

Campos Electromagnéticos

Guía 4

Ingeniería Civil en Automatización
 Profesor: Pedro Labraña.
 Ayudante: José Fonseca

Pregunta 1: Derivación parcial

a) Calcule las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$ de las funciones:

$$f(x, y, z) = kxyz$$

$$f(x, y, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}}$$

b) Calcule las derivadas parciales (coordenadas cilíndricas) $\frac{\partial f}{\partial \rho}$, $\frac{\partial f}{\partial \phi}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$ de las funciones:

$$f(\rho, \phi, z) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln(\rho_0/\rho)$$

$$f(\rho, \phi, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}$$

$$f(\rho, \phi, z) = \frac{\lambda a \cos \phi}{2\pi\epsilon_0 \rho^2}$$

c) Calcule las derivadas parciales (coordenadas esféricas) $\frac{\partial f}{\partial r}$, $\frac{\partial f}{\partial \phi}$, $\frac{\partial f}{\partial \theta}$ de las funciones:

$$f(r, \phi, \theta) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}$$

$$f(r, \phi, \theta) = -E_0 \left(\frac{a^3}{r^2} - r \right) \cos \theta$$

$$f(r, \phi, \theta) = \frac{Qa}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{d^2 + r^2 - 2dr \cos \theta}}$$

Pregunta 2: Gradiente

a) Considere la distancia $u = |\vec{r} - \vec{r}_i|$. En que \vec{r}_i es un vector fijo en el espacio ($\vec{r}_i = x_i\hat{x} + y_i\hat{y} + z_i\hat{z}$), y $\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$ es el vector de posición usual (el vector variable). Calcule $\vec{\nabla}u$ y muestre que este resulta

$$\vec{\nabla}u = \vec{\nabla}(|\vec{r} - \vec{r}_i|) = \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$$

(NOTA: use coordenadas cartesianas y reescriba al final su resultado en termino de la diferencia vectorial $\vec{r} - \vec{r}_i$).

b) En los cálculos de a continuación será util el siguiente resultado

$$\nabla f = f'(u) \nabla u$$

válido para una función $f(u)$ de la distancia $u = |\vec{r} - \vec{r}_i|$ y donde para $\vec{\nabla}u$ se debe usar su resultado en (i) .

- $\vec{\nabla}\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_i|}\right)$
- $\vec{\nabla}\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_i|^3}\right)$
- $\vec{\nabla}\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_i|^n}\right)$
- $\vec{\nabla} \ln(|\vec{r} - \vec{r}_i|)$

Nota: Preguntas 1-2 gentileza de D. Risso.

Pregunta 3:

El vector unitario normal a la superficie $\phi(\vec{r}) = Cte.$ es:

$$\hat{n} = \frac{\vec{\nabla}\phi}{|\vec{\nabla}\phi|}$$

a) Encuentre \hat{n} para la esfera e interprete:

$$\phi(\vec{r}) = a(x^2 + y^2 + z^2)$$

b) Encuentre \hat{n} para el elipsoide:

$$\phi(\vec{r}) = ax^2 + by^2 + cz^2$$

Pregunta 4:

De la definición del operador "Nabla" $\vec{\nabla}$ obtenga una expresión para $\vec{\nabla} \cdot \vec{F}(\vec{r})$ en coordenadas cilíndricas.

Pregunta 5:

a) Encuentre la divergencia del campo vectorial:

$$\vec{A} = (x^2 + xy)\hat{i} + (y^2 + zx)\hat{j} + (z^2 + xy)\hat{k}$$

b) Encuentre también el rotor de \vec{A} .

Pregunta 6:

Si \vec{r} es un vector que va desde el origen al punto (x, y, z) , demuestre las formulas:

$$i) \vec{\nabla} \cdot \vec{r} = 3$$

$$ii) \vec{\nabla} \times \vec{r} = 0$$

$$iii) (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{r} = \vec{u}$$

Nota: \vec{u} es un vector arbitrario.

Pregunta 7:

Si r es la magnitud del vector que va desde el origen al punto (x, y, z) y $f(r)$ es una función arbitraria de r , demuestre que (puede usar los resultados de la pregunta 2):

$$\vec{\nabla}f(r) = \frac{\vec{r}}{r} \frac{df}{dr}$$

$$\vec{\nabla}f(r) \times [f(r)\vec{r}] = 0$$

Pregunta 8: Teorema de Green

Usando el teorema de la divergencia demuestre la siguiente identidad:

$$\int_V (\Psi \nabla^2 \phi - \phi \nabla^2 \Psi) dV = \oint_S (\Psi \vec{\nabla} \phi - \phi \vec{\nabla} \Psi) \cdot \hat{n} ds$$

Se sugiere que utilice el siguiente campo vectorial para demostrar la identidad de Green $\vec{F} = \Psi \vec{\nabla} \phi - \phi \vec{\nabla} \Psi$.