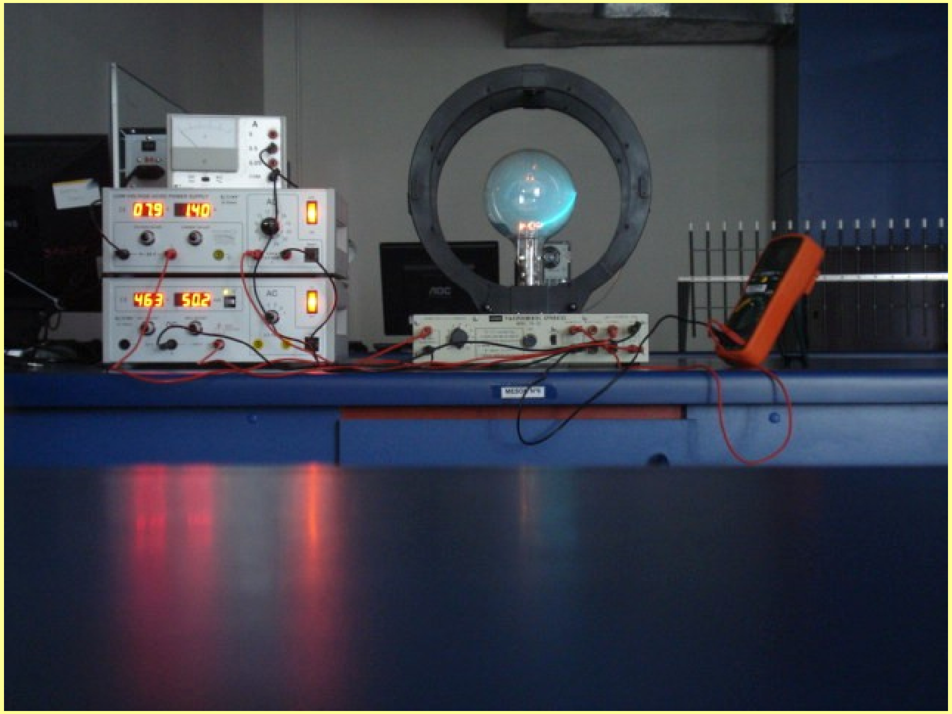
Campos Electromagnéticos

“Repaso de Cálculo Vectorial”



Profesor: Pedro Labraña
Departamento de Física,
Universidad del Bío-Bío

Carrera: Ingeniería Civil en Automatización
Créditos: 5

1.3. Nociones de Campo Escalar y Campo Vectorial

1.3.1. Campo Escalar

Entenderemos por un campo escalar a una aplicación de $\mathcal{R}^3 \to \mathcal{R}$. Es decir una aplicación que combina 3 valores reales para dar 1 valor real.

Para los efectos prácticos de este curso un campo escalar es una función real cuyo valor depende del punto $\vec{r} = (x, y, z)$ del espacio de coordenadas que se considere:

$$f(\vec{r}) = f(x, y, z) \quad \text{coordenadas cartesianas}$$

$$f(\vec{r}) = f(\rho, \phi, z) \quad \text{coordenadas cilíndricas}$$

o

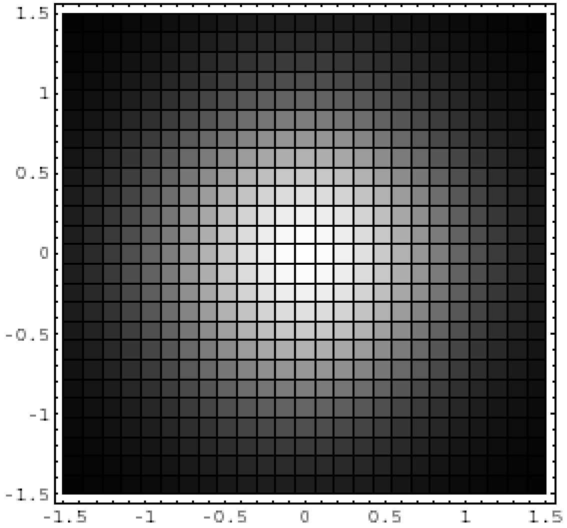
$$f(\vec{r}) = f(r, \theta, \phi) \quad \text{coordenadas esféricas}$$

Campo escalares: (A cada punto del espacio le asigna un número)

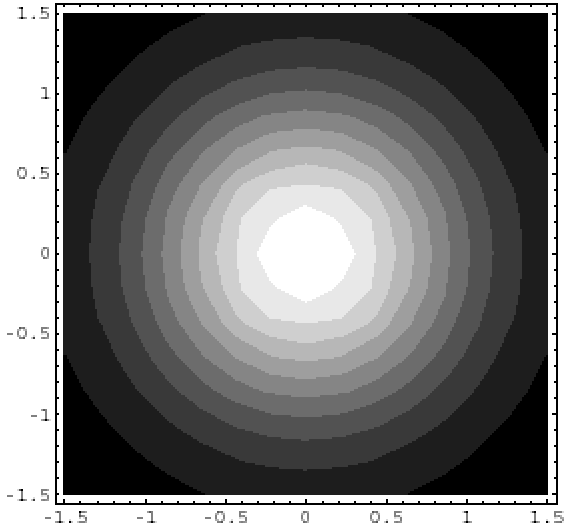
Ej. El campo de temperatura en torno a un cable caliente recto, ubicado a lo largo del eje z y sometido a temperatura T_0, calienta el espacio en torno de él.

$$T(\vec{r}) = T_0 e^{-\rho^2/L^2} = T_0 e^{-\frac{x^2+y^2}{L^2}}$$

La longitud L es una función del tiempo que mide la distancia característica que ha alcanzado a calentar el cable en torno de él. Un gráfico de la distribución de temperatura en torno al cable corresponde a la siguiente figura, para el caso $L = 1$:



La figura siguiente corresponde a un las curvas de iso-temperatura (misma temperatura) en coordenadas cilíndricas:



1.3.2. Campos vectoriales

Entenderemos por campo vectorial a una función de $\mathcal{R}^3 \rightarrow \mathcal{R}^3$. Es decir una aplicación que combina 3 valores reales para dar 3 valor reales.

Para los efectos prácticos de este curso un campo vectorial es una función vectorial cuyo valor depende del punto $\vec{r} = (x, y, z)$ del espacio que se considere. Por ejemplo en *coordeandas cartesianas*:

$$
\begin{aligned}
\vec{f}(\vec{r}) &= \vec{f}(x, y, z) \\
&= f_x(x, y, z)\hat{x} + f_y(x, y, z)\hat{y} + f_z(x, y, z)\hat{z}
\end{aligned}
$$

Es decir a cada punto del espacio le asigna un vector (una "flechita")

Note que a partir de la definición anterior queda claro que un campo vectorial tiene por componentes 3 campos escalares (en este caso los campos f_x, f_y y f_z).

Similarmente si el campo vectorial está descrito en *coordenadas cilíndricas*:

$$\begin{aligned}\vec{f}(\vec{r}) &= \vec{f}(\rho,\phi,z) \\ &= f_\rho(\rho,\phi,z)\hat{\rho} + f_\phi(\rho,\phi,z)\hat{\phi} + f_z(\rho,\phi,z)\hat{z}\end{aligned}$$

y similamente si está descrito en *coordenadas esféricas*:

$$\begin{aligned}\vec{f}(\vec{r}) &= \vec{f}(r,\phi,\theta) \\ &= f_r(r,\phi,\theta)\hat{r} + f_\phi(r,\phi,\theta)\hat{\phi} + f_\theta(r,\phi,\theta)\hat{\theta}\end{aligned}$$

<u>Campo vectoriales</u>: A cada punto del espacio le asigna un vector

Ej.

Un ejemplo familiar de campo vectorial es el campo de velocidades de un fluído. La figura de a continuación muestra el caso del llamado *flujo de Poiseuille*, o flujo en un canal de sección uniforme:

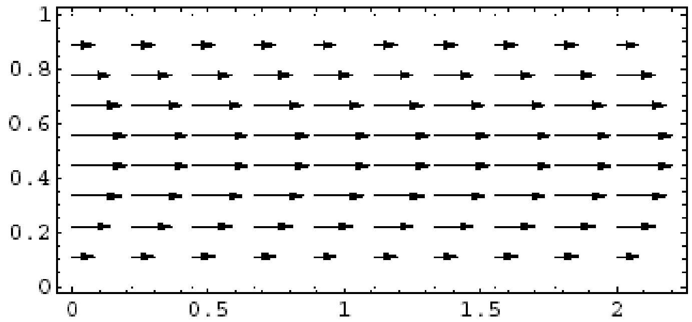


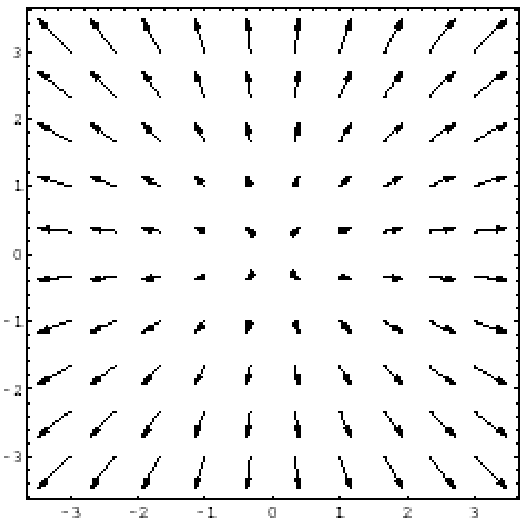
Figura 1.12: Representación gráfica del campo vectorial asociado al flujo de Poiseuille (flujo a lo largo de un canal).

Este flujo está descrito por la expresión

$$\vec{f} = 4\frac{v_0}{L^2}y(y-L)\hat{x}$$

en que v_0 es la rapidez del fluido al centro del canal y L la separación entre las paredes del canal. En este caso las paredes del canal corresponden a los bordes superior e inferior del dibujo.

Ej.



"Una fuente"

$$\vec{f}(\vec{r}) = \vec{r} = \rho\hat{\rho} = x\hat{x} + y\hat{y}$$

Un vórtice: $\vec{f} = \hat{z}\wedge\vec{r} = -y\hat{x} + x\hat{y}$

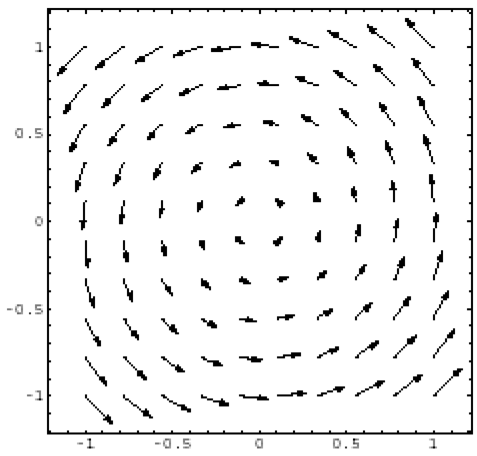
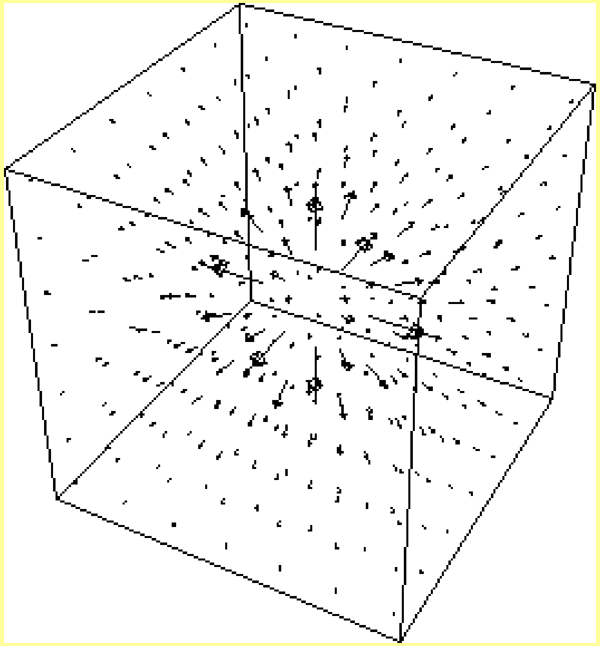


Figura 1.15: Representación gráfica del campo vectorial correspondiente a un vórtice de fluido

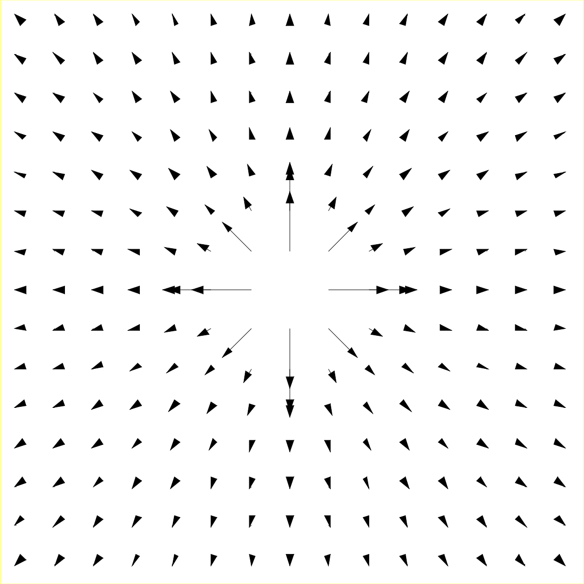
...y un viejo conocido

El campo eléctrico es un campo vectorial

El campo eléctrico de una carga puntual ubicada en el origen



Proyección en 2D al plano (x,y)



Derivadas Parciales de Campos Escalares

Cartesianas: Entendemos por derivada parcíal, en el punto (x,y,z), respecto a la variable x de una función escalar $f(x,y,z)$ a:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y, z) - f(x,y,z)}{\Delta x}.$$

Del mismo modo la derivación parcial respecto de la variable y sería:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y, z) - f(x,y,z)}{\Delta y}.$$

Sigue en forma natural una relación similar para la derivación respecto de la variable z.

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(x, y, z+\Delta z) - f(x,y,z)}{\Delta z}.$$

Cilíndricas: La derivación respecto de la variable ρ (coordenadas cilíndricas) de una función escalar $f(\rho,\phi,z)$ está definida como:

$$\frac{\partial f}{\partial \rho} = \lim_{\Delta\rho\to 0} \frac{f(\rho+\Delta\rho,\phi,z)-f(\rho,\phi,z)}{\Delta\rho}.$$

Del mismo modo la derivación parcial respecto de la variable ϕ sería:

$$\frac{\partial f}{\partial \phi} = \lim_{\Delta\phi\to 0} \frac{f(\rho,\phi+\Delta\phi,z)-f(\rho,\phi,z)}{\Delta\phi}.$$

La derivación respecto de la variable z no cambia respecto de la definición en cartesianas.

Esféricas: La derivación respecto de la variable r (coordenadas esféricas) de una función escalar $f(r,\phi,\theta)$ está definida como:

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \lim_{\Delta r\to 0} \frac{f(r+\Delta r,\theta,\phi)-f(r,\theta,\phi)}{\Delta r}.$$

Del mismo modo la derivación parcial respecto de la variable θ sería:

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = \lim_{\Delta\theta\to 0} \frac{f(r,\theta+\Delta\theta,\phi)-f(r,\theta,\phi)}{\Delta\theta}.$$

La derivación respecto de la variable ϕ toma la misma forma que en cilíndricas:

$$\frac{\partial f}{\partial \phi} = \lim_{\Delta\phi\to 0} \frac{f(r,\theta,\phi+\Delta\phi)-f(r,\theta,\phi)}{\Delta\phi}.$$

Ej.en cartesianas, ver pizarra.

Notar que las derivadas parciales conmutan (ver pizarra)

Derivadas Parciales de Campos Vectoriales

La derivada parcial respecto de una variable x de una función vectorial $\vec{f} = f_x(x,y,z)\hat{x} + f_y(x,y,z)\hat{y} + f_z(x,y,z)\hat{z}$ es:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\vec{f} &= \frac{\partial}{\partial x}(f_x\hat{x} + f_y\hat{y} + f_z\hat{z}) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}(f_x\hat{x}) + \frac{\partial}{\partial x}(f_y\hat{y}) + \frac{\partial}{\partial x}(f_z\hat{z}) \\
&= \frac{\partial f_x}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial f_y}{\partial x}\hat{y} + \frac{\partial f_z}{\partial x}\hat{z}
\end{aligned}$$

Idem si se deriva $\vec{f}$ respecto de y:

$$\frac{\partial}{\partial y}\vec{f} = \frac{\partial f_x}{\partial y}\hat{x} + \frac{\partial f_y}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial f_z}{\partial y}\hat{z}.$$

Notar que al hacer estas derivadas los vectores unitarios se consideraron como constantes.

Hay que tener un cierto cuidado cuando se hace derivada de este tipo para otros sistemas de coordenadas, por ejem plo al derivar el vector $\vec{r}$ respecto de la variable ϕ en co ordenadas cilindricas:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} &= \frac{\partial}{\partial \phi}(\rho \hat{\rho} + z\hat{z}) \\
&= \frac{\partial}{\partial \phi}(\rho \hat{\rho}) + \frac{\partial}{\partial \phi}(z\hat{z}) \\
&= (\frac{\partial \rho}{\partial \phi}\hat{\rho} + \rho \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial \phi}) + \frac{\partial}{\partial \phi}(z\hat{z}) \\
&= (0\hat{\rho} + \rho \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial \phi}) + 0\hat{z}
\end{aligned}
$$

Como

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial \phi} &= \frac{\partial}{\partial \phi}(\cos\phi\, \hat{x}) + \frac{\partial}{\partial \phi}(\sin\phi\, \hat{y}) \\
&= (\frac{\partial}{\partial \phi}\cos\phi)\hat{x} + (\frac{\partial}{\partial \phi}\sin\phi)\hat{y} \\
&= -\sin\phi\, \hat{x} + \cos\phi\, \hat{y} \\
&= \hat{\phi}
\end{aligned}
$$

Finalmente obtenemos

$$\frac{\partial \vec{\rho}}{\partial \phi} = \rho \hat{\phi}.$$

Diferencial y gradiente de un campo escalar

El diferencial de un campo escalar se define como la diferencia de valor de la función entre dos puntos separados infinitesimalmente en $d\vec{r}$:

$$df = f(\vec{r} + d\vec{r}) - f(\vec{r})$$

Ver pizarra

Coordenadas cartesianas. En el caso de una sóla variable (por ejemplo x) el diferencial es simplemente $df = \frac{df}{dx}dx$, sin embargo cuando hay más de una variable se debe derivar con respecto a cada una de ellas. El diferencial de un campo escalar en coordenadas cartesianas es:

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{z}\right) \cdot (dx\hat{x} + dy\hat{y} + dz\hat{z}) \\ &= \vec{\nabla} f \cdot d\vec{r} \end{aligned}$$

En que hemos introducido la siguiente notación vectorial

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{z}$$

Coordenadas cilíndricas De la misma manera se puede proceder en el caso de coordenadas cilíndricas. El diferencial de un campo escalar es:

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial f}{\partial \phi} d\phi + \frac{\partial f}{\partial z} dz \\ &= \frac{\partial f}{\partial \rho} d\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \phi}(\rho\, d\phi) + \frac{\partial f}{\partial z} dz \\ &= (\frac{\partial f}{\partial \rho}\hat{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \phi}\hat{\phi} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{z}) \cdot (d\rho\,\hat{\rho} + \rho\, d\phi\,\hat{\phi} + dz\,\hat{z}) \\ &= \vec{\nabla} f \cdot d\vec{r} \end{aligned}$$

En que luego de identificar el diferencial de camino en coordenadas cilíndricas hemos introducido la siguiente notación vectorial:

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial \rho}\hat{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \phi}\hat{\phi} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{z}$$

Coordenadas esféricas Para el caso de coordenadas esféricas se tiene:

$$\begin{aligned}
df &= \frac{\partial f}{\partial r}dr + \frac{\partial f}{\partial \theta}d\theta + \frac{\partial f}{\partial \phi}d\phi \\
&= \frac{\partial f}{\partial r}dr + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}(r\,d\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \phi}(r\sin\theta\,d\phi) \\
&= (\frac{\partial f}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\hat{\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \phi}\hat{z}) \cdot \\
&\quad (dr\,\hat{r} + r\,d\theta\,\hat{\theta} + r\sin\theta\,\hat{\phi}) \\
&= \vec{\nabla} f \cdot d\vec{r}
\end{aligned}$$

En que luego de identificar el diferencial de camino en coordenadas esféricas hemos introducido la siguiente notación vectorial:

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\hat{\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \phi}\hat{\phi}$$

Operador gradiente

Con el objeto de resumir conviene introducir un nuevo operador vectorial que se construye con las derivadas parciales. Este es el operador gradiente o nabla:

$$\vec{\nabla} = \begin{cases} \hat{x}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z} & \text{(cartesianas)} \\ \hat{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho} + \hat{\phi}\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \phi} + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z} & (cilndricas) \\ \hat{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\hat{\theta}}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\hat{\phi}}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \phi} & (esfricas) \end{cases}$$

Ver pizarra

con esto el diferencial df queda:

$$\boxed{df = \vec{\nabla} f \cdot d\vec{r}}$$

Notemos que $\vec{\nabla} f$ es un vector.

El operador gradiente toma a un campo escalar y lo transforma en una campo vectorial

Significado del operador $\vec{\nabla}$ o gradiente aplicado a un campo escalar El operador gradiente o ∇ recién introducido, cuando es aplicado a un campo escalar, permite obtener un vector que apunta (localmente, es decir en cada posición $\vec{r}$) en la dirección que crece más rapidamente el campo escalar.

Gradiente de un Campo escalar

Campo escalar $\longrightarrow$ Campo vectorial

$$\boxed{\vec{\nabla} f(\vec{r}) = \vec{A}(\vec{r})}$$

Divergencia de un Campo Vectorial

Campo vectorial $\longrightarrow$ Campo escalar

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{r}) = g(\vec{r})}$$

Divergencia de una campo escalar en coordenadas cartesianas

$$\vec{B}(\vec{r}) = B_x(x,y,z)\hat{x} + B_y(x,y,z)\hat{y} + B_z(x,y,z)\hat{z}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{r}) = \left(\hat{x}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot \left(B_x\hat{x} + B_y\hat{y} + B_z\hat{z}\right)$$

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z}}$$

Divergencia de una campo escalar en coordenadas cilíndricas

$$\vec{B}(\vec{r}) = B_\rho(\rho,\phi,z)\hat{\rho} + B_\phi(\rho,\phi,z)\hat{\phi} + B_z(\rho,\phi,z)\hat{z}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}(\vec{r}) = \left(\hat{\rho}\,\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{\hat{\phi}}{\rho}\,\frac{\partial}{\partial\phi} + \hat{z}\,\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\left(B_\rho\hat{\rho} + B_\phi\hat{\phi} + B_z\hat{z}\right)$$

$$\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{B}(\vec{r}) = \frac{1}{\rho}\,\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho B_\rho) + \frac{1}{\rho}\,\frac{\partial B_\phi}{\partial\phi} + \frac{\partial B_\phi}{\partial z}}$$

Tarea demostrar

Divergencia de una campo escalar en coordenadas esféricas

$$\vec{B}(\vec{r}) = B_r(r,\theta,\phi)\hat{r} + B_\theta(r,\theta,\phi)\hat{\theta} + B_\phi(r,\theta,\phi)\hat{\phi}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}(\vec{r}) = \left(\hat{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\hat{\theta}}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\hat{\phi}}{rSen[\theta]}\frac{\partial}{\partial \phi}\right)\cdot\left(B_r\hat{r} + B_\theta\hat{\theta} + B_\phi\hat{\phi}\right)$$

$$\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{B}(\vec{r}) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 B_r) + \frac{1}{rSen[\theta]}\frac{\partial}{\partial \theta}(Sen[\theta]B_\theta) + \frac{1}{rSen[\theta]}\frac{\partial}{\partial \phi}(B_\phi)}$$

Tarea demostrar

Rotor de un Campo Vectorial

Campo vectorial $\longrightarrow$ Campo vectorial

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}) = \vec{C}(\vec{r})}$$

En coordenadas cartesianas

$$\vec{A}(\vec{r}) = A_x(x, y, z)\hat{x} + A_y(x, y, z)\hat{y} + A_z(x, y, z)\hat{z}$$

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}) = \det\begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}}$$

Fin