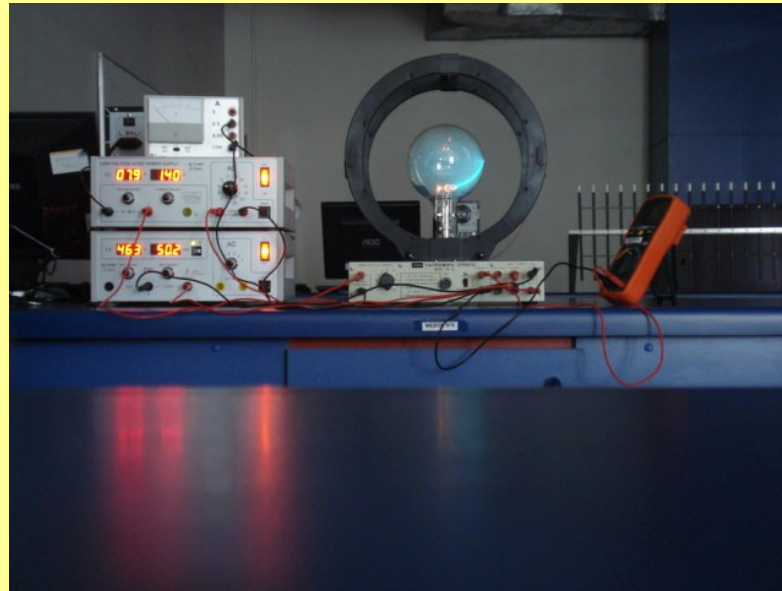


Campos Electromagnéticos

“Ley de Gauss escrita en forma diferencial.
El Potencial Electrostatico”



Profesor: Pedro Labraña
Departamento de Física,
Universidad del Bío-Bío

Carrera: Ingeniería Civil en Automatización
Créditos: 5

Ley de Gauss escrita en forma diferencial

Recordemos la Ley de Gauss (Versión Integral)

Esta ley, establece que el flujo del campo eléctrico sobre una cierta superficie cerrada, es proporcional a la carga encerrada por dicha superficie. La constante de proporcionalidad es $1/\epsilon_0$ (o equivalentemente $4\pi K$). La Ley de Gauss se escribe:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{encerrada}}}{\epsilon_0}$$

Utilizando el teorema de la divergencia podemos escribir la versión diferencial de esta ley

(Ver pizarra)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0}$$

Una de las ecuaciones de Maxwell que describen al electromagnetismo

El Potencial Electroestático

Hemos estudiado hasta aquí el cómo se generan los campos eléctricos y las fuerzas que estos realizan sobre las partículas. Una pregunta que naturalmente viene a continuación es la del *trabajo asociado a esa fuerza*, es decir el *trabajo eléctrico*.

Campo eléctrico es conservativo

La observación importante aquí es que el campo eléctrico **es conservativo**. Es decir el valor del trabajo no varia independiente de que camino describa la partícula para ir de un punto A a un punto B, o en otras palabras *el trabajo sobre un camino cerrado de la fuerza eléctrica es nulo*.

Para demostrar que el campo eléctrico es conservativo debemos notar la siguiente propiedad del campo eléctrico

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}) = 0$$

Ver pizarra

Luego si el rotor del campo eléctrico es cero esto implica que necesariamente el campo eléctrico es el gradiente de una función escalar, esto es:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}V(\vec{r})$$

Donde $V(\vec{r})$ es una función escalar denominada **Potencial Electrostático**

El signo menos es algo convencional

Potencial Electrostático generado por una carga puntual q .

Recordamos que

Campo eléctrico de una carga puntual ubicada en \vec{r}'

$$\vec{E}(\vec{r}) = K \frac{q}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^{3/2}} (\vec{r} - \vec{r}')$$

Por otro lado sabemos que

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} V(\vec{r})$$

Usando la siguiente identidad demostrada con anterioridad podemos determinar cuanto vale el potencial electrostático generado por una carga puntual

$$\vec{\nabla} \left[\frac{C}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \right] = -\frac{C}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} (\vec{r} - \vec{r}')$$

Luego el potencial electrostático generado por una carga puntual q ubicada en r' es

$$V(\vec{r}) = \frac{\mathbf{K} q'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|}$$

Potencial Electrostático generado por un conjunto de cargas puntuales.

$$V(\vec{r}) = K \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{\|\vec{r} - \vec{r}_i\|}$$

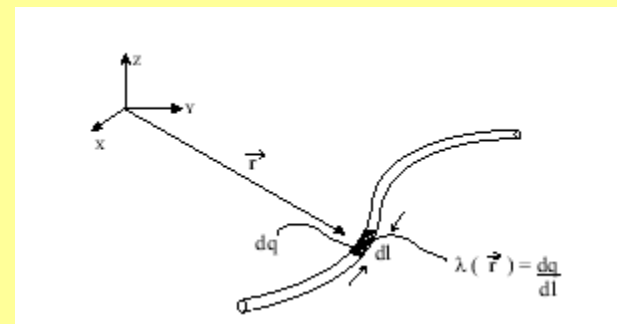
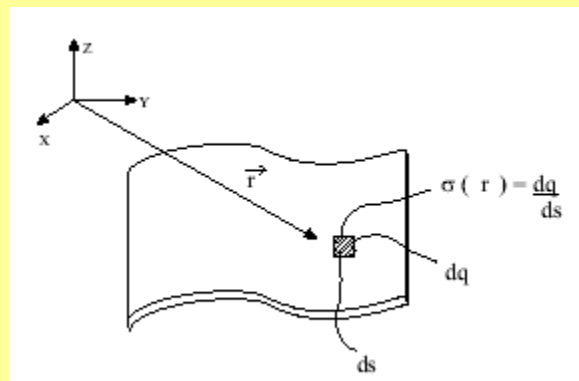
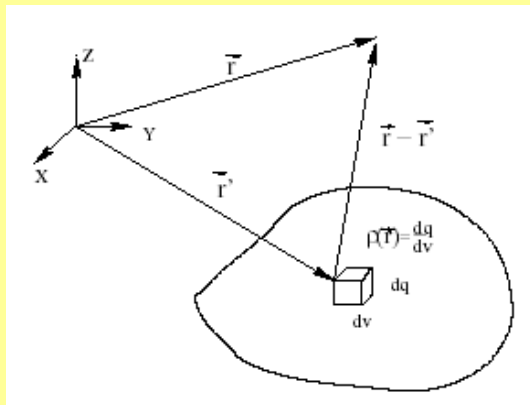
Las unidades del potencial eléctrico serán las de energía dividida por carga:

$$[V] = \frac{[U]}{[q]} = \frac{\text{Joule}}{\text{Coulomb}}$$

Potencial Eléctrico Generado por Distribuciones Continuas de Carga Eléctrica

En la electricidad clásica hablamos de cargas puntuales o cargas discretas y de distribución continua de cargas, ya sea en un volumen, en una superficie o en una línea. Definimos:

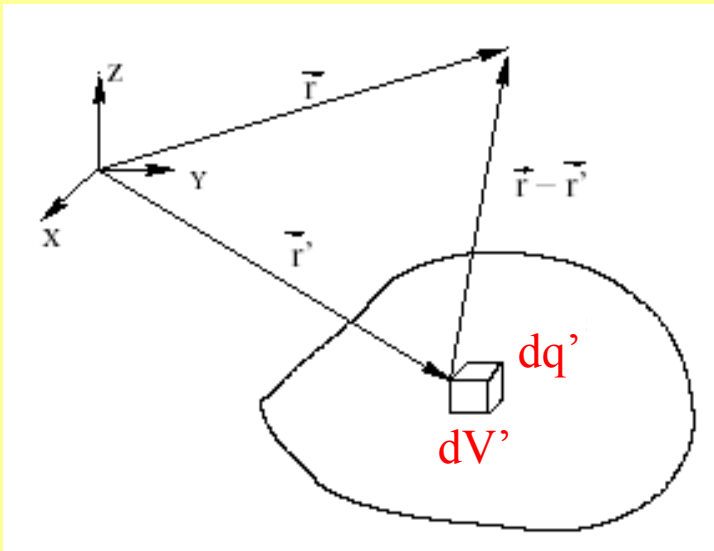
- ρ la densidad de carga por unidad de volumen [C/m^3],
- σ la densidad de carga por unidad de área [C/m^2] y
- λ la densidad de carga por unidad de longitud [C/m].



Cada una de estas distribuciones de carga generan un potencial eléctrico

El potencial eléctrico debido a cada una de estas distribuciones de carga puede considerarse como la sumatoria del potencial al que contribuyen las numerosas cargas puntuales que forman las distribuciones de carga.

Consideremos como ejemplo la siguiente distribución de carga volumétrica



Un elemento de volumen dV' contendrá un elemento de carga dq' . Este elemento de carga generará un elemento de potencial eléctrico (diferencial de potencial eléctrico) dado por la siguiente expresión:

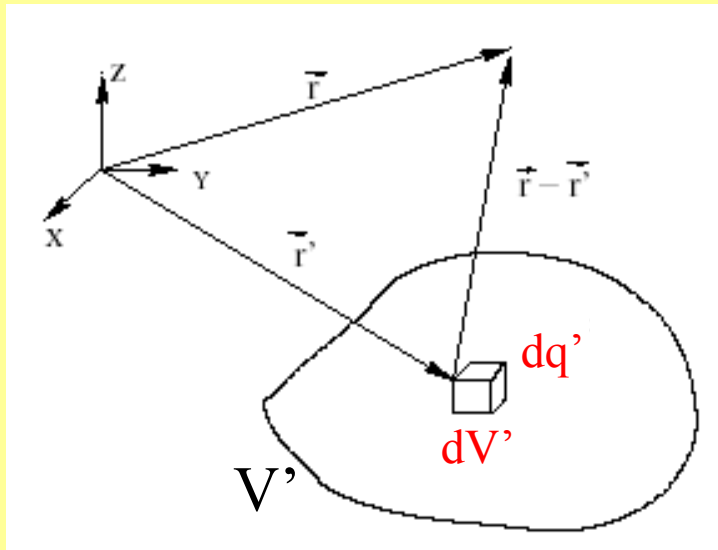
$$dV(\vec{r}) = K \frac{dq'}{||\vec{r} - \vec{r}'||}$$

Luego el potencial eléctrico total generado por la distribución será “la sumatoria” de estos diferenciales de potencial eléctrico

$$V(\vec{r}) = \int dV(\vec{r})$$

Luego para las diferentes distribuciones de carga tenemos

Distribución de carga volumétrica



$$dV(\vec{r}) = K \frac{dq'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

$$V(\vec{r}) = \int dV(\vec{r})$$

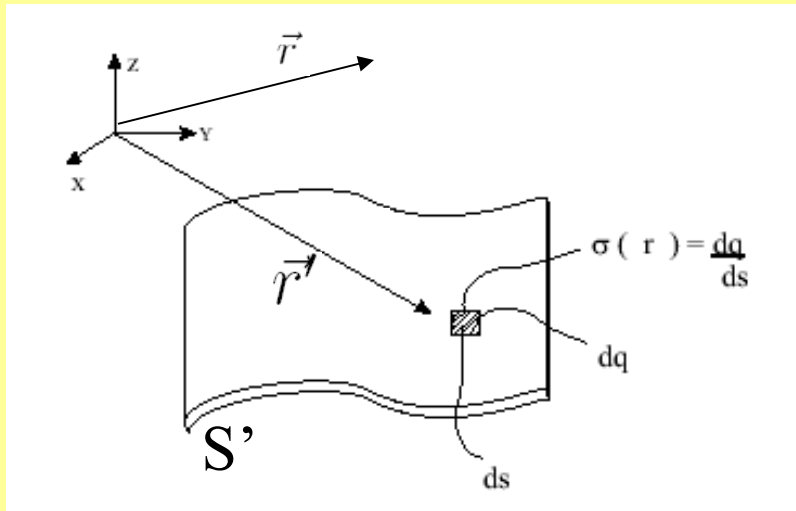
En este caso: $dq' = \rho(\vec{r}') d^3 r'$

Donde \vec{r}' es el vector posición de la carga dq' .
También hemos utilizado que $dV' = d^3 r'$

Luego el potencial eléctrico para esta distribución será

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r'$$

Distribución de carga superficial



$$dV(\vec{r}) = K \frac{dq'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

$$V(\vec{r}) = \int dV(\vec{r})$$

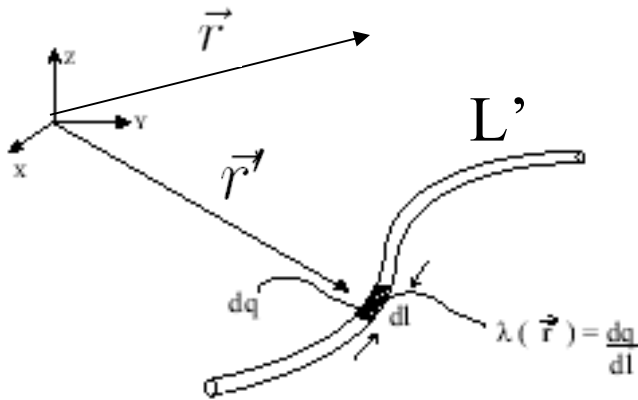
En este caso: $dq' = \sigma(\vec{r}') d^2 r'$

Donde \vec{r}' es el vector posición de la carga dq' .

Luego el potencial eléctrico para esta distribución será

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{S'} \frac{\sigma(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^2 r'$$

Distribución de carga lineal



$$dV(\vec{r}) = K \frac{dq'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|}$$

$$V(\vec{r}) = \int dV(\vec{r})$$

En este caso: $dq' = \lambda(\vec{r}') dr'$

Donde \vec{r}' es el vector posición de la carga dq' .

Luego el Potencial eléctrico para esta distribución será

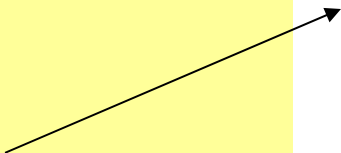
$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{L'} \frac{\lambda(\vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} dr'$$

Ejemplo 1 (caso cargas puntuales)

Tres cargas iguales, de valor $-q$, se ubican en los vértices de un triángulo equilátero de lado a .

- a) Calcular el potencial que sentiría una carga de prueba ubicada en el centro del triángulo.
- b) Calcular el potencial que siente una de las partículas ubicadas en uno de los vértices, debido a las otras dos partículas (NOTA: es decir la contribución al potencial sobre la posición en que se encuentra una de las partículas debido a las otras dos partículas).
- c) Calcular el potencial que generan cada una de las partículas en un punto ubicado en infinito.
- d) Si una partícula de prueba q_0 ubicada inicialmente en el centro del triángulo se desplaza hasta infinito. ¿Cuánto sería la variación de potencial que ella experimenta?. ¿Cuánto sería la variación de *energía potencial* que ella experimenta?. ¿Cuánto sería el trabajo que hacen entonces las tres partículas de la configuración triangular sobre la carga q_0 ?

Para más adelante



A)

Solución: La distancia entre los vértices y el centro es: $\frac{\sqrt{3}}{3}a$. Las tres cargas están a la misma distancia y tienen el mismo signo, por lo que contribuyen con el mismo valor del potencial. El potencial generado sobre la carga de prueba sería:

$$V = 3 \frac{K(-q)}{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)} = -\frac{9}{\sqrt{3}} \frac{Kq}{a}$$

B)

El potencial que siente una carga ubicada en un vértice se debe a las dos restantes partículas. Esto es:

$$V = 2 \frac{K(-q)}{a} = -2 \frac{Kq}{a}$$

C)

En el infinito cualquiera de las partículas genera un potencial nulo ya que $V_{\infty} = \frac{K[-q]}{\infty} = 0$.

Si la partícula se desplaza del centro hasta el infinito se tiene:

$$\begin{aligned}\Delta V &= V_{\infty} - \left(-\frac{9}{\sqrt{3}} \frac{Kq}{a} \right) \\ &= \frac{9}{\sqrt{3}} \frac{Kq}{a}\end{aligned}$$

$$\Delta U = q_0 \Delta V = \frac{9}{\sqrt{3}} \frac{Kqq_0}{a}$$

$$W = -\Delta U = -q_0 \Delta V = -\frac{9}{\sqrt{3}} \frac{Kqq_0}{a}$$

Ej. 2 (Distribución continua de carga)

Potencial generado por un anillo circular de radio a con distribución uniforme de carga λ_0 sobre su eje axial: Aquí se considera $dq = \lambda_0 dl = \lambda_0 a d\phi$, y se tiene $\vec{r} = z\hat{z}$, $\vec{r}' = a\hat{\rho}$, de donde $\|\vec{r} - \vec{r}'\| = \sqrt{a^2 + z^2}$. La integración es trivial

$$\begin{aligned} V(z) &= \int \frac{Kdq'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{K\lambda_0 a d\phi}{\sqrt{a^2 + z^2}} \\ &= \frac{2\pi aK}{\sqrt{a^2 + z^2}} \end{aligned}$$

Si usamos que $\vec{E} = -\nabla V$ podemos reobtener el campo eléctrico a lo largo del eje axial.

Ver pizarra

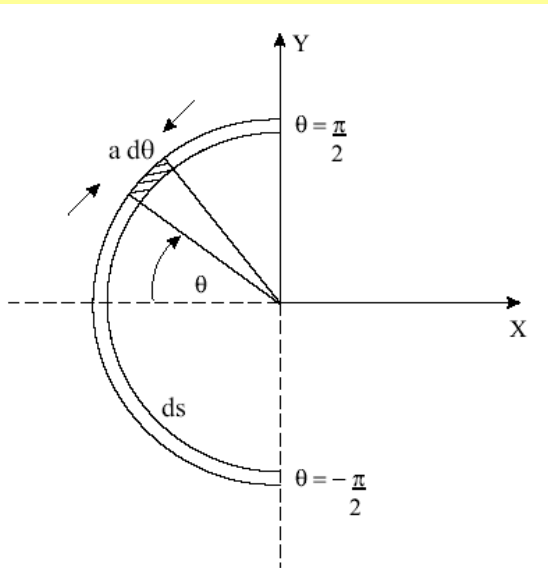
16-Un disco circular de radio a tiene una carga uniforme de ρ_s . Demuestre que el potencial en un punto de su eje situado h metros alejado de su centro es:

$$\phi = \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} [(h^2 + a^2)^{1/2} - h]$$

Guía 4, TAREA

Ej. 3

Potencial generado por un segmento de cable curvo semicircular de radio a con densidad uniforme λ_0 sobre el centro del semicírculo:



De acuerdo a la figura $\vec{r} = 0$ y $\vec{r}' = -a \cos \theta \hat{x} + a \sin \theta \hat{y}$. Se tiene $\|\vec{r} - \vec{r}'\| = a$. $dq = \lambda_0 dl = \lambda_0 a d\theta$. El potencial resulta:

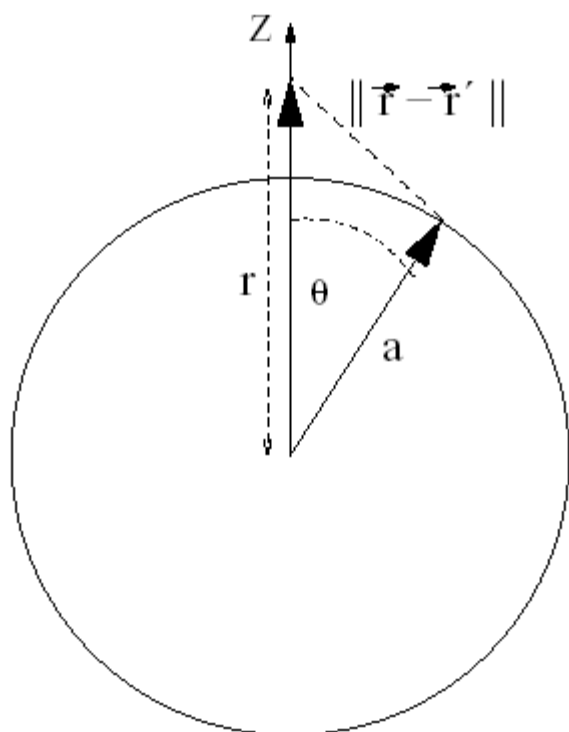
$$\begin{aligned} V(z) &= \int \frac{K dq'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{K \lambda_0 a d\theta}{a} \\ &= \pi \lambda_0 K \end{aligned}$$

Aquí sólo se conoce el potencial en un punto de modo que no es posible aplicar $\vec{E} = -\nabla V$ para obtener el campo eléctrico en dicho punto.

Ej. 4

Potencial en todo el espacio generado por un cascarón esférico con densidad superficial uniforme Usamos coordenadas esféricas. Nos aprovechamos que el potencial tiene simetría esférica luego sólo depende de la variable r y no de la variable θ ni de la variable ϕ por lo que podemos escoger una posición conveniente de la posición: $\vec{r} = r\hat{z}$. La posición sobre la cual integramos es: $\vec{r}' = a\hat{r}$. Como sigue de la figura la distancia entre estos puntos satisface:

$$\begin{aligned}\|\vec{r} - \vec{r}'\| &= \sqrt{r^2 + a^2 - 2ra\cos\theta} \\ &= \sqrt{r^2 + a^2 - 2ra\cos\theta}\end{aligned}$$



La carga infinitesimal está dada por $dq = \sigma_0 dS = \sigma_0 a^2 \sin\theta d\theta d\phi$. Se tiene

$$\begin{aligned}V(r) &= \int \frac{Kdq'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \\ &= \int \frac{K\sigma_0 dS}{\sqrt{r^2 + a^2 - 2ra\cos\theta}} \\ &= \int \frac{K\sigma_0 a^2 \sin\theta d\theta d\phi}{\sqrt{r^2 + a^2 - 2ra\cos\theta}} \\ &= K\sigma_0 a^2 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\sin\theta d\theta d\phi}{\sqrt{r^2 + a^2 - 2ra\cos\theta}}\end{aligned}$$

Hacemos el cambio $u = r^2 + a^2 - 2ra \cos \theta$. Se tiene $du = 2ra \sin \theta d\theta$ de donde sigue:

$$\begin{aligned} V(r) &= \frac{2\pi K \sigma_0 a^2}{2ra} \int \frac{du}{\sqrt{u}} \\ &= \frac{2\pi K \sigma_0 a}{r} \int \frac{du}{2\sqrt{u}} \\ &= \frac{2\pi K \sigma_0 a}{r} [\sqrt{u}] \\ &= \frac{2\pi K \sigma_0 a}{r} \left[\sqrt{r^2 + a^2 - 2ra \cos \theta} \right] \Big|_0^\pi \\ &= \frac{2\pi K \sigma_0 a}{r} \left[\sqrt{r^2 + a^2 + 2ra} \right. \\ &\quad \left. - \sqrt{r^2 + a^2 - 2ra} \right] \\ &= \frac{2\pi K \sigma_0 a}{r} \left(\sqrt{(r+a)^2} - \sqrt{(r-a)^2} \right) \\ &= \frac{2\pi K \sigma_0 a}{r} (|r+a| - |r-a|) \\ &= \begin{cases} \frac{2\pi K \sigma_0 a}{r} (2a) & r > a \\ \frac{2\pi K \sigma_0 a}{r} (2r) & r < a \end{cases} \end{aligned}$$

y finalmente

$$V(r) = \begin{cases} \frac{4\pi K\sigma_0 a^2}{r} = KQ/r & r > a \\ 4\pi K\sigma_0 a = KQ/a & r < a \end{cases}$$

Observemos que este resultado muestra que afuera del cascarón el potencial se comporta igual que el potencial de una esfera puntual cuya carga total $Q = \sigma_0 4\pi a^2$ estuviera concentrada en el origen del sistema de coordenadas. Por otro lado en el interior del cascarón se tiene que el potencial resulta constante.

Campo eléctrico dentro y fuera del cascarón esférico: Una consecuencia importante del resultado anterior es que el campo eléctrico en el interior del cascarón es nulo ya que $\vec{E} = -\nabla V = 0$, mientras que afuera se tiene $\vec{E} = -\nabla V = -\frac{\partial V(r)}{\partial r} = \frac{KQ}{r^2} \hat{r}$. En resumen:

$$\vec{E}(r) = \begin{cases} \frac{KQ}{r^2} \hat{r} & r > a \\ 0 & r < a \end{cases}$$

Fin