Campos Electromagnéticos
Clase 3: “Repaso Análisis Vectorial I”

Profesor: Pedro Labraña
Departamento de Física,
Universidad del Bío-Bío

Carrera: Ingeniería Civil en Automatización
Créditos: 5

Campos Eléctricos

*Cargas Eléctricas, Aisladores y conductores, **Ley de Coulomb**, Campo Eléctrico. Movimiento de partículas cargadas en campos eléctricos uniformes. Campo eléctrico de distribuciones continuas. Líneas de Campo Eléctrico.*

Repaso de Análisis Vectorial I

- Sistemas de Coordenadas
- Operaciones Básicas con vectores (Producto Punto y producto cruz)

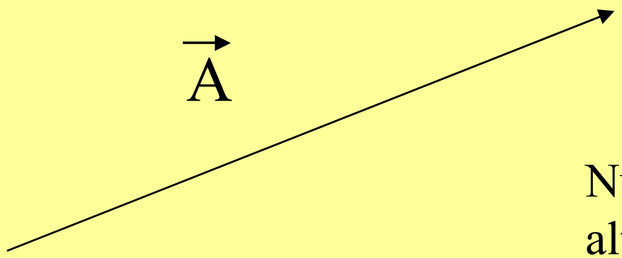
- Apuntes UBB profesor Dino Riso
- Capítulo 1 y 2 de "Elementos de Electromagnetismo" Sadiku, Matthew
- Capítulo 1 "FUNDAMENTOS DE LA TEORÍA ELECTROMAGNÉTICA" Reitz Milford

Vectores y la dimensión del espacio

1) Nombre ejemplos de cantidades físicas que son un vector: Ej. El vector posición

2) Cuantos “datos” debe mencionar para tipificar completamente a un vector (Piense en los ejemplos de 1))

Ej. Modulo, dirección y sentido



Vector **A**

Nuestro espacio físico es de tres dimensiones (Ancho, alto y largo), por esta razón para tipificar a un vector se deben dar tres datos.

¿Es el espacio físico de tres dimensiones?

3) Piense en cantidades físicas que no son vectoriales:
Ej. La temperatura, distancia entre dos puntos, etc.

Sistemas de Coordenadas

En este curso se hace un uso intenso de tres sistemas de coordenadas: cartesianas, cilíndricas y esféricas. Naturalmente estos sistemas serán de utilidad en situaciones físicas con simetrías rectangular, cilíndrica y esférica.

Coordenadas Cartesianas

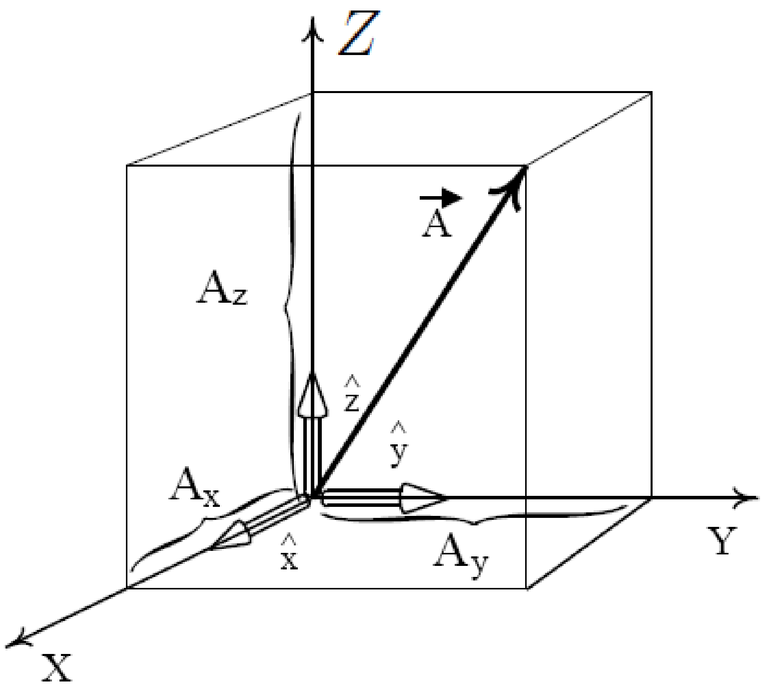


Figura 1.1: Sistema de coordenadas cartesianas.

Para describir vectores en este sistema de coordenadas se introduce la triada de vectores unitarios $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ a lo largo de las direcciones de los ejes cartesianos. Un vector cualquiera $\vec{A}$ tiene proyecciones a lo largo de las direcciones asociadas a dichos vectores unitarios. Estas proyecciones o componentes se denotan: A_x, A_y y A_z y ellas se obtienen mediante el producto punto entre el vector $\vec{A}$ y el vector unitario asociado:

$$\begin{aligned} A_x &= \vec{A} \cdot \hat{x} \\ A_y &= \vec{A} \cdot \hat{y} \\ A_z &= \vec{A} \cdot \hat{z} \end{aligned}$$

En este sistema entonces un vector cualquiera $\vec{A}$ se escribe:

$$\vec{A} = A_x\hat{x} + A_y\hat{y} + A_z\hat{z}\,.$$

y su norma, definida como la raiz cuadrada del producto punto del vector consigo mismo (ver nota[1]), es

$$||\vec{A}|| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}\,.$$

Norma del vector = Módulo del vector (*El largo de la flechita*)

Propiedades de los vectores unitarios

1) Son vectores unitarios: (Norma = 1)

$$\hat{\imath}\cdot\hat{\imath} = \hat{\jmath}\cdot\hat{\jmath} = \hat{k}\cdot\hat{k} = 1$$

4) Son vectores ortogonales entre sí

$$\hat{\imath}\cdot\hat{\jmath} = \hat{\imath}\cdot\hat{k} = \hat{\jmath}\cdot\hat{k} = 0$$

Ej. Vector posición (Ver pizarra)

Un caso particular es el del vector de posición $\vec{r}$ asociado a un punto: la posición de un punto en este sistema está definida por la triada de coordenadas (x, y, z) y en consecuencia, el vector de posición queda dado por:

$$\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$$

En este caso se tiene:

$$\begin{aligned} r_x &= \vec{r} \cdot \hat{x} = x \\ r_y &= \vec{r} \cdot \hat{y} = y \\ r_z &= \vec{r} \cdot \hat{z} = z \end{aligned}$$

y su norma es:

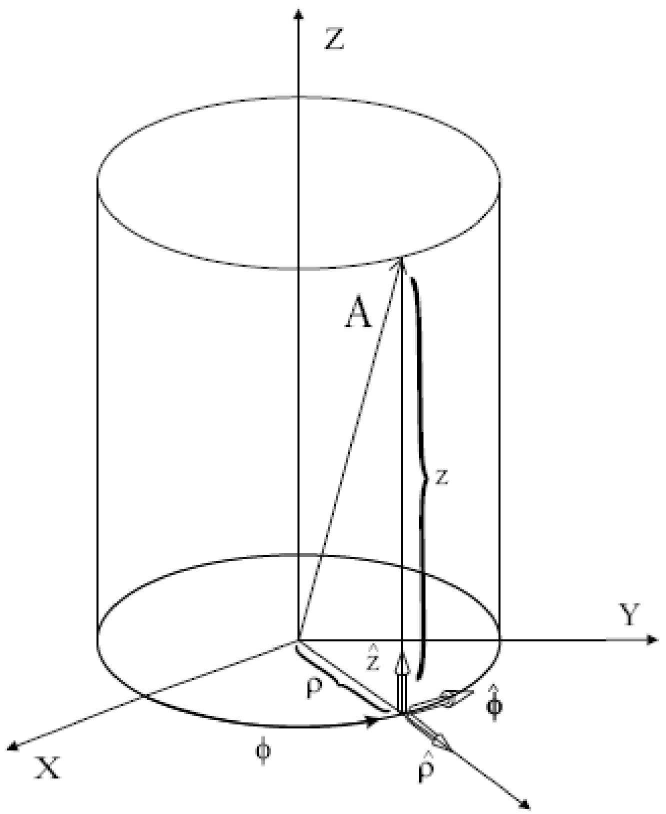
$$||\vec{r}|| = \sqrt{\vec{r} \cdot \vec{r}} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Coordenadas Cilíndricas

El sistema de coordenadas cilíndricas está basado en la geometría del cilíndro. Se ubica un cilíndro imaginario con su eje axial concéntrico al eje z de un sistema de coordenadas cartesiano.

Coordenadas en cilíndricas: (ρ, ϕ, z)

(Para fijar ideas pensemos en el vector posición)



Un punto se define sobre este cilindro por una coordenada de altura z (la altura del cilíndro), una coordenada de distancia radial ρ (el radio del cilindro) y una coordenada de posición angular ϕ (el ángulo que substiende el punto respecto del eje x, medido a lo largo de la superficie del cilindro). A lo largo de las direcciones en que crecen ρ, ϕ y z se definen vectores unitarios $\hat{\rho}$, $\hat{\phi}$ y $\hat{z}$.

Este sistema está definido entonces por la triada de coordenadas (ρ, ϕ, z), y por los correspondientes vectores unitarios asociados $(\hat{\rho}, \hat{\phi}, \hat{z})$ (ver Fig. ??).

En estas coordenadas las variables ρ, ϕ y z varían entre:

$$\begin{aligned} \rho &: \quad 0 \ldots \infty \\ \phi &: \quad 0 \ldots 2\pi \\ z &: \quad -\infty \ldots \infty \end{aligned}$$

Un vector cualquiera $\vec{A}$ tendrá proyecciones sobre las direcciones definidas por dichos vectores unitarios. Los valores de dichas proyecciones (las componentes del vector) se denotan correspondientemente por A_ρ, A_ϕ y A_z (ver Fig ??). Ellos se obtienen de la manera usual:

$$\begin{aligned} A_\rho &= \vec{A}\cdot\hat{\rho} \\ A_\phi &= \vec{A}\cdot\hat{\phi} \\ A_z &= \vec{A}\cdot\hat{z} \end{aligned}$$

Un vector cualquiera se escribe en consecuencia:

$$\vec{A} = A_\rho\hat{\rho} + A_\phi\hat{\phi} + A_z\hat{z}$$

y su norma es $||\vec{A}|| = \sqrt{\vec{A}\cdot\vec{A}} = \sqrt{A_\rho^2 + A_\phi^2 + A_z^2}$.

Propiedades de los vectores unitarios de las coordenadas cilíndricas

Son unitarios $$\boxed{\hat{\rho}\cdot\hat{\rho} = \hat{\phi}\cdot\hat{\phi} = \hat{k}\cdot\hat{k} = 1}$$

Son ortogonales: $$\boxed{\hat{\rho}\cdot\hat{\phi} = \hat{\rho}\cdot\hat{k} = \hat{\phi}\cdot\hat{k} = 0}$$

Pero no son vectores constantes. Depende del punto donde se evalúen

A diferencia de lo que ocurre con los vectores unitarios de las coordenadas cartesianas que son vectores constantes (ver dibujo)

Muchas veces conviene escribir los vectores unitarios de cilíndricas en términos de los vectores unitarios de cartesianas

$$\boxed{\hat{\rho} = Cos(\phi)\,\hat{x} + Sen(\phi)\,\hat{y}}$$

$$\boxed{\hat{z} = \hat{z}}$$

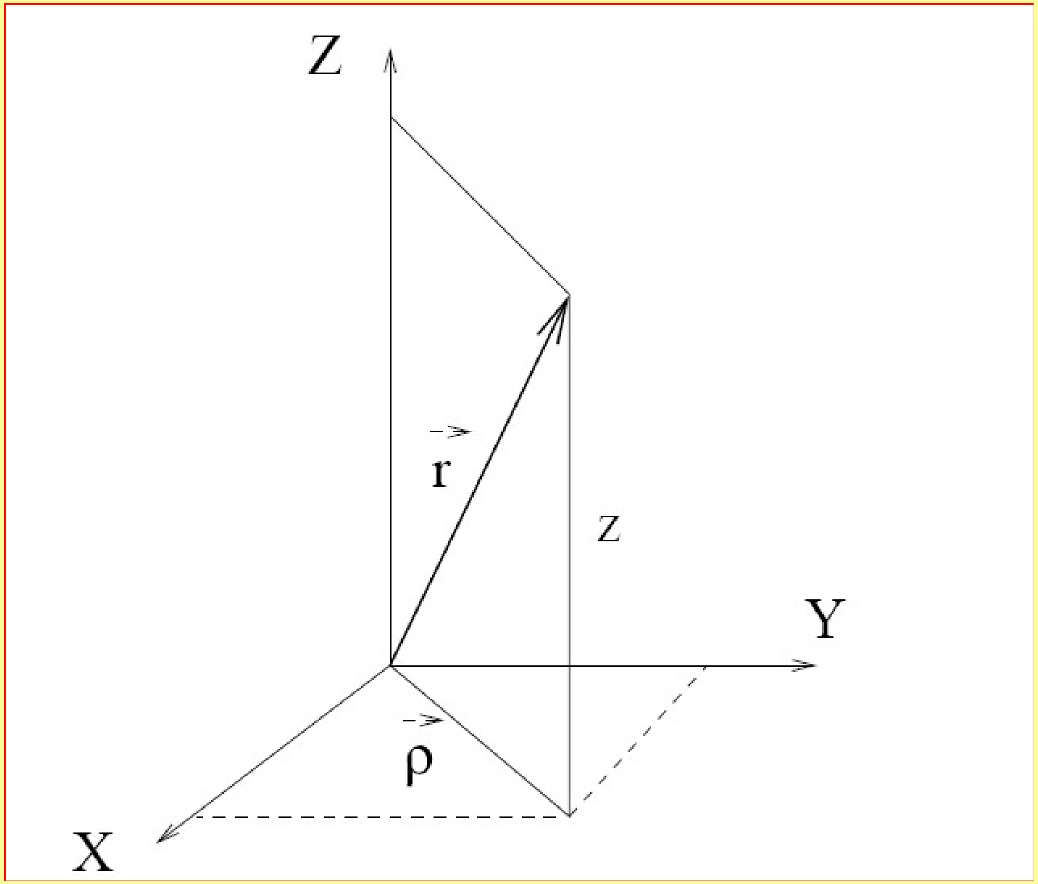
$$\boxed{\hat{\phi} = -Sen(\phi)\,\hat{x} + Cos(\phi)\,\hat{y}}$$

(Verificar propiedades, ver pizarra)

Notemos que: $$\boxed{\hat{\phi} = \frac{d}{d\phi}\left[\hat{\rho}\right]}$$

Ej. Vector posición

En el caso particular del vector de posición (que naturalmente parte del origen del sistema de coordenadas y por lo tanto tiene sólo componentes a lo largo del plano definido por $\hat{\rho}$ y $\hat{z}$)



$$\vec{r} = \rho\hat{\rho} + z\hat{z}$$

$$||\vec{r}|| = \sqrt{\rho^2 + z^2}$$

(Verificar la norma, ver pizarra)

Destacamos nuevamente que el vector de posición $\vec{r}$ no tiene componente o proyección sobre el vector unitario $\hat{\phi}$ (esto es $\vec{r} \cdot \hat{\phi} = 0$), pero un vector cualquiera $\vec{A}$ si podría tenerla (esto es $\vec{A} \cdot \hat{\phi} \neq 0$).

$$\vec{r} = \rho\hat{\rho} + z\hat{z}$$

Vector general en Cilíndricas

$$\vec{A} = A_\rho\hat{\rho} + A_\phi\hat{\phi} + A_z\hat{z}$$

Ej. De un vector más general, con componentes en los tres vectores unitarios de cilíndricas:

Vector velocidad (ver pizarra)

Cambio de coordenadas de Cartesianas-Cilíndricas

Proyectando $\vec{\rho} = \rho\,\hat{\rho}$ sobre los ejes OX y OY del sistema de coordenadas cartesiano asociado se obtiene la transformación de coordenadas que nos lleva de las coordenadas cilíndricas a las cartesianas:

$$\begin{aligned} x &= \rho\cos\phi \\ y &= \rho\sin\phi \\ z &= z \end{aligned}$$

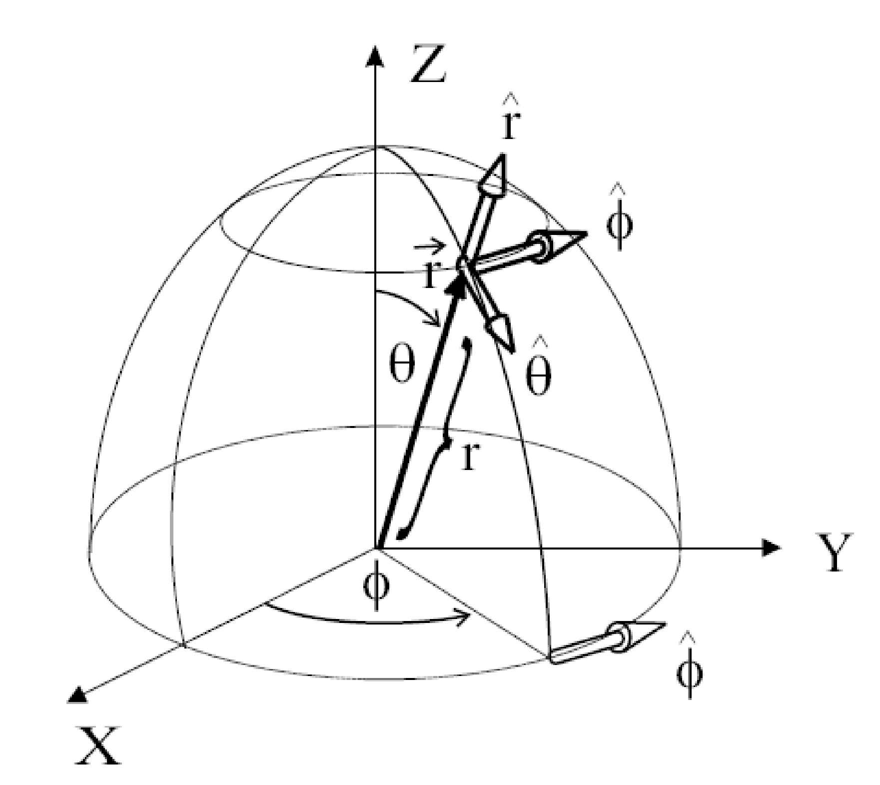
Si alguien me da la posición de un objeto en coordenadas cilíndricas (ρ, ϕ, z) yo puedo pasarlas a coordenadas cartesianas (x,y,z) y usando que $\tan(\phi) = y/x$ y que $\rho^2 = x^2 + y^2$ sigue que, para el primer cuadrante, la transformación inversa en el caso del I cuadrante es:

$$
\begin{aligned}
\phi &= \arctan(y/x) \\
\rho &= \sqrt{x^2 + y^2} \\
z &= z\,.
\end{aligned}
$$

Hay que tener cierto cuidado para otros cuadrantes, pues por ejemplo en el caso del tercer cuadrante, donde ambos x e y son negativos, el cociente y/x da el mismo valor que para el primer cuadrante y la transformación anterior no resulta válida. En este caso se tiene:

$$
\begin{aligned}
\phi &= \arctan(y/x) + \pi \\
\rho &= \sqrt{x^2 + y^2} \\
z &= z\,.
\end{aligned}
$$

Coordenadas Esféricas

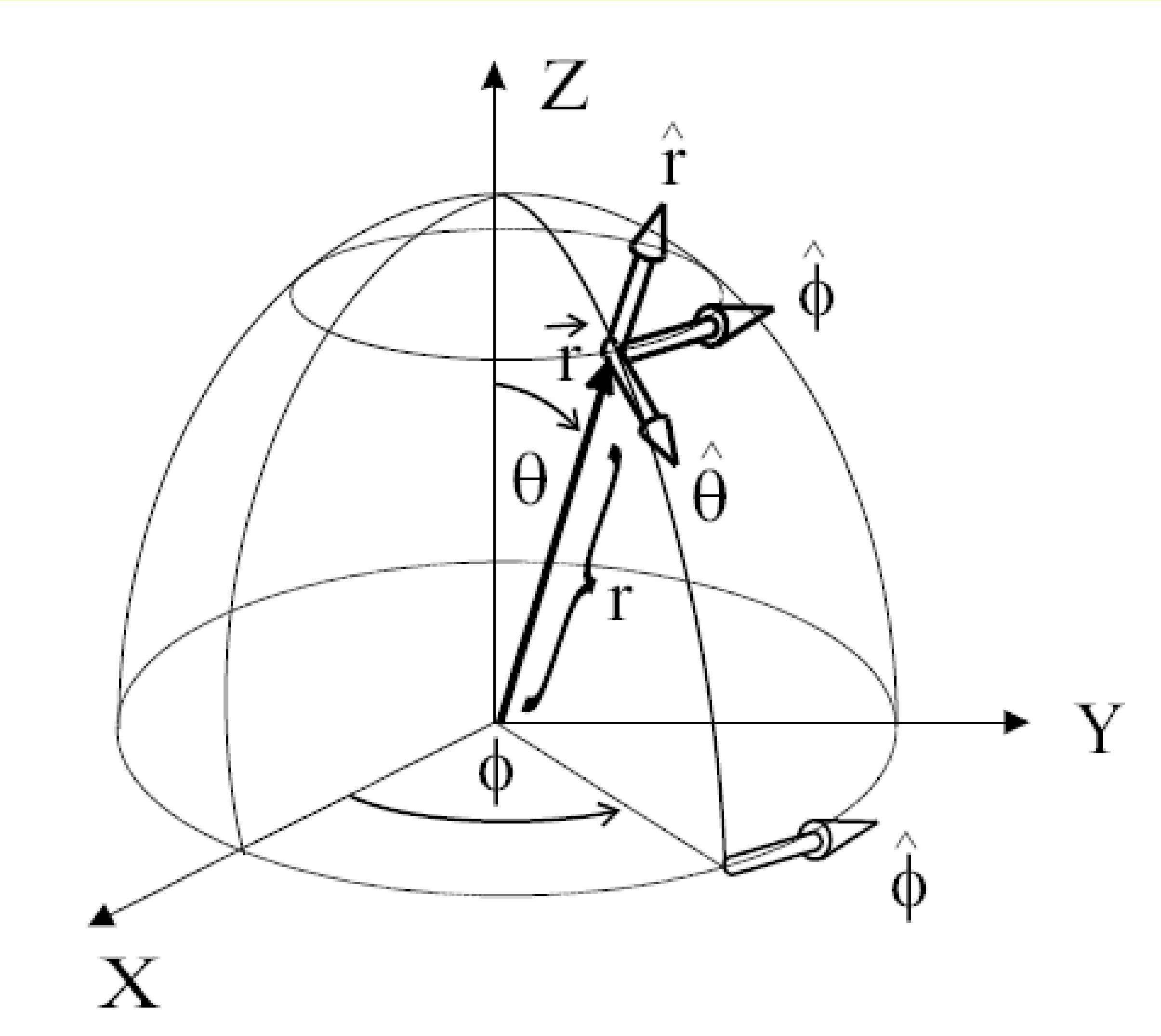


Coordenadas en esféricas: (r, θ, ϕ)

El sistema de `coordenadas esféricas` es muy similar al sistema de coordenadas que permiten ubicar un punto geográfico sobre la superficie de la Tierra. Se define una superficie esférica imaginaria de radio r, concéntrica al origen de un sistema de coordenadas cartesiano. La distancia de un punto en la superficie al origen es la coordenada r. La ubicación del meridiano que contiene el punto se realiza mediante un ángulo ϕ medido, en el plano de las XY, a lo largo de la intersección de la superficie esférica con el meridiano. Finalmente la ubicación del paralelo que determina la ubicación del punto se realiza mediante un ángulo azimutal medido desde el eje z hasta el punto mismo a lo largo del meridiano que lo contiene

Para describir vectores en este sistema de coordenadas se asigna una triada de vectores unitarios $(\hat{r}, \hat{\phi}, \hat{\theta})$ a lo largo de las direcciones en que crecen r, ϕ y θ. Un vector cualquiera $\vec{A}$ tiene proyecciones sobre dichos ejes que se denotan A_r, A_ϕ y A_θ respectivamente.

$$\begin{aligned} A_r &= \vec{A} \cdot \hat{r} \\ A_\theta &= \vec{A} \cdot \hat{\theta} \\ A_\phi &= \vec{A} \cdot \hat{\phi} \end{aligned}$$



Z
$\hat{r}$
$\hat{\phi}$
$\vec{r}$
θ
$\hat{\theta}$
r
Y
ϕ
$\hat{\phi}$
X

Luego un vector arbitrario se puede escribir en coordenadas esféricas como sigue:

$$\vec{A} = A_r \hat{r} + A_\phi \hat{\phi} + A_\theta \hat{\theta}$$

La norma del vector queda:

$$||\vec{A}|| = \sqrt{A_r^2 + A_\phi^2 + A_\theta^2}$$

Las coordenadas esféricas se mueven entre los siguientes valores

$$\begin{array}{lcl} r & : & 0 \ldots \infty \\ \phi & : & 0 \ldots 2\pi \\ \theta & : & 0 \ldots \pi \end{array}$$

Propiedades de los vectores unitarios de las coordenadas esféricas

Son unitarios $\hat{r}\cdot\hat{r}=\hat{\theta}\cdot\hat{\theta}=\hat{\phi}\cdot\hat{\phi}=1$

Son ortogonales: $\hat{r}\cdot\hat{\theta}=\hat{r}\cdot\hat{\phi}=\hat{\theta}\cdot\hat{\phi}=0$

No son vectores constantes. Depende del punto donde se evalúen

Escribimos los vectores unitarios de esféricas en términos de los vectores unitarios de cartesianas

$$\hat{r}=Sen(\theta)Cos(\phi)\,\hat{x}+Sen(\theta)Sen(\phi)\,\hat{y}+Cos(\theta)\,\hat{z}$$

$$\hat{\theta}=Cos(\theta)Cos(\phi)\,\hat{x}+Cos(\theta)Sen(\phi)\,\hat{y}-Sen(\theta)\,\hat{z}$$

$$\hat{\phi}=-Sen(\phi)\,\hat{x}+Cos(\phi)\,\hat{y}$$

(Verificar propiedades, ver pizarra)

Notemos que:

$$\boxed{\hat{r} = Sen(\theta)Cos(\phi)\,\hat{x} + Sen(\theta)Sen(\phi)\,\hat{y} + Cos(\theta)\,\hat{z}}$$

$$\boxed{\hat{\theta} = Cos(\theta)Cos(\phi)\,\hat{x} + Cos(\theta)Sen(\phi)\,\hat{y} - Sen(\theta)\,\hat{z}}$$

$$\boxed{\hat{\phi} = -Sen(\phi)\,\hat{x} + Cos(\phi)\,\hat{y}}$$

$$\boxed{\hat{\theta} = \frac{d}{d\theta}\left[\hat{r}\right]}$$

$$\hat{\phi} = \frac{1}{Sen(\theta)}\,\frac{d}{d\phi}\left[\hat{r}\right]$$

Ej. El vector posición

Un punto en dicho sistema de coordenadas queda determinado por las coordenadas de posición (r, ϕ, θ). Si embargo el vector de posición mismo queda dado simplemente por la expresión:

$$\vec{r} = r\hat{r}$$

¿Donde está el truco?

ya que dicho vector no tiene componentes a lo largo de las direcciones $\hat{\phi}$ ni $\hat{\theta}$. La norma del vector posición es simplemente: $||\vec{r}|| = \sqrt{r^2} = r$.

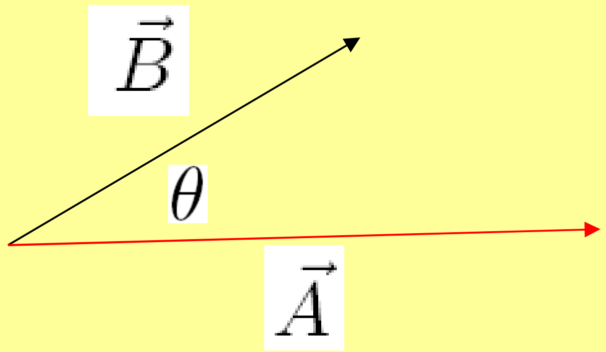
Recordemos que

$$\hat{r} = Sen(\theta)Cos(\phi)\,\hat{x} + Sen(\theta)Sen(\phi)\,\hat{y} + Cos(\theta)\,\hat{z}$$

Ej.2 Un vector más general; El vector velocidad (ver pizarra)

Operaciones Básicas con vectores (Producto Punto y producto cruz)

Producto Punto entre dos vectores (Producto escalar):



El producto punto toma dos vectores y nos da un un número (un escalar)

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \|\vec{A}\| \, \|\vec{B}\| \, Cos(\theta)$$

En coordenadas cartesianas:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

Algunas propiedades del producto punto

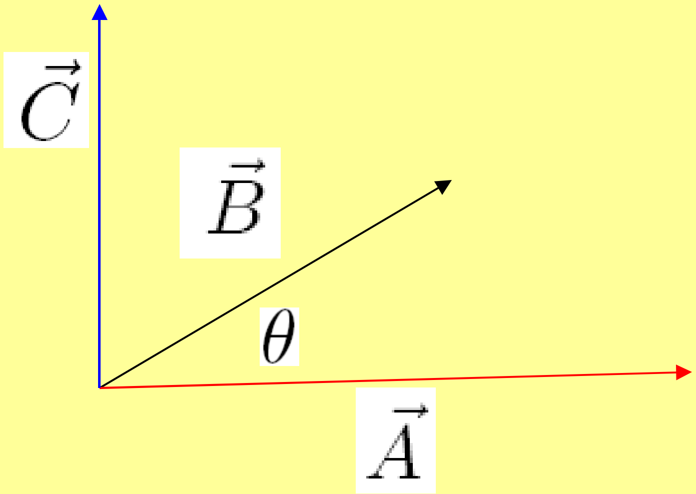
1) El producto punto es conmutativo: $\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$

2) El producto punto entre dos vectores ortogonales es cero

Producto vectorial o producto cruz:

El producto punto toma dos vectores y nos da un nuevo vector con las siguientes características

$$\boxed{\vec{C} = \vec{A} \wedge \vec{B}}$$



1) Es ortogonal a los dos vectores originales

3) Tiene una norma igual a: $\|\vec{C}\| = \|\vec{A} \wedge \vec{B}\| = \|\vec{A}\|\,\|\vec{B}\|\,Sen(\theta)$

5) El sentido del nuevo vector se obtiene al seguir la orientación definida para el espacio (La regla de la mano derecha o del tornillo, según el gusto de cada quien).

En coordenadas cartesianas

$$\vec{C} = \vec{A} \wedge \vec{B} \equiv \det \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

$$= (A_y B_z - B_y A_z)\hat{x} - (A_x B_z - B_x A_z)\hat{y} + (A_x B_y - B_x A_y)\hat{z}$$

Algunas propiedades del producto cruz

1) El producto cruz es anticonmutativo $\boxed{\vec{A} \wedge \vec{B} = -\vec{B} \wedge \vec{A}}$

2) El producto cruz de un vector con el mismo es cero $\boxed{\vec{A} \wedge \vec{A} = 0}$

3) El producto cruz entre dos vectores paralelos es cero

Fin