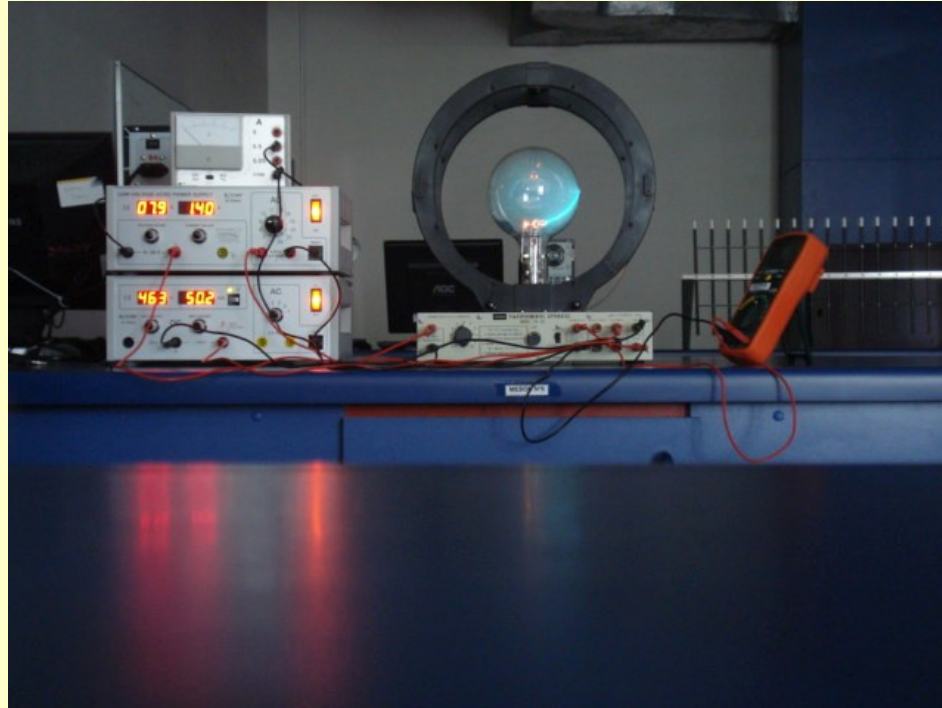


Campos Electromagnéticos

“La ecuación de Poisson y de Laplace II”



Profesor: Pedro Labraña
Departamento de Física,
Universidad del Bío-Bío

Carrera: Ingeniería Civil en Automatización
Créditos: 5

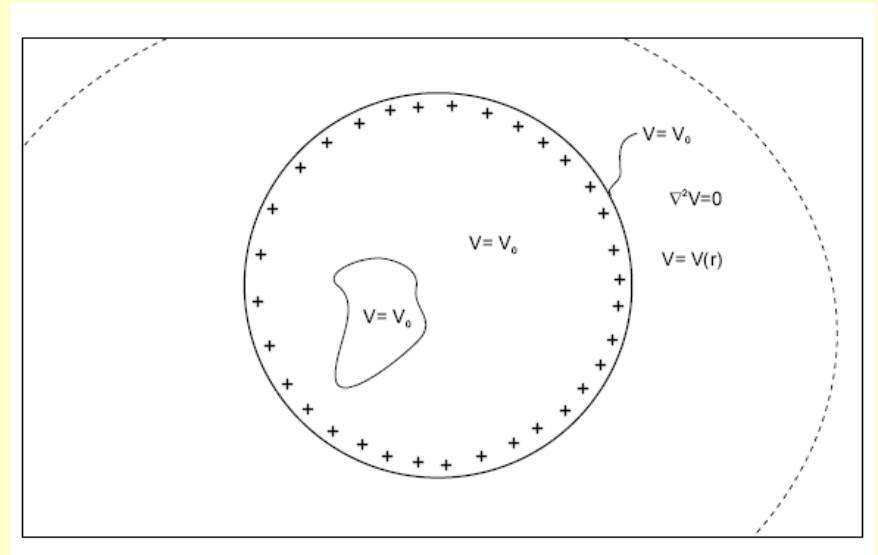
Aplicaciones de la ecuación de Laplace

Conductor esférico cargado (q) con un hueco interior de forma arbitraria

$$V(r) = \frac{C_1}{r} + C_2$$

$$V(r) = V_0 \frac{a}{r} \quad \text{para } r \geq a$$

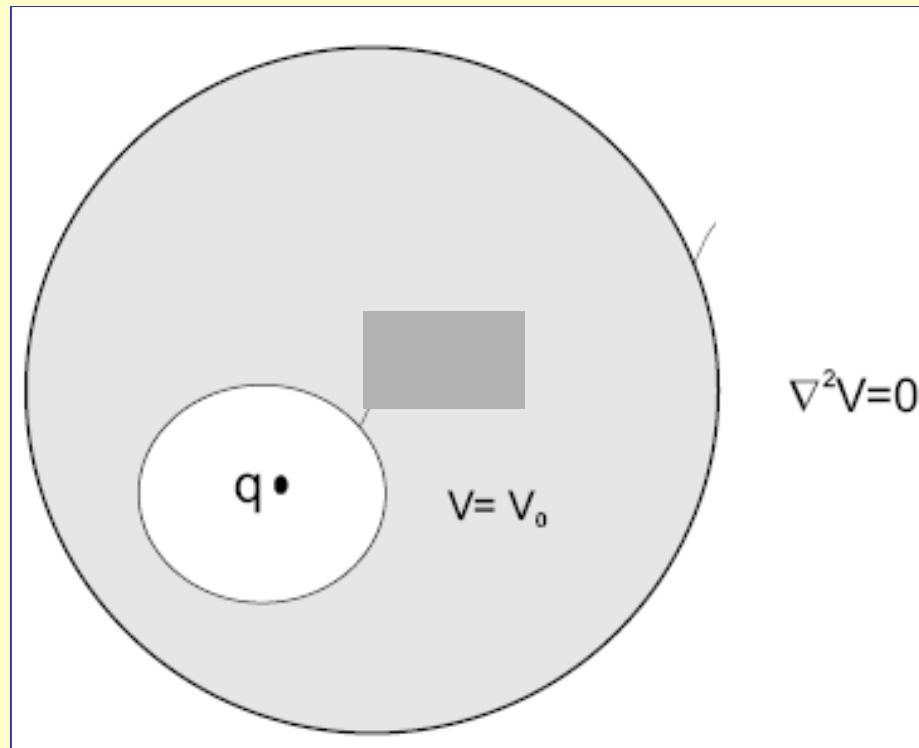
$$\vec{E} = V_0 \frac{a}{r^2} \hat{r}$$



$$\sigma = \epsilon_0 E|_{r=a} = \frac{\epsilon_0 V_0}{a}$$

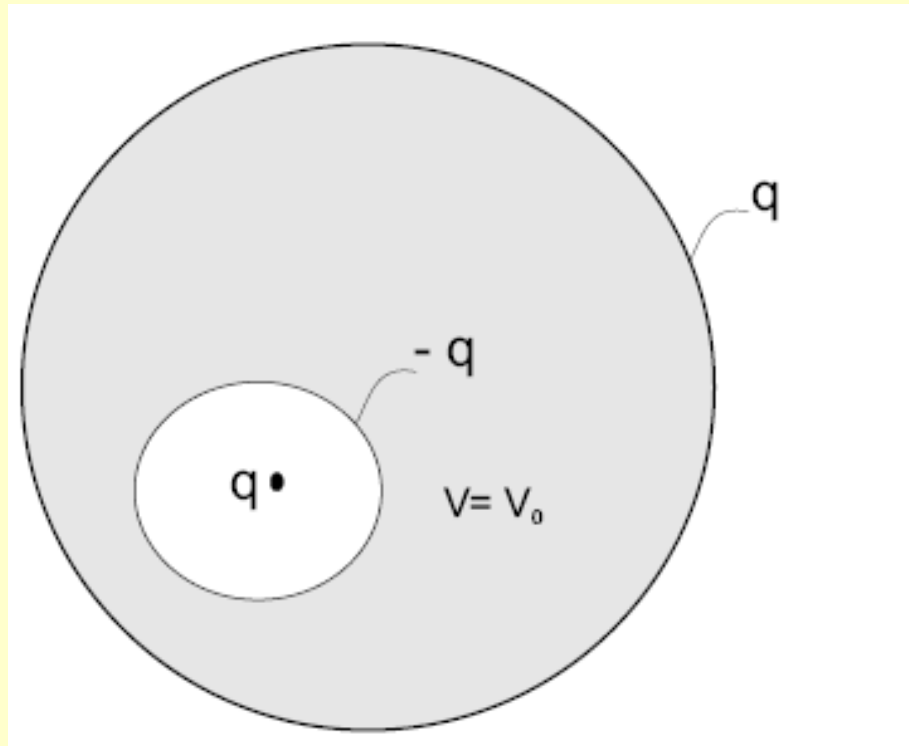
$$V_0 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a}$$

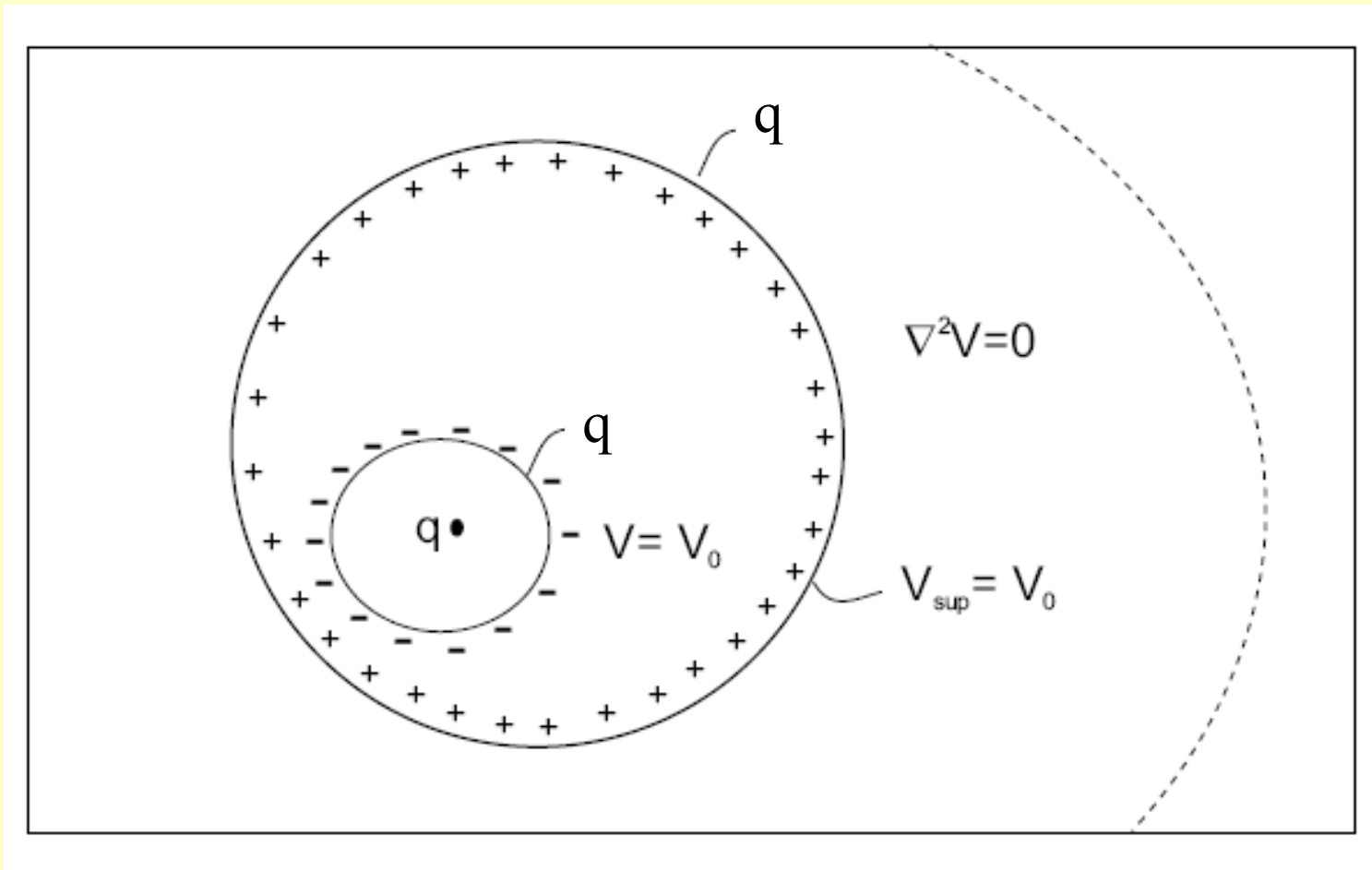
Conductor esférico neutro con hueco que tiene carga q en su interior.



Globalmente neutro

Conductor esférico neutro con hueco que tiene carga q en su interior.





**La densidad de carga superficial de la cara externa es constante.
La carga de la cara externa no “ve” a la carga interna al estar apantallada**

Solución

Usando la ecuación de Laplace para el caso de simetría esférica, tenemos

$$V(r) = V_0 \frac{a}{r}$$

$$\vec{E}(r) = V_0 \frac{a}{r^2}$$

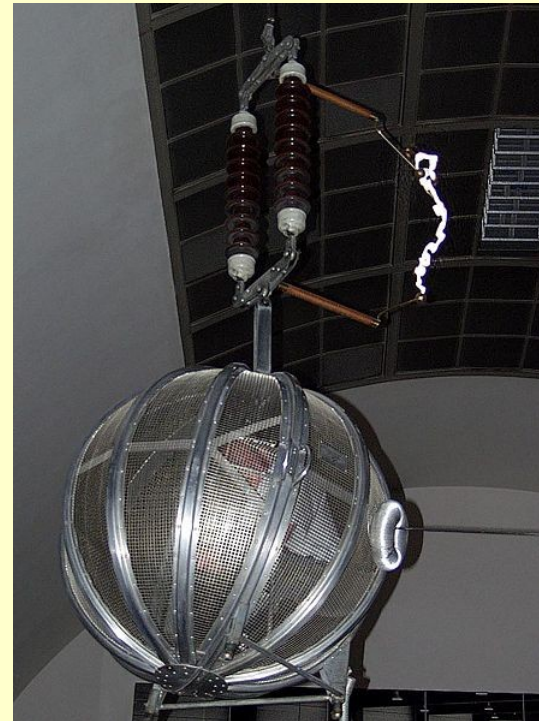
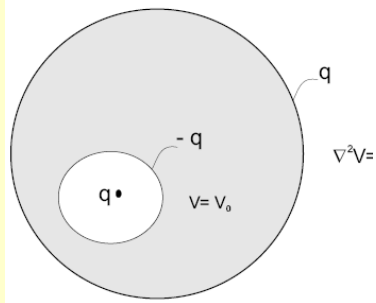
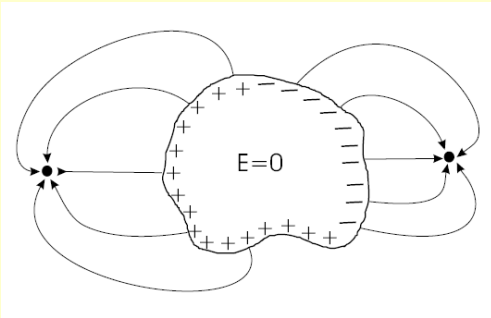
$$\sigma = \frac{\epsilon_0 V_0}{a}$$

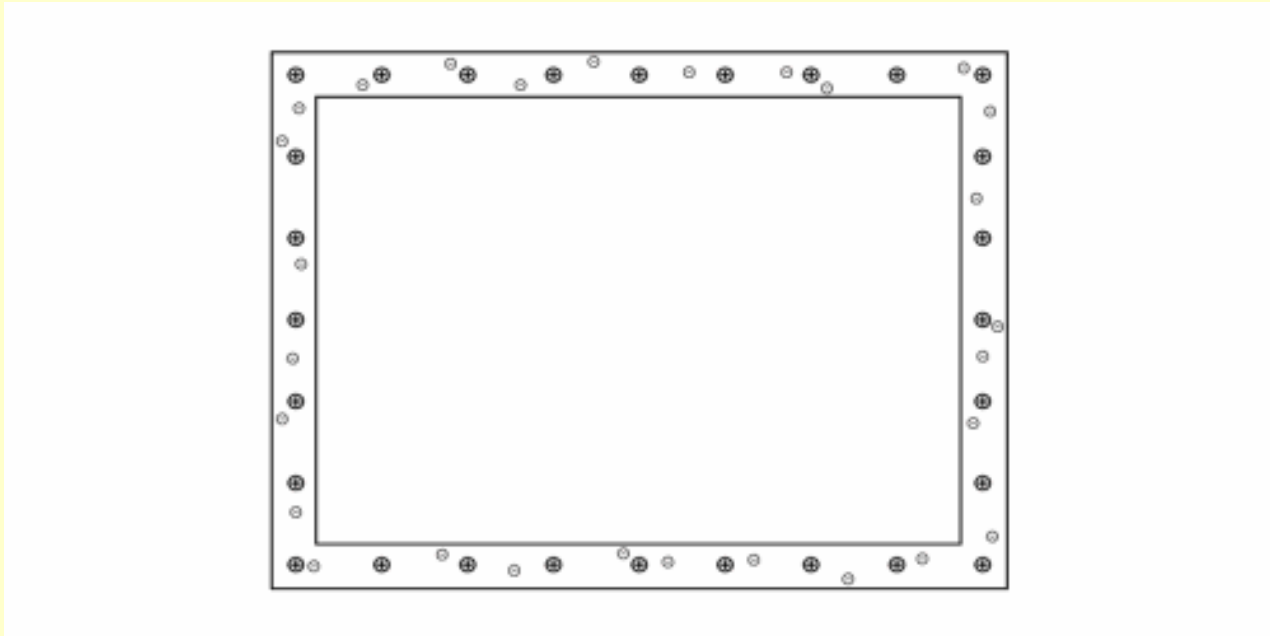
Algunas aplicaciones cotidianas y no tanto de estos últimos resultados

-No cotidiana pero espectacular
-Un poco molesta a veces

La jaula de Faraday

Recordamos





No hay campo eléctrico dentro del hueco del conductor



No hay señal dentro de una jaula de Faraday

El concepto de capacidad C

$$\nabla^2 \Phi(\vec{r}) = -\frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0}$$

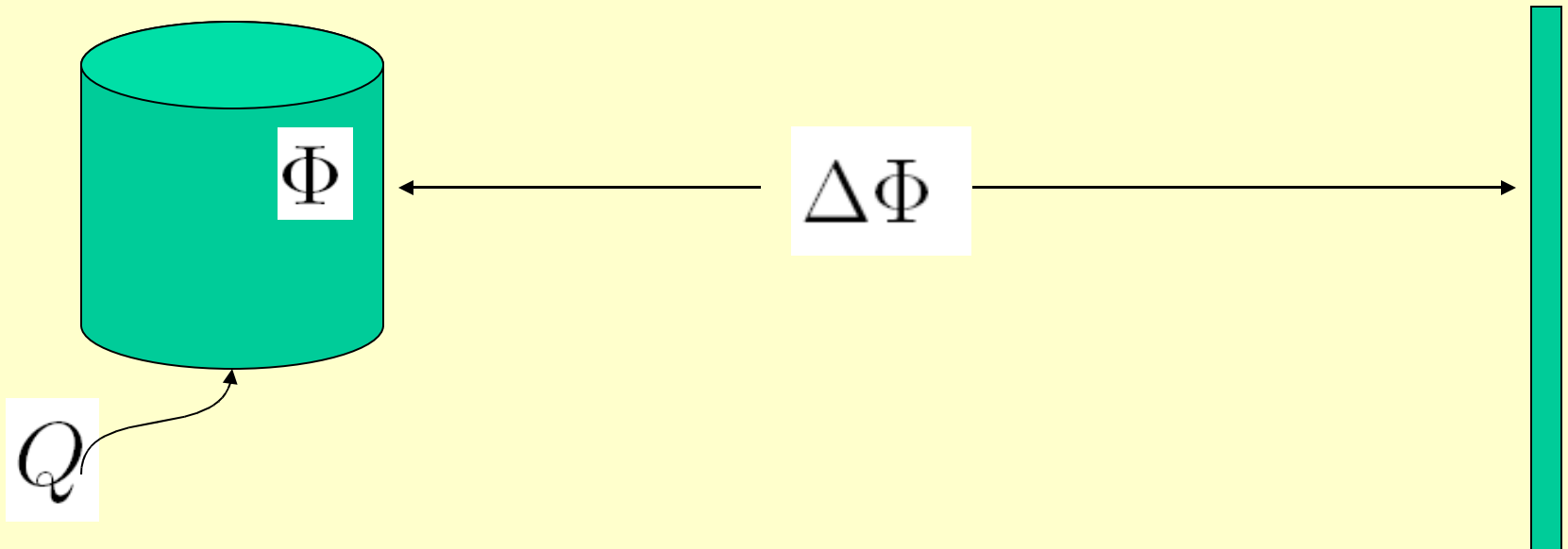
Existe una relación lineal entre el potencial electrostático y la densidad de carga

Si la densidad de carga aumenta en un factor A,
entonces el potencial electrostático también lo hace

Ver pizarra

Ojo: Notación $V(\mathbf{r}) = \Phi(\mathbf{r})$

¿Con cuanta carga debo cargar el conductor de modo que su Superficie esté a una diferencia de potencial $\Delta\Phi$ respecto de otra superficie (ubicada típicamente en infinito) ?



Capacidad de un conductor

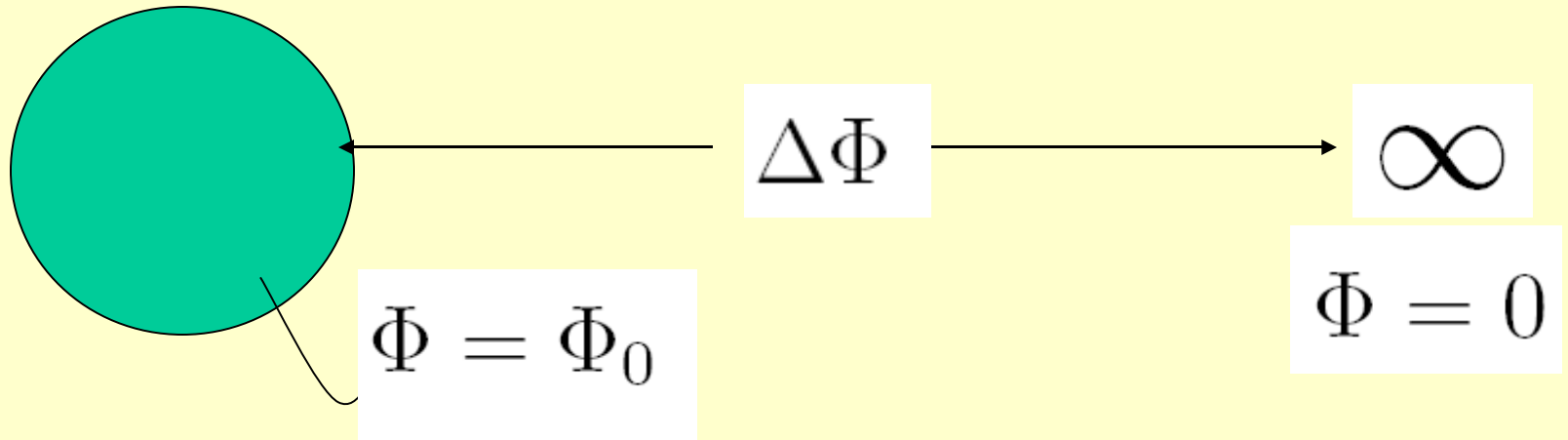
Se define formalmente la Capacidad como el valor absoluto del cociente entre la carga Q almacenada por un elemento conductor sobre la diferencia de potencial ΔV del conductor respecto de un punto de referencia

$$C \equiv \left| \frac{Q}{\Delta V} \right| \quad (2.51)$$

Lo que la Capacidad mide es: *cuanta carga almacena un sistema por unidad de voltaje aplicado.*

En el sistema MKS, C se mide en Coulomb/Volt o Farad ($1\text{F} = 1 \text{ C/V}$)

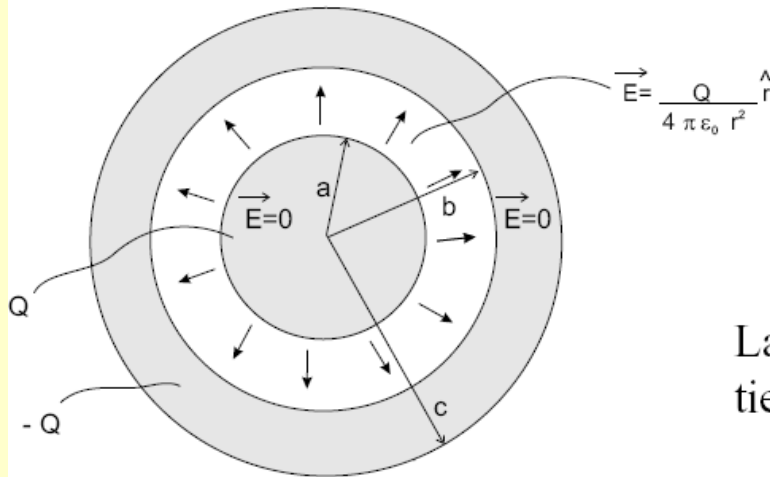
Ej.1 Capacidad de una esfera conductora respecto al infinito



$$C = \left| \frac{Q}{KQ/a} \right| = \frac{a}{K} = 4\pi\epsilon_0 a$$

Capacidad de una esfera cargada respecto de un cascarón esférico que la envuelve concéntricamente.

Usando la ley de Gauss entre los conductores



$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$$

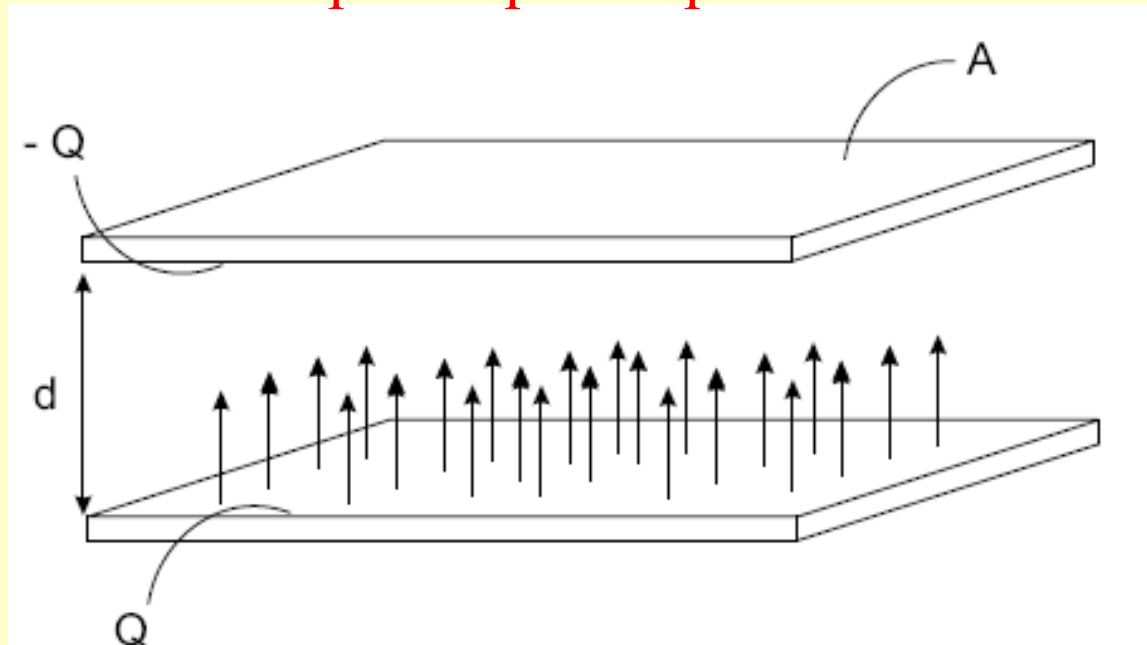
La diferencia de potencial entre estos radios se obtiene integrando

$$\begin{aligned} \Delta V &= -\int_b^a \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_b^a \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \end{aligned}$$

Luego obtenemos

$$C = \left| \frac{Q}{\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)} \right| = \frac{4\pi\epsilon_0 ab}{b - a}$$

Calcular la capacidad de un condensador de placas planas paralelas



Puede considerar que d es muy pequeño comparado con A

Por ley de Gauss al campo eléctrico entre las placas es

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{z} = \frac{Q}{\epsilon_0 A} \hat{z}$$

Luego la diferencia de potencial entre las placas del condensador es:

$$\begin{aligned} \Delta V &= - \int_{z=0}^{z=d} \vec{E} \cdot d\vec{r} = - \int_0^d \frac{Q}{\epsilon_0 A} dz \\ &= \frac{Qd}{\epsilon_0 A} \end{aligned}$$

Por lo tanto la capacidad de un condensador de placas planas paralelas es:

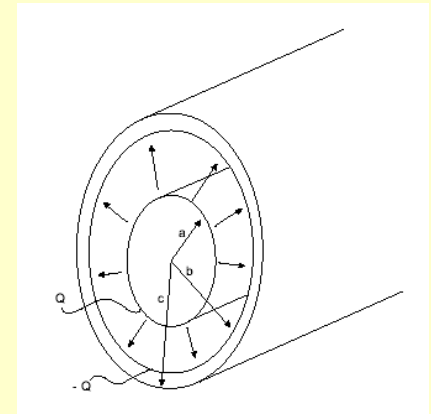
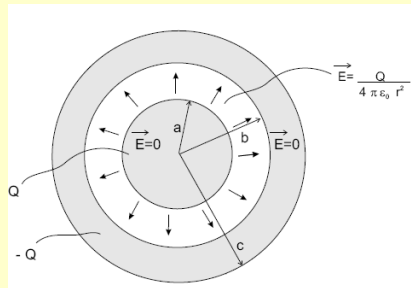
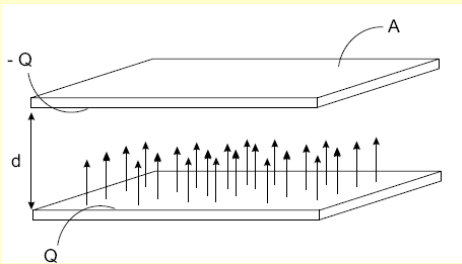
Notar que C sólo depende de la geometría de los conductores (que forma tienen) y de ϵ_0 .

$$C = \left| \frac{Q}{Qd/(\epsilon_0 A)} \right| = \frac{\epsilon_0 A}{d}$$

Condensador

Dispositivo importante para almacenar energía electrostática

Dos conductores que pueden almacenar cargas iguales y opuestas (+Q y -Q), con una diferencia de potencial entre sí que es independiente de que los demás conductores del sistema tengan o no carga, forman lo que se denomina un condensador



Son objetos que si no estan cargados entonces sus dos caras están al mismo potencial independiende de si afuera de ellos hay cargas eléctricas

Fin