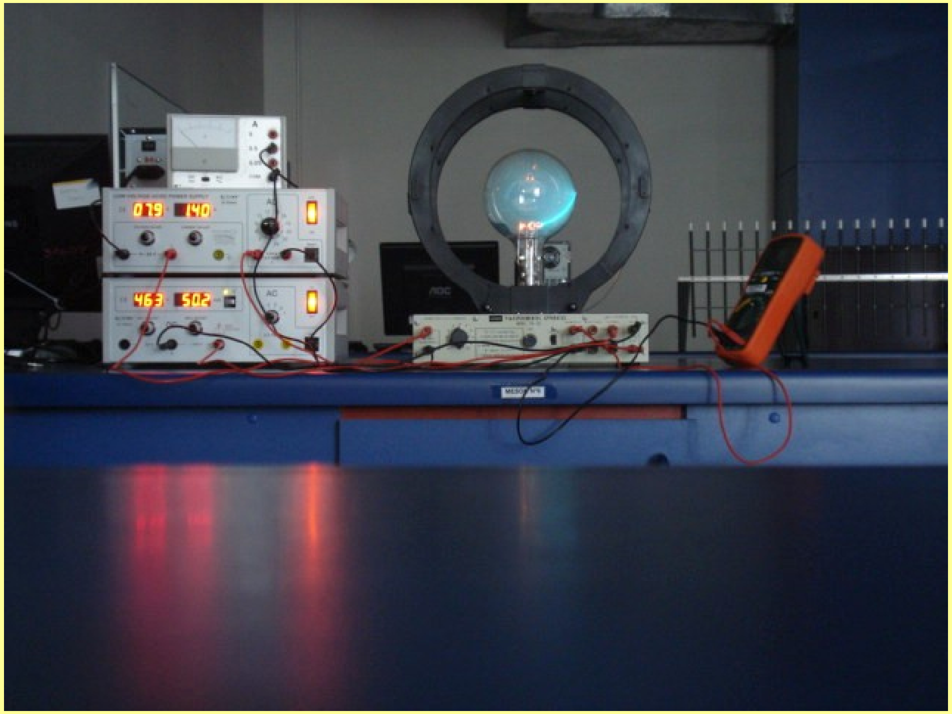
Campos Electromagnéticos

“Trabajo y Energía potencial eléctrica”

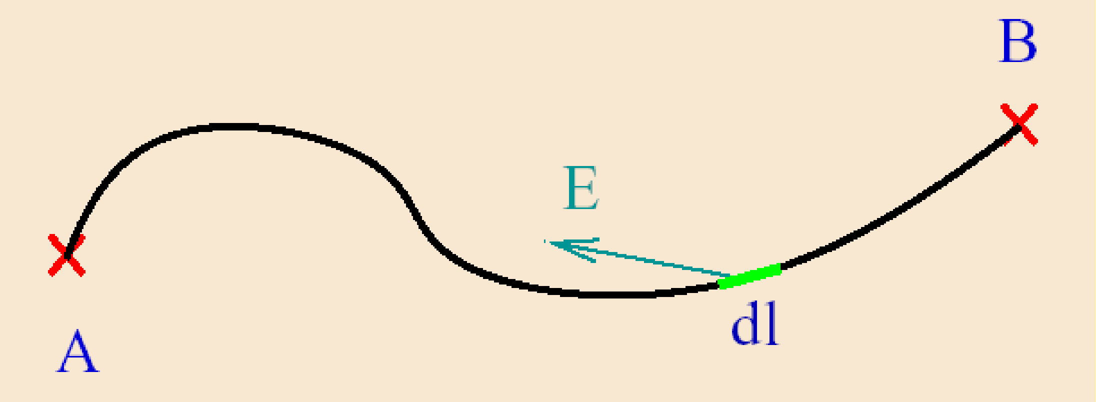


Profesor: Pedro Labraña
Departamento de Física,
Universidad del Bío-Bío

Carrera: Ingeniería Civil en Automatización
Créditos: 5

Trabajo

Calculemos el trabajo realizado para mover una carga q en contra del campo eléctrico, desde A a B:



$$\vec{F} = -q\vec{E}$$

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l} = -q \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Utilizando el teorema fundamental del cálculo

$$W = q\left[V(B) - V(A)\right]$$

Ver pizarra

Notar que el resultado es independiente del camino escogido para ir de B a A

Por otro lado el trabajo realizado <u>por el campo eléctrico</u> al mover la carga q de A a B es

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F}_E \cdot d\vec{r} = \int_A^B q\,\vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

$$W_{AB} = -q\big[V(B) - V(A)\big]$$

Donde V(A) es el potencial electrostático evaluado en la posición A
y V(B) es el potencial electrostático evaluado en la posición B

Como estamos hablando de trabajo entonces es conveniente introducir el concepto de Energía Potencial Eléctrica U(r).

$$W_{AB} = -\big[U(B) - U(A)\big] = -\Delta_{BA} U$$

Donde la función (que sólo depende de la posición)

$$U(\vec{r}) = q\,V(\vec{r})$$

Es la energía potencial eléctrica que siente un carga q debido a la presencia del campo eléctrico

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}V(\vec{r})$$

La energía potencial U(r) tiene unidades de energía. Luego en el sistema MKS U(r) se mide en Joule.

Ahora es claro porqué el potencial electrostático tiene unidades de Volt que corresponde a

$$[V] = \frac{[U]}{[q]} = \frac{\text{Joule}}{\text{Coulomb}}$$

$$\frac{\text{Joule}}{\text{Coulomb}} = 1[\text{Volt}] = 1[\text{V}]$$

Relación entre el potencial electrostático y el campo eléctrico

Hemos visto ya que $\vec{E} = -\nabla V$. Otra relación importante es la que sigue de $W = -\Delta U$. Esto es:

$$\begin{aligned} W_{AB} &= -\Delta_{BA} U \\ \int \vec{F} \cdot d\vec{r} &= -q\Delta_{BA} V \\ q\int \vec{E} \cdot d\vec{r} &= -q\Delta_{BA} V \end{aligned}$$

De donde obtenemos

$$\Delta_{BA} V = V(B) - V(A) = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

rescribiendo esta expresión para despejar V_B se puede obtener otro importante resultado:

$$V(B) = V(A) - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

Si el punto inicial A corresponde a una posición $\vec{r}_0$ y el punto final B a una posición cualquiera $\vec{r}$ se obtiene:

$$V(\vec{r}) = V_0 - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

que nos permite calcular el potencial en el punto $\vec{r}$ del espacio si conocemos el campo eléctrico en un camino que nos lleve de $\vec{r}_0$ a $\vec{r}$.

El valor $V_0 = V(\vec{r}_0)$ es, en general, un potencial de referencia respecto del cual se mide el potencial en otros puntos del espacio. Se acostumbra escoger $V_0 = 0$ en $\vec{r}_0 = \infty$.

Ver ejemplos

Conservación de la energía

Como hemos mencionado la fuerza electrostática es una fuerza conservativa. Esto significa que en los procesos donde está fuerza interviene la energía se conserva. Con la introducción del concepto de energía potencial electrostática ahora podemos demostrar este punto.

Para esto notemos que la fuerza electrostática se puede escribir como el gradiente de la energía potencial electrostática

$$\vec{F}_E = -\vec{\nabla} U((\vec{r})$$

Esto implica que la siguiente cantidad se conserva en el tiempo

$$E = \frac{m}{2}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)^2 + U(\vec{r})$$

(ver pizarra)

Esta cantidad es la energía de una partícula de masa m y carga q

Energía potencial electrostática almacenada en una configuración de cargas

Consideremos N partículas y el trabajo para llevar las cargas desde el infinito (partiendo del reposo) a una cierta posición final B quedando ellas finalmente quietas allí.

1. Para traer la primera partícula se hace un trabajo nulo

$$W_{BA}^{(1)} = 0$$

2. Para traer la segunda partícula se hace trabajo pues actúa sobre la segunda el campo de la primera. Se tiene:

$$W_{BA}^{(2)} = -q_2 V_{21}$$

Potencial electrostático que siente la carga q2 debido a la presencia de q1 en que $V_{21} = \frac{Kq_1}{r_{21}}$ es el potencial que siente la segunda debido a la primera. Notemos que se cumple $q_2 V_{21} = q_1 V_{12}$. Efectivamente pues

$$\begin{aligned} q_2 V_{21} &= q_1 V_{12} \\ q_2 \frac{Kq_1}{r_{21}} &= q_1 \frac{Kq_2}{r_{12}} \end{aligned}$$

luego se tiene:

$$W_{BA}^{(2)} = -\frac{1}{2}(q_2 V_{21} + q_1 V_{12})$$

3. Para traer la tercera carga se hace trabajo en presencia de la primera carga y de la segunda, se tiene:

$$W_{BA}^{(3)} = -(q_3 V_{31} + q_3 V_{32}) = -(q_1 V_{13} + q_2 V_{23})$$

Luego resulta:

$$W_{BA}^{(3)} = -\frac{1}{2}(q_1 V_{13} + q_2 V_{23} + q_3 V_{31} + q_3 V_{32})$$

4. $\ldots$

5. Para traer la N-ésima carga se hace un trabajo

$$
\begin{aligned}
W_{BA}^{(N)} &= -q_N(V_{N1} + V_{N2} + \ldots + V_{NN-1}) \\
&= -(q_1 V_{1N} + q_2 V_{2N} + \ldots + q_{N-1} V_{N-1,N})
\end{aligned}
$$

de modo que queda:

$$
\begin{aligned}
W_{BA}^{(N)} &= -\frac{1}{2}(q_1 V_{N1} + q_2 V_{N2} + q_3 V_{N3} + \cdots \\
&\quad + q_{N-1} V_{N,N-1} + q_N V_{N-1,N})
\end{aligned}
$$

Finalmente sumando todos los trabajos se tiene:

$$
\begin{aligned}
W_{BA}^{\text{total}} &= W_{BA}^{(1)} + W_{BA}^{(2)} + \ldots + W_{BA}^{(N)} \\
&= -\frac{1}{2}\left[q_1(V_{12} + V_{13} + V_{14} + \ldots + V_{1N}) + \right. \\
&\quad q_2(V_{21} + V_{23} + V_{24} + \ldots + V_{2N}) + \ldots + \\
&\quad \left. q_N(V_{N1} + V_{N2} + V_{N3} + \ldots + V_{NN-1})\right]
\end{aligned}
$$

Luego tenemos que

$$\begin{aligned} W_{BA}^{\text{total}} &= -\frac{1}{2}\left[q_1 \sum_{j\neq 1}^{N} V_{1j} + q_2 \sum_{j\neq 2}^{N} V_{2j} + \cdots q_N \sum_{j\neq N}^{N} V_{Nj}\right] \\ &= -\frac{1}{2}\left(q_1 V(\vec{r}_i) + q_2 V(\vec{r}_2) + \ldots + q_N V(\vec{r}_N)\right) \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\boxed{W^{\text{total}} = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} q_i V(\vec{r}_i)}$$

Por otro lado sabemos que dicho trabajo es conservativo, de modo que la energía potencial electrostática asociada satisface: $W^{\text{total}} = -\Delta U^{\text{total}}$. Puesto que cuando las partículas están en infinito se tiene $U = 0$ resulta la energía potencial electrostática asociada a la configuración final de cargas está dada por:

Energía potencial electrostática asociada a la configuración final de cargas

$$\boxed{U_{\text{final}}^{\text{total}} = \Delta U^{\text{total}} = -W^{\text{total}} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} q_i V(\vec{r}_i)}$$

Para el caso de cargas distribuidas en forma continua se tiene la relación equivalente

$$\boxed{U^{\text{total}} = \frac{1}{2}\int dq V(\vec{r})}$$

Fin