyección satisface: $\cos\theta = x/\sqrt{d^2+x^2}$. De modo que el campo neto provocado por las dos cargas resulta (usando que $q_1 = q_2 = q$):

$$
\begin{aligned}
\vec{E}_0 &= K\frac{q_1}{d^2+x^2}(\cos\theta\hat{x}-\sin\theta\hat{y}) \\
&\quad +K\frac{q_2}{d^2+x^2}(\cos\theta\hat{x}+\sin\theta\hat{y}) \\
&= 2K\frac{q}{d^2+x^2}\cos\theta\hat{x} \\
&= 2K\frac{q}{d^2+x^2}\frac{x}{\sqrt{d^2+x^2}}\hat{x} \\
&= 2K\frac{qx}{(d^2+x^2)^{3/2}}\hat{x}
\end{aligned}
$$



El campo se anula si el protón está en el origen y su intensidad es máxima a una distancia de $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}d$ del origen.

La fuerza sobre el protón se obtiene simplemente vía $\vec{F}=q_p\vec{E}$.

Gráfico del valor del campo eléctrico como función de la distancia

B

Ahora resolveremos el problema de manera diferente. Las posiciones de cada carga son

$$\begin{aligned}\vec{r}_1 &= +d\hat{y}\\ \vec{r}_2 &= -d\hat{y}\end{aligned}$$

y el protón está en $\vec{r} = x\hat{x}$. El campo se obtiene directamente evaluando:

$$\begin{aligned}\|\vec{r}-\vec{r}_1\| &= \|x\hat{x}+d\hat{y}\| = \sqrt{x^2+d^2}\\ \|\vec{r}-\vec{r}_2\| &= \|x\hat{x}-d\hat{y}\| = \sqrt{x^2+d^2}\end{aligned}$$

y reemplazando en

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{2} \frac{Kq_i(\vec{r}-\vec{r}_i)}{\|\vec{r}-\vec{r}_i\|^3}$$

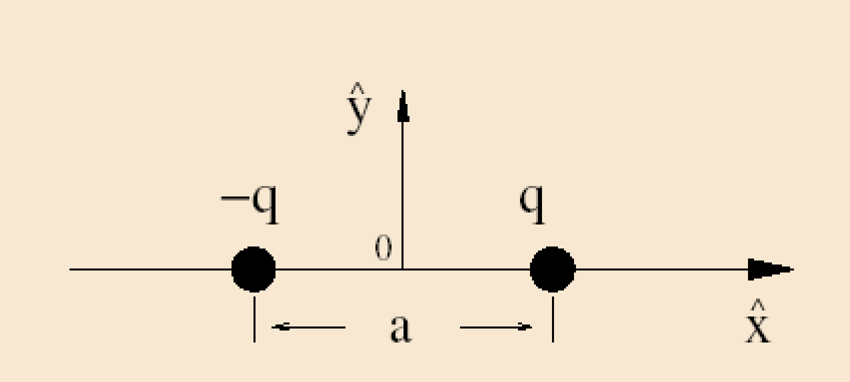
Resulta

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \frac{K(q)(x\hat{x}-d\hat{y})}{(x^2+d^2)^{3/2}} + \frac{K(q)(x\hat{x}-(-d\hat{y}))}{(x^2+d^2)^{3/2}}\\ &= \frac{2Kqx}{(x^2+d^2)^{3/2}}\hat{x}\end{aligned}$$

de modo que se recupera el resultado obtenido anteriormente.

El dipolo eléctrico

Consideramos la siguiente distribución de cargas puntuales. A esta configuración se le denomina dipolo eléctrico. En este caso es un dipolo ubicado en el origen de coordenadas.



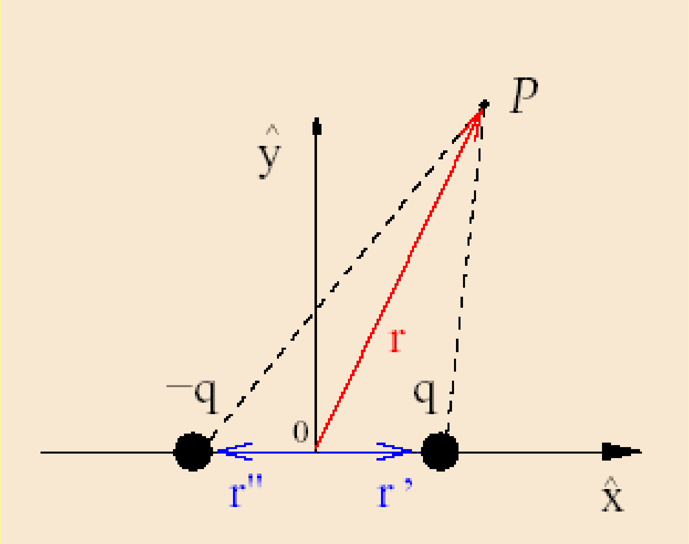
Ahora siendo más precisos

Se define el dipolo eléctrico como $\vec{p} = qa\hat{x}$. Demostrar que el campo eléctrico en el punto (x, y) muy alejado del orígen es:

$$E_x = \frac{p}{4\pi\epsilon_o}\frac{2x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^{5/2}}$$

$$E_y = \frac{p}{4\pi\epsilon_o}\frac{3xy}{(x^2 + y^2)^{5/2}}$$

Solución



Aquí : $\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath}$ $\quad \vec{r}\,' = (a/2)\hat{\imath}$ $\quad \vec{r}\,'' = -(a/2)\hat{\imath}$

El campo eléctrico de un dipolo está dado por:

$$\vec{E} = kq\left[\frac{\vec{r} - \vec{r}\,'}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3} - \frac{\vec{r} - \vec{r}\,''}{|\vec{r} - \vec{r}\,''|^3}\right]$$

Recordar que estamos considerando puntos (x,y) muy alejados del origen

Por lo tanto, como $a^2 << x^2, y^2$

$$\vec{r} - \vec{r}' = (x - a/2)\hat{\imath} + y\hat{\jmath}$$

$$|\vec{r} - \vec{r}'|^2 = x^2 + y^2 - ax + a^2/4 \simeq x^2 + y^2 - ax$$

$$\vec{r} - \vec{r}'' = (x + a/2)\hat{\imath} + y\hat{\jmath}$$

$$|\vec{r} - \vec{r}''|^2 = x^2 + y^2 + ax + a^2/4 \simeq x^2 + y^2 + ax$$

Luego,

$$\frac{1}{kq}E_x = \frac{x - a/2}{(x^2 + y^2 - ax)^{3/2}} - \frac{x + a/2}{(x^2 + y^2 + ax)^{3/2}}$$

Pero como $a << r$, entonces $ax << x^2 + y^2$ y podemos escribir:

$$(x^2 + y^2 - ax)^{-3/2} = (x^2 + y^2)^{-3/2}\left[1 - ax/(x^2 + y^2)\right]^{-3/2}$$

$$
\begin{aligned}
(x^2 + y^2 - ax)^{-3/2} &= (x^2 + y^2)^{-3/2}\left[1 - ax/(x^2 + y^2)\right]^{-3/2} \\
&\simeq (x^2 + y^2)^{-3/2}\left[1 + \frac{3}{2}ax/(x^2 + y^2)\right]
\end{aligned}
$$

donde usamos $(1 + \delta)^n \simeq (1 + n\delta)$, para $\delta << 1$

Similarmente podemos escribir:

$$
\begin{aligned}
(x^2 + y^2 + ax)^{-3/2} &= (x^2 + y^2)^{-3/2}\left[1 + ax/(x^2 + y^2)\right]^{-3/2} \\
&\simeq (x^2 + y^2)^{-3/2}\left[1 - \frac{3}{2}ax/(x^2 + y^2)\right]
\end{aligned}
$$

Por lo tanto

$$
\begin{aligned}
E_x &= kq\left\{\frac{x-a/2}{(x^2+y^2-ax)^{3/2}}-\frac{x+a/2}{(x^2+y^2+ax)^{3/2}}\right\}\\
&= kq(x^2+y^2)^{-3/2}\left\{(x-a/2)\left[1+\frac{3}{2}ax/(x^2+y^2)\right]\right.\\
&- \left.(x+a/2)\left[1-\frac{3}{2}ax/(x^2+y^2)\right]\right\}\\
&= \frac{kqa(2x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^{5/2}}=\frac{1}{4\pi\epsilon_o}\frac{p(2x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^{5/2}}
\end{aligned}
$$

La componente y la podemos escribir como

$$
\begin{aligned}
E_y &= kq\left\{\frac{y}{(x^2+y^2-ax)^{3/2}} - \frac{y}{(x^2+y^2+ax)^{3/2}}\right\} \\
&= kqy(x^2+y^2)^{-3/2}\left\{\left[1+\frac{3}{2}ax/(x^2+y^2)\right]\right. \\
&- \left.\left[1-\frac{3}{2}ax/(x^2+y^2)\right]\right\} \\
&= \frac{3kqaxy}{(x^2+y^2)^{5/2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\frac{3pxy}{(x^2+y^2)^{5/2}}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto hemos demostrado que las componentes del campo eléctrico lejos del origen son

$$E_x = \frac{p}{4\pi\epsilon_o}\frac{2x^2-y^2}{(x^2+y^2)^{5/2}}$$

$$E_y = \frac{p}{4\pi\epsilon_o}\frac{3xy}{(x^2+y^2)^{5/2}}$$

Fin