

Campos Electromagnéticos

“Campo Magnético”



Profesor: Pedro Labraña
Departamento de Física,
Universidad del Bío-Bío

Carrera: Ingeniería Civil en Automatización
Créditos: 5

Campo Magnético

El Campo Magnético, Fuerza de Lorentz, Ley de Biot-Savart, Ley de Ampere

Ley de Biot-Savart

Hemos estudiado, el movimiento de cargas bajo un campo magnético dado. La pregunta que surge a continuación es ¿Cómo se calculan dichos campos \vec{B} ? La respuesta a esta pregunta fue dada por Biot y Savart el siglo antepasado, quienes establecieron que cualquier corriente es capaz de producir un campo magnético en el espacio. Ciertas corrientes son claramente de origen eléctrico debido al movimiento de traslación de las cargas, otras corrientes están relacionadas con la rotación de los electrones de valencia de las moléculas así como del spin cuántico (repase su curso de química) propio de las partículas, y son responsables del magnetismo de los imanes naturales.

Biot-Savart, estudiaron el campo magnético generado por un cable curvado. Esencialmente se estableció que un segmento $d\vec{r}'$, ubicado en un punto \vec{r}' , de un cable que porta corriente I contribuye al campo magnético en un punto \vec{r} con una intensidad $d\vec{B}$ dada por:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{r}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3}$$

Si se considera el cable completo se debe integrar en la variable de posición \vec{r}' que describe la curva en el espacio que ocupa dicho cable, de modo que el campo de inducción magnética en el punto \vec{r} está dado por:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I d\vec{r}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3}$$



Ley de Biot-Savart

Esta expresión se puede escribir en forma más compacta introduciendo los elementos infinitesimales de corriente $d\vec{J}$

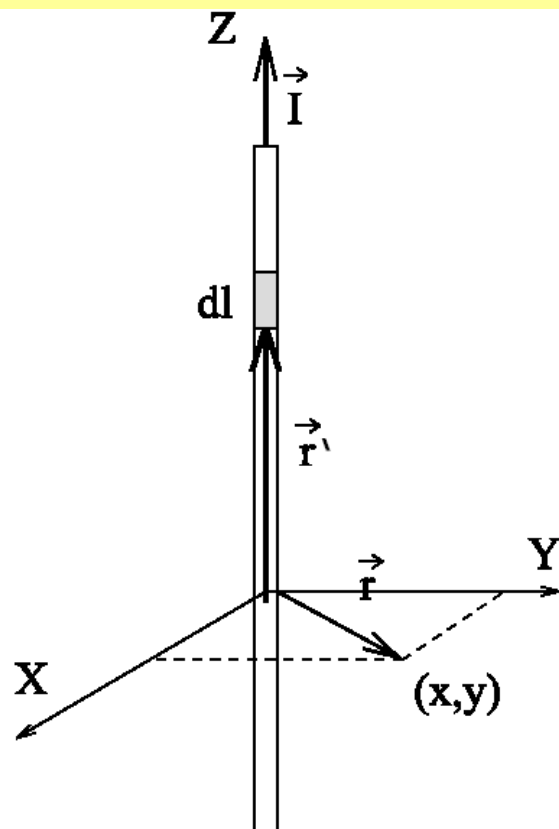
$$d\vec{J} = \begin{cases} I d\ell & \text{línea de corriente} \\ \vec{K} dS & \text{corriente superficial} \\ \vec{J} dV & \text{corriente volumétrica} \end{cases}$$

Si la corriente está distribuida ocupando un volumen entonces hacemos el reemplazo: $d\vec{J} = I d\vec{r} \rightarrow \vec{J} dv$, en que dv es el elemento de volumen que ocupa la densidad de corriente \vec{J} , queda:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}') dv}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3}$$

Cuando la corriente está distribuida sobre una superficie (corriente superficial \vec{K}) el reemplazo es: $I d\vec{r} \rightarrow \vec{K} dS$. La expresión para \vec{B} resulta:

Ejemplos



Un cable de largo infinito con corriente orientada en la dirección positiva del eje Z cruza el plano de las XY por el origen. Calcular el campo magnético en un punto de coordenada $z = 0$ a distancia r (sobre el plano de las XY).

Solucion: Los puntos \vec{r}' del cable sólo tienen coordenadas sobre el eje Z, luego están descritos por: $\vec{r}' = z'\hat{z}$. En consecuencia un elemento de longitud $d\vec{r}'$ sobre dicho cable se escribe: $d\vec{r}' = dz'\hat{z}$

El punto \vec{r} esá dado por: $\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + 0\hat{z}$. La diferencia $\vec{r} - \vec{r}'$ que figura en la expresión de Biot-Savart queda, en este caso: $\vec{r} - \vec{r}' = x\hat{x} + y\hat{y} - z'\hat{z}$, y su módulo (que también figura en dicha expresión) es: $\|\vec{r} - \vec{r}'\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z'^2}$.

El producto cruz entre $d\vec{r}'$ y $\vec{r} - \vec{r}'$ resulta: $dz'\hat{z} \times (x\hat{x} + y\hat{y} - z'\hat{z}) = (x\hat{y} - y\hat{x})dz'$.

Reemplazando lo anterior en la Ley de Biot-Savart se tiene:

$$\vec{B}(x,y,0) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{Idz'(x\hat{y} - y\hat{x})}{(x^2 + y^2 + z'^2)^{3/2}}$$

Hacemos uso a continuación de que: x e y están fijos (así como los vectores unitarios) y reemplazaremos por ρ a la distancia $\sqrt{x^2 + y^2}$, queda:

$$\vec{B}(x,y,0) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} (x\hat{y} - y\hat{x}) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz'}{(\rho^2 + z'^2)^{3/2}}$$

La integral es simple y se puede hacer en forma explícita

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz'}{(\rho^2 + z'^2)^{3/2}} = \left. \frac{z'}{\rho^2 (\rho^2 + z'^2)^{1/2}} \right]_{-\infty}^{\infty}$$

$$\begin{aligned}
\vec{B}(x,y,0) &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} (x\hat{y} - y\hat{x}) \left[\frac{z'}{r^2 (\rho^2 + z'^2)^{1/2}} \right]_{-\infty}^{\infty} \\
&= \frac{\mu_0 I}{4\pi} (x\hat{y} - y\hat{x}) \frac{2}{\rho^2} \\
&= \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \frac{x\hat{y} - y\hat{x}}{\rho}
\end{aligned}$$

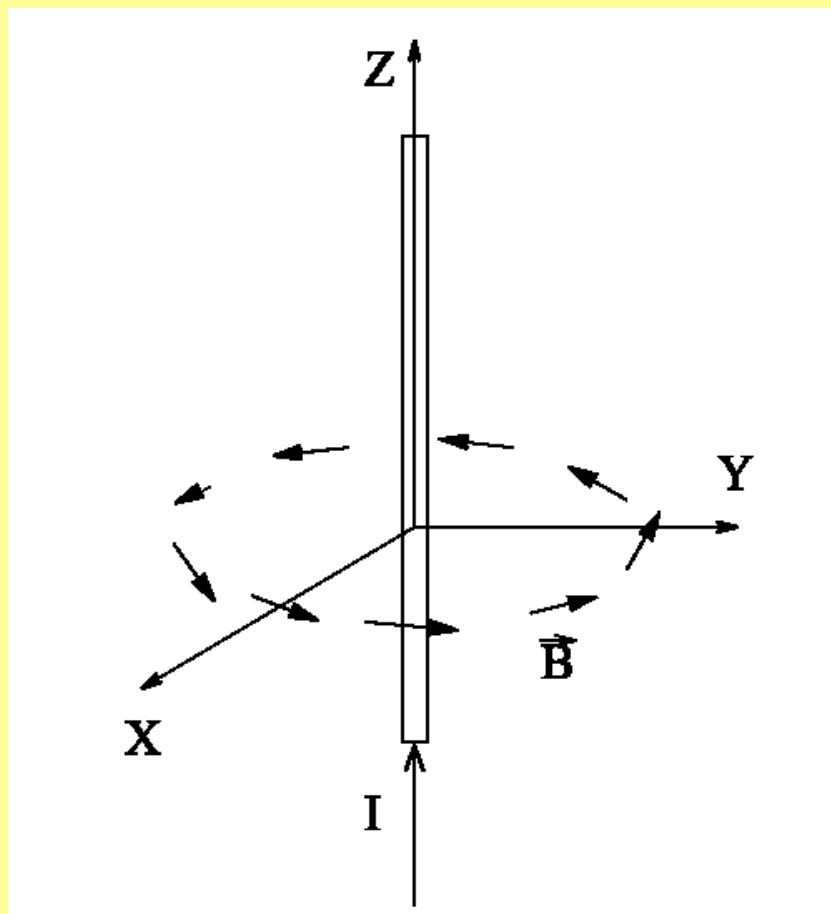
Por último reemplazando $x = \rho \cos \phi$ y $y = \rho \sin \phi$ en que ϕ es el ángulo de las coordenadas cilíndricas medido desde el eje de las X hacia el vector de posición \vec{r} resulta:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} (\cos \theta \hat{y} - \sin \theta \hat{x})$$

Luego obtenemos que

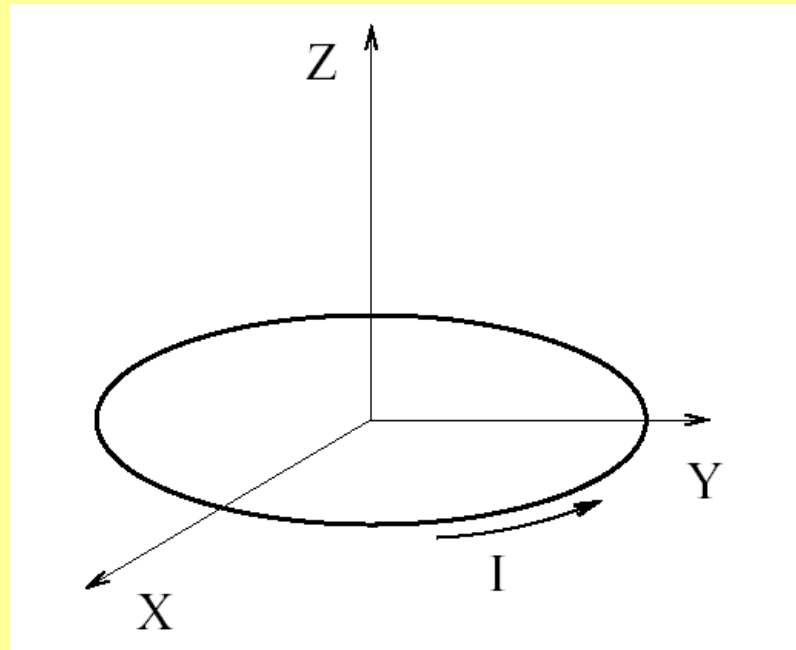
$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \hat{\phi}$$

Resultado



Campo \vec{B} circula en torno al cable recto

Campo de una espira circular sobre su eje axial



Solución: Escogemos un sistema de coordenadas en que el plano XY que contiene a la espira y el eje Z coincide con el eje axial de la espira.

Los puntos \vec{r}' del cable solo tiene coordenadas sobre un círculo en el plano XY , luego están descritos por

$$\vec{r}' = a \cos \phi \hat{x} + a \sin \phi \hat{y}$$

de modo que, diferenciando, el elemento de longitud $d\vec{r}'$ sobre dicho círculo (cable) resulta:

$$d\vec{r}' = -a \sin \phi \hat{x} d\phi + a \cos \phi \hat{y} d\phi$$

El punto \vec{r} donde interesa calcular el campo está descrito por

$$\vec{r} = z\hat{z}$$

La diferencia $\vec{r} - \vec{r}'$, que figura en la expresión de Biot-Savart, queda, en este caso:

$$\vec{r} - \vec{r}' = z\hat{z} - a \cos \phi \hat{x} - a \sin \phi \hat{y}$$

y su módulo (que también figura en dicha expresión) es:

$$\|\vec{r} - \vec{r}'\| = \sqrt{a^2 \cos^2 \phi + a^2 \sin^2 \phi + z^2} = (a^2 + z^2)^{1/2}$$

El producto cruz entre $d\vec{r}'$ y $\vec{r} - \vec{r}'$ resulta:

$$\begin{aligned} d\vec{r}' \times (\vec{r} - \vec{r}') &= a(-\sin \phi \hat{x} + \cos \phi \hat{y}) d\phi \\ &\quad \times (z\hat{z} - a \cos \phi \hat{x} - a \sin \phi \hat{y}) \\ &= a(z(\cos \phi \hat{x} + \sin \phi \hat{y}) + a\hat{z}) d\phi \end{aligned}$$

Reemplazando, hasta aquí, se obtiene:

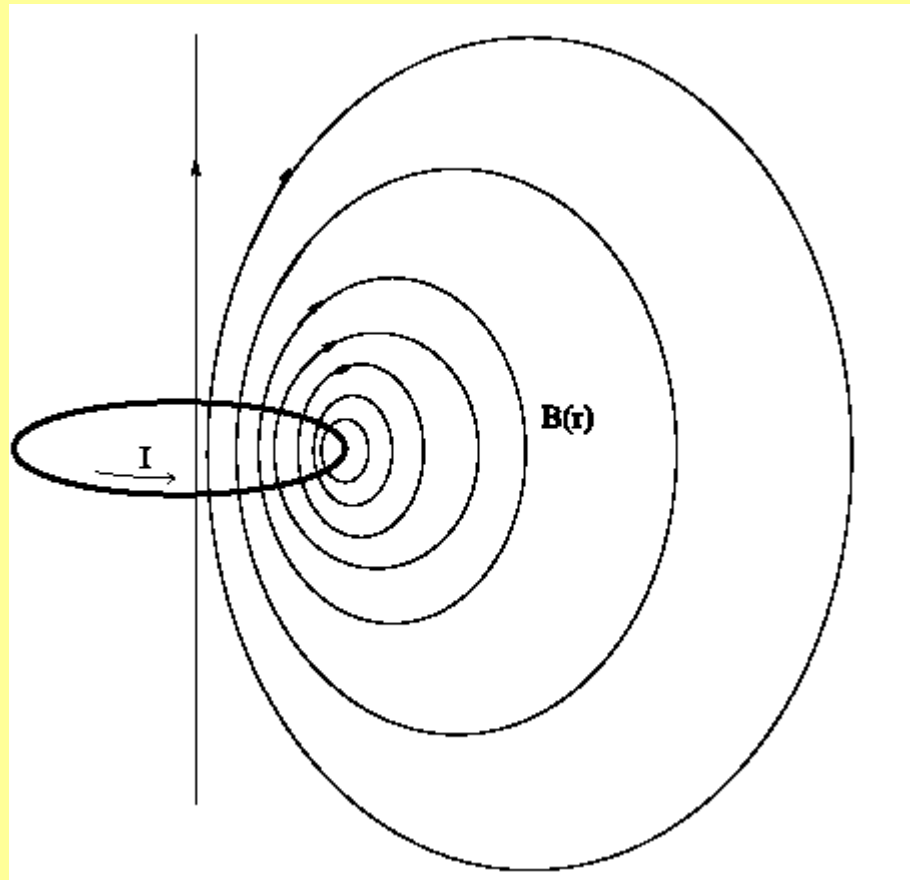
$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I a}{4\pi (a^2 + z^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} [a\hat{z} + z(\cos \phi \hat{x} + \sin \phi \hat{y})] d\phi$$

La integración de $\sin \phi$ y $\cos \phi$ en un periodo 2π es nula. Resulta

$$\begin{aligned} \vec{B}(z) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\pi I a^2}{(a^2 + z^2)^{3/2}} \hat{z} \\ &= \frac{\mu_0 I a^2}{2(a^2 + z^2)^{3/2}} \hat{z} \end{aligned}$$

El campo a lo largo del eje es máximo para $z = 0$, decrece para $z \rightarrow \infty$ y $z \rightarrow -\infty$ como $1/z^3$.

El campo fuera del eje es más difícil de calcular. En la figura siguiente se bosqueja las líneas de campo \vec{B}



Se aprecia que las líneas de campo son curvas cerradas en torno a la corriente I que circula. En consecuencia todas las líneas de campo pasan por el interior de la superficie que delimita la espira conductora y van a dar su vuelta por el exterior. Las líneas de campo más cercanas al eje z van a dar la vuelta más lejos y por lo tanto se reparten en todo el espacio exterior. Se puede afirmar entonces, debido a la alta densidad de líneas de campo en el interior de la espira y la correspondiente baja densidad de líneas de campo en el exterior de la espira (ya que el mismo número de líneas tiene un espacio infinito donde repartirse) que el campo cerca del anillo y hacia su interior es muy intenso, mientras que afuera y lejos del anillo dicho campo es débil.

Ecuaciones para \vec{B} estático

En esta sección estudiaremos las ecuaciones diferenciales que satisface el campo \vec{B} para el caso estacionario en el tiempo. Estas ecuaciones, que deduciremos más adelante, son

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{B} &= 0 \\ \nabla \wedge \vec{B} &= \mu_0 \vec{J}\end{aligned}$$

- No existen cargas magnéticas
- Las fuentes de \vec{B} son las corrientes generadas por las cargas en movimiento (o más bien equivale a la forma diferencial de la Ley de Biot-Savart).

Ecuaciones de Maxwell para campos estáticos (ver pizarra)

Ley Circuital de Ampere

Integrando \vec{B} sobre un circuito cerrado cualquiera y aplicando el teorema de Gauss y la Ley de Ampere recién obtenida es posible deducir una Ley integral conocida como la *Ley Circuital de Ampere*

$$\begin{aligned}\oint \vec{B} \cdot d\vec{r} &= \int (\nabla \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{S} \\ &= \int (\mu_0 \vec{J}) \cdot d\vec{S} \\ &= \mu_0 \int \vec{J} \cdot d\vec{S}\end{aligned}$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 \int \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

Se puede escribir en forma abreviada esta Ley definiendo:

$$I_{\text{que cruza}} = \int \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

(en que $I_{\text{que cruza}}$ es la corriente neta que cruza la superficie delimitada por el camino de integración) y definiendo la cantidad

$$\Gamma_B = \oint \vec{B} \cdot d\vec{r}$$

que se denomina *Circulación del campo de inducción magnético*, de modo que la Ley Circuital de Ampere se escribe usualmente:

$$\Gamma_B = \mu_0 I_{\text{que cruza}}$$

Al revés, la expresión

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

se puede entender como la versión diferencial de la Ley Circuital de Ampere.

Las ecuaciones de Maxwell:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{B} &= 0 \\ \nabla \wedge \vec{B} &= \mu_0 \vec{J}\end{aligned}$$

más condiciones de contorno (borde) contienen la descripción completa del magnetismo estático en un medio no material.

Fin