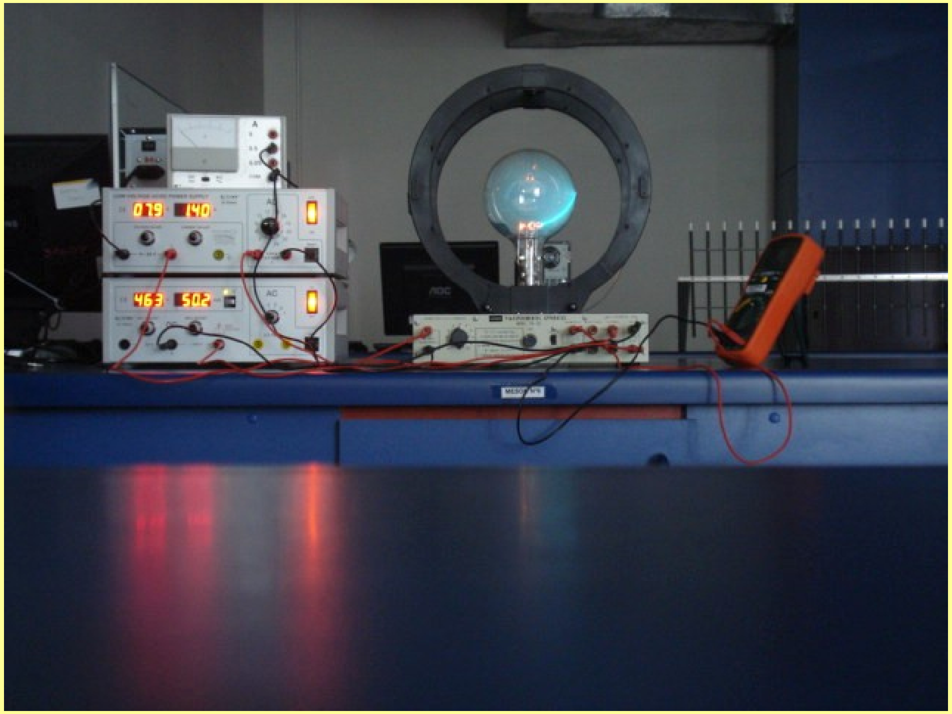
Campos Electromagnéticos

"Repaso de Cálculo Vectorial II"



Profesor: Pedro Labraña
Departamento de Física,
Universidad del Bío-Bío

Carrera: Ingeniería Civil en Automatización
Créditos: 5

Propiedades del Gradiente, la Divergencia y el Rotor

vector

$$\nabla \cdot \nabla \varphi = \nabla^2 \varphi \tag{1.1.1}$$

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{F} = 0 \tag{1.1.2}$$

$$\nabla \times \nabla \varphi = 0 \tag{1.1.3}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) - \nabla^2 \mathbf{F} \tag{1.1.4}$$

$$\nabla(\varphi \psi) = (\nabla \varphi)\psi + \varphi \nabla \psi \tag{1.1.5}$$

$$\nabla(\mathbf{F} \cdot \mathbf{G}) = (\mathbf{F} \cdot \nabla)\mathbf{G} + \mathbf{F} \times (\nabla \times \mathbf{G}) + (\mathbf{G} \cdot \nabla)\mathbf{F} + \mathbf{G} \times (\nabla \times \mathbf{F}) \tag{1.1.6}$$

$$\nabla \cdot (\varphi \mathbf{F}) = (\nabla \varphi) \cdot \mathbf{F} + \varphi \nabla \cdot \mathbf{F} \tag{1.1.7}$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{G} - (\nabla \times \mathbf{G}) \cdot \mathbf{F} \tag{1.1.8}$$

$$\nabla \times (\varphi \mathbf{F}) = (\nabla \varphi) \times \mathbf{F} + \varphi \nabla \times \mathbf{F} \tag{1.1.9}$$

$$\nabla \times (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = (\nabla \cdot \mathbf{G})\mathbf{F} - (\nabla \cdot \mathbf{F})\mathbf{G} + (\mathbf{G} \cdot \nabla)\mathbf{F} - (\mathbf{F} \cdot \nabla)\mathbf{G} \tag{1.1.10}$$

Libro Reitz-Milforf-Christy “Fundamentos de la Teoría Electromagnética”

Algunos ejemplos:

a) Considere la distancia $u = |\vec{r} - \vec{r}_i|$. En que $\vec{r}_i$ es un vector fijo en el espacio ($\vec{r}_i = x_i\hat{x} + y_i\hat{y} + z_i\hat{z}$), y $\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$ es el vector de posición usual (el vector variable). Calcule ∇u y muestre que este resulta

$$\vec{\nabla} u = \vec{\nabla}(|\vec{r} - \vec{r}_i|) = \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$$

(NOTA: use coordenadas cartesianas y reescriba al final su resultado en termino de la diferencia vectorial $\vec{r} - \vec{r}_i$).

Determine el gradiente de las siguientes campos escalares

- $\vec{\nabla}\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_i|}\right)$
- $\vec{\nabla}\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_i|^3}\right)$
- $\vec{\nabla}\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_i|^n}\right)$
- $\vec{\nabla}\ln(|\vec{r} - \vec{r}_i|)$

Demuestre la ecuación 1.1.3

Integrales Vectoriales

Durante este curso consideraremos tres clases de integrales: de línea, de superficie y de volumen, según la naturaleza del diferencial que aparezca en la integral. El integrando podrá ser un campo vectorial o un campo escalar.

Integral de Línea: Si $\vec{F}(\vec{r})$ es un campo vectorial, la integral de línea sobre él se escribe:

$$\int_{a\ C}^{b} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

Curva abierta

$$\oint_{C} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

Curva cerrada

Ver pizarra

Integral de Superficie: Si $\vec{F}(\vec{r})$ es un campo vectorial, la integral de superficie de él se escribe:

$$\int_S \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{s}$$

$$d\vec{s} = \hat{n}\, ds$$

Si la superficie es cerrada

$$\oint_S \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{s}$$

Ver pizarra

Integral de Volumen: En este curso consideraremos dos tipos de integrales de volmen

a) $$\vec{J} = \int_V \vec{A}(\vec{r})\, dV$$

El resultado es un vector

b) $$K = \int_V f(\vec{r})\, dV$$

El resultado es un número

Teoremas importantes

Teorema 1: (Teorema fundamental del cálculo)

$$\int_{a\ C}^{b} \vec{\nabla} f(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = f(b) - f(a)$$

Ver pizarra

Teorema de la Divergencia:

La integral de la divergencia de un vector sobre un volumen V es igual a la integral de superficie de la componente normal del vector sobre la superficie que limita

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{r}) \; dV = \oint_{S(V)} \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{s}$$

Ver pizarra

Teorema de Stokes:

La integral de línea de un vector alrededor de una curva cerrada es igual a la integral de la componente normal de su rotor sobre cualquier superficie limitada por la curva.

$$\oint_C \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_{S(C)} \vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{s}$$

Fin