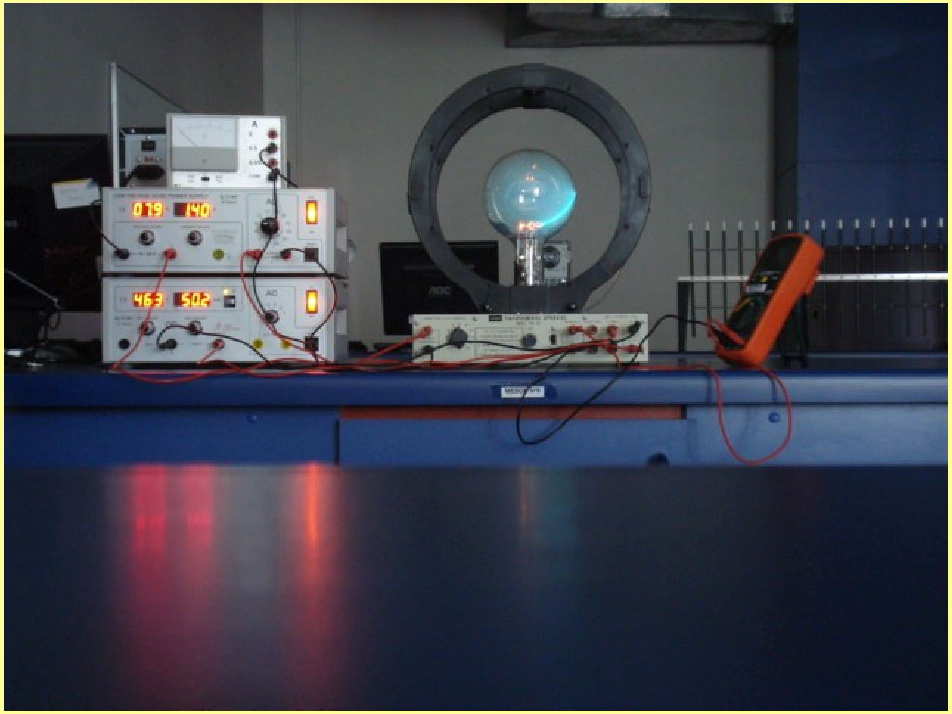
Campos Electromagnéticos

“La ecuación de Poisson y de Laplace”



Profesor: Pedro Labraña
Departamento de Física,
Universidad del Bío-Bío

Carrera: Ingeniería Civil en Automatización
Créditos: 5

La ecuación de Poisson y de Laplace

Hasta ahora hemos resuelto problemas donde la distribución de carga es conocida.
Ej.

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{V'} \frac{\rho(\vec{r'})(\vec{r}-\vec{r'})}{||\vec{r}-\vec{r'}||^3} d^3r'$$

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{V'} \frac{\rho(\vec{r'})}{||\vec{r}-\vec{r'}||} d^3r'$$

O utilizando la ley de Gauss

$$\int \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{encerrada}}}{\varepsilon_0}$$

Sin embargo en muchos problemas la distribución de carga no se conoce de antemano, para lo cual puede ser importante primero determinar el campo eléctrico o el potencial eléctrico para luego determinar la distribución de carga.

La ecuación de Poisson

Ley de Gauss

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0}$$

Utilizando que

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} V(\vec{r})$$

obtenemos

$$-\vec{\nabla} \cdot \left[\vec{\nabla} V(\vec{r})\right] = \frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0}$$

La ecuación de Poisson

$$\boxed{\nabla^2 V(\vec{r}) = -\frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0}}$$

Donde hemos definido al Laplaceano de V(r) de la siguiente manera

$$\nabla^2 V(\vec{r}) \equiv \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}\right) V(\vec{r})$$

En coordenadas cartesianas el Laplaceano de V(r) es:

$$\nabla^2 V(\vec{r}) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} V(x, y, z) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} V(x, y, z) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} V(x, y, z)$$

Laplaceano en coordenadas cilíndricas: (ver pizarra)

Laplaceano en coordenadas esféricas: (ver pizarra)

La ecuación de Laplace

Donde se anule la densidad de carga eléctrica la ecuación de Poisson se reduce a la ecuación de Laplace

Ecuación de Laplace

$$\boxed{\nabla^2 V(\vec{r}) = 0}$$

La idea es determinar V(r) utilizando la ecuación de Poisson o de Laplace según corresponda más las condiciones de frontera.

La condición de frontera corresponde a dar el valor de la función en el borde (frontera)

$$V(\vec{r}) \,|_{Borde} = F(\vec{r})$$

o corresponde a dar el valor de la derivada de la función en la frontera

$$\frac{\partial V(\vec{r})}{\partial n} \,|_{Borde} = G(\vec{r})$$

Donde

$$\frac{\partial V(\vec{r})}{\partial n} \equiv \vec{\nabla} V(\vec{r}) \cdot \hat{n}$$

Respecto a la ecuación de Laplace existen dos teoremas muy importantes

TEOREMA I: Si V1, V2, ... , Vn son soluciones a la ecuación de Laplace, entonces VT también lo será

$$V_T(\vec{r}) = C_1 V_1 + C_2 V_2 + C_3 V_3 + \cdots + C_n V_n$$

Donde C_i son constantes arbitrarias

Demostración (ver pizarra)

TEOREMA II: Teorema de la unicidad

Dos soluciones a la ecuación de Laplace que satisfacen las mismas condiciones de frontera difieren a lo sumo en una constante aditiva.

Demostración (ver pizarra)

Soluciones a la ecuación de Laplace para el caso de una variable independiente

Si V(r) depende de una variable entonces la ecuación de Laplace se reduce a una ecuación diferencial ordinaria

Ej.1 Coordenadas cartesianas

$$V(\vec{r}) = V(x, y, z) = V(x)$$

$$\nabla^2 V(\vec{r}) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{d^2V}{dx^2} = 0$$

Luego la solución general de la ecuación

$$\frac{d^2V}{dx^2} = 0$$

será

$$V(x) = a\,x + b$$

Donde las constantes a y b se determinan al usar las las condiciones de borde (Ej. Cuanto vale el potencial en infinito).

Ej.2 Coordenadas esféricas

$$V(\vec{r}) = V(r,\theta,\phi) = V(r)$$

$$\nabla^2 V(\vec{r}) = 0$$

Luego la solución general es

$$V(r) = \frac{a}{r} + b$$

(ver pizarra)

Donde las constantes a y b se determinan al usar las las condiciones de borde (Ej. Cuanto vale el potencial en infinito).

Aplicaciones de la Ecuación de Laplace

Aplicación de la Ecuación de Laplace a materiales conductores

Recordemos que los materiales conductores son en general metales. En su interior las cargas se pueden mover libremente y las fuerzas superficiales impiden que las cargas escapen.

Las propiedades de estos materiales se pueden resumir en:

- En el interior $\vec{E} = 0$ y por lo tanto la función potencial (que satisface $\vec{E} = -\nabla V$) debe ser uniforme dentro del conductor. Es decir $V = \text{Cte}$ o equivalentemente los conductores son cuerpos equipotenciales.

- Puesto que el conductor es equipotencial, su superficie tambien lo es, y sabemos que la dirección del gradiente de V es perpendicular a la superficie equipotencial asociada a dicho punto, luego el campo $\vec{E} = -\nabla V$ justo en el exterior de la superficie del conductor es perpendicular a dicha superficie. Es decir:

$$\vec{E}_{\text{sup}} = E(\vec{r})\,\hat{n}$$

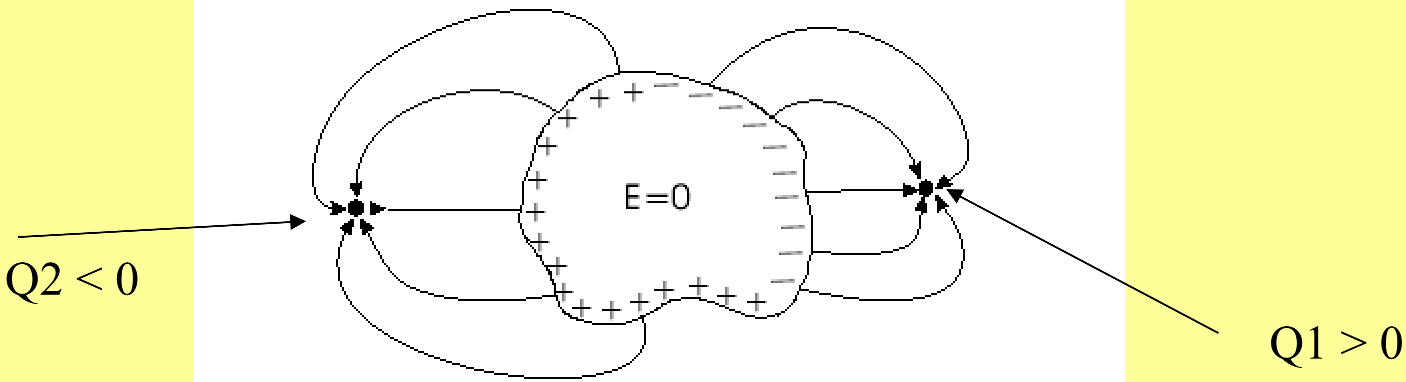
  o equivalentemente las líneas de fuerza son perpendiculares al conductor.

- No puede haber carga neta en el interior del conductor (si en la superficie). Lo que sigue de aplicar el Teorema de Gauss a un volumen en el interior del conductor y considerar que como el campo es nulo el flujo es nulo. Si hubiera carga habría una contradicción.

- Ya hemos visto (aplicando el teorema de Gauss a un pequeño cilindro en la superficie) que el valor del campo en la superficie satisface (*)

$$\vec{E}_{\text{sup}} = \frac{\sigma(\vec{r})}{\varepsilon_0}\hat{n}$$

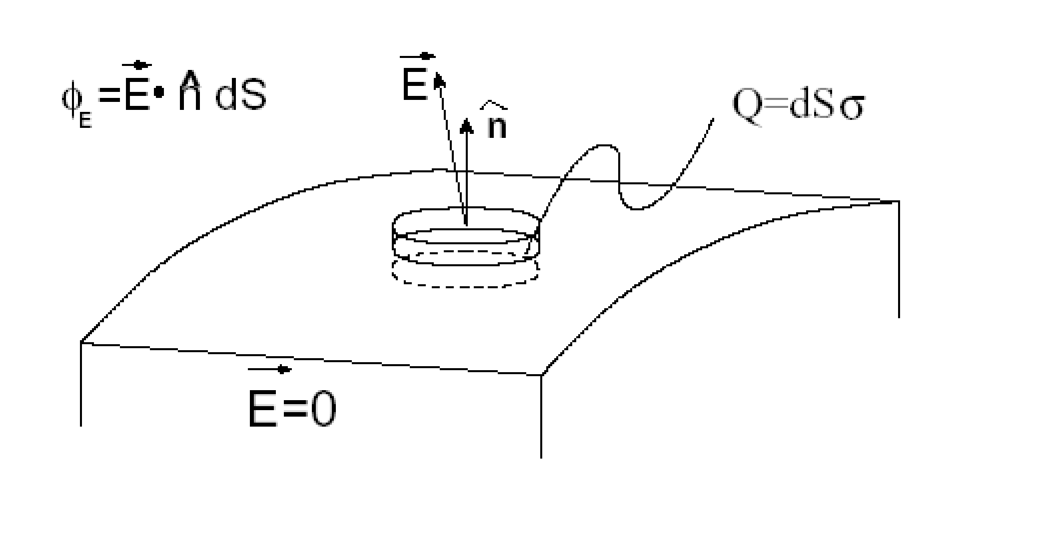
- Por último si acercamos una carga q (externa al conductor) los eléctrones y protones en la superficie del conductor se redistribuyen (ver figura 2.22



(*)

Densidad de carga en la superficie de un conductor de forma arbitraria

Si consideramos un punto cualquiera de la superficie de un conductor de forma cualquiera es posible probar, usando el Teorema de Gauss aplicado a un pequeño cilindro que contiene dicho punto en la superficie (ver figura), que la componente normal $E_n = \vec{E} \cdot \hat{n}$ a la superficie del campo eléctrico en dicho lugar se relaciona directamente con la densidad de carga en dicha parte de la superficie



$$\vec{E}\cdot\hat{n}\Delta S = \frac{\sigma\Delta S}{\varepsilon_0}$$
$$E_n = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

donde hemos usado que el cilindro es mucho menos alto que ancho de manera que el flujo por el manto resulta nulo en el límite que el alto del cilindro va a cero.

Más adelante veremos que en la superficie de un conductor, no hay componente tangencial del campo eléctrico. Es decir el campo eléctrico es perfectamente perpendicular (o normal) a la superficie del conductor y luego la intensidad de este es $E_{sup} = E_n$. Otro punto que es importante observar aquí que esto vale localmente en cada punto de la superficie, es decir $\sigma = \sigma(\vec{r})$, y luego el campo en cada punto de la superficie depende del valor de la densidad de carga allí:

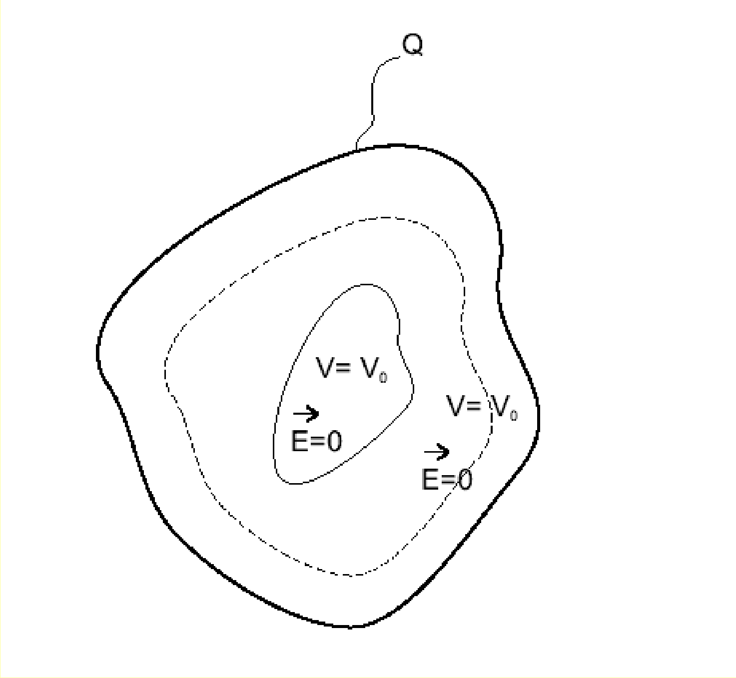
$$\vec{E}_{\text{sup}}(\vec{r}) = \frac{\sigma(\vec{r})}{\varepsilon_0}\,\hat{n}$$

Valor del campo eléctrico cerca de la superficie de un material conductor cargado

---

Aplicaciones de la ecuación de Laplace a materiales conductores

Conductor hueco, de forma arbitraria, cargado.



Resolvemos usando *unicidad* de la Ecuación de Laplace:

- En el conductor se satisface $\nabla^2 V = 0$ con solución $V(\vec{r}) = V_0 = \text{cte}$. En particular en el borde interior del conductor (borde del hueco) se tiene $V = V_0$.
- En el hueco se satisface también $\nabla^2 V = 0$. Para el hueco se postula $V = V_0$ como solución. Puesto que esta solución satisface la ecuación de Laplace y satisface la condición de borde, esta es **la** solución. En consecuencia, dentro del hueco, $\vec{E} = -\nabla V = 0$, y el campo $\vec{E}_{\text{sup}}$, justo en la superficie interior, es nulo. Luego,

$$\sigma = \varepsilon_0 \vec{E}_{\text{sup}} \cdot \hat{n} = 0$$

y no hay densidad de carga en la superficie interior. La carga del sistema está sólo distribuida en la superficie exterior del conductor.

Fin