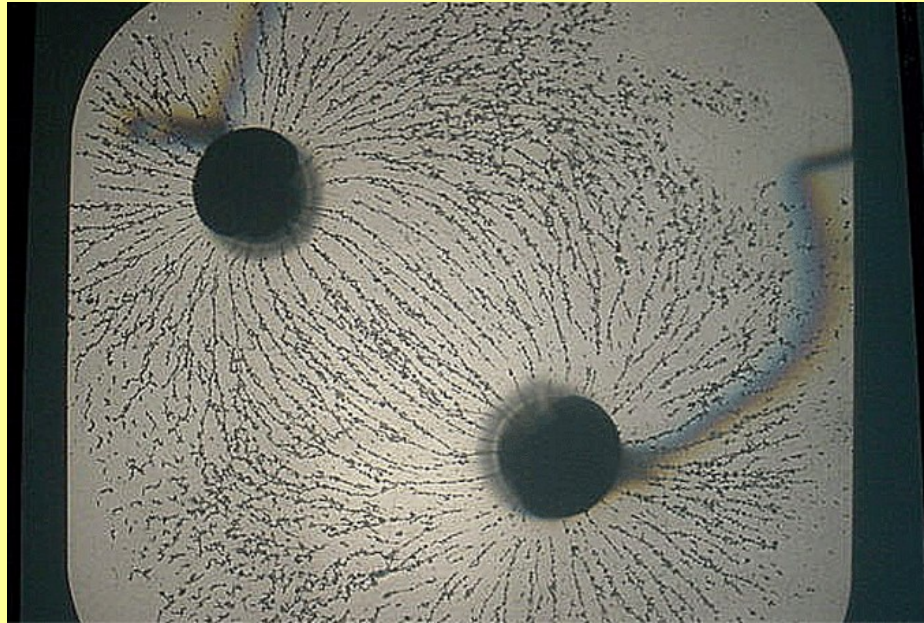


# Campos Electromagnéticos

## “Ley de Gauss”



Profesor: Pedro Labraña  
Departamento de Física,  
Universidad del Bío-Bío

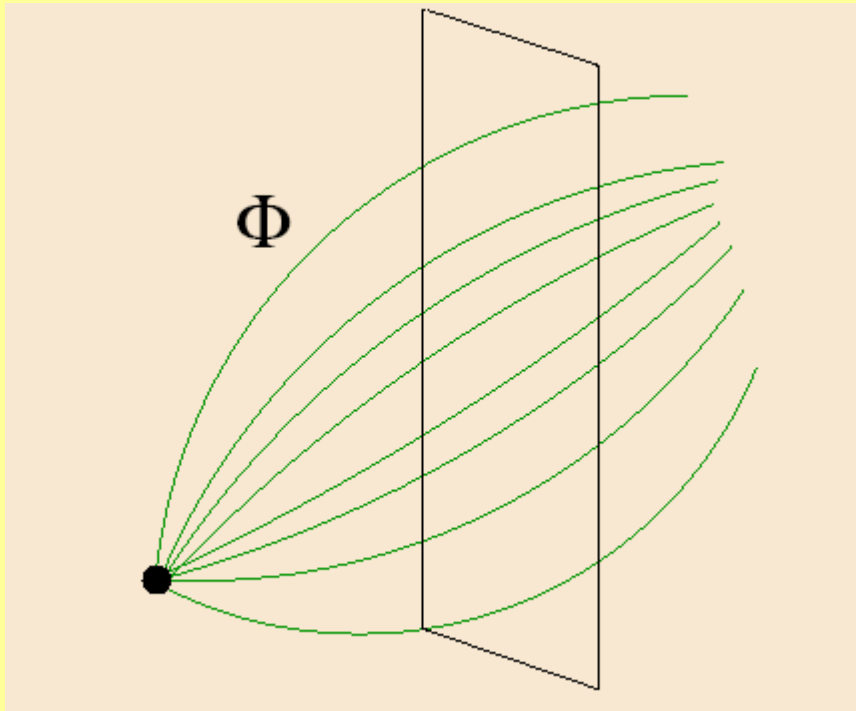
Carrera: Ingeniería Civil en Automatización  
Créditos: 5

# Ley de Gauss

Flujo eléctrico, Ley de Gauss, Aplicaciones de la ley de gauss a aisladores cargados, Conductores en equilibrio electrostático.

Clase anterior

Flujo del campo eléctrico  $\Phi$



Número de líneas de fuerza que atraviesan a una determinada área

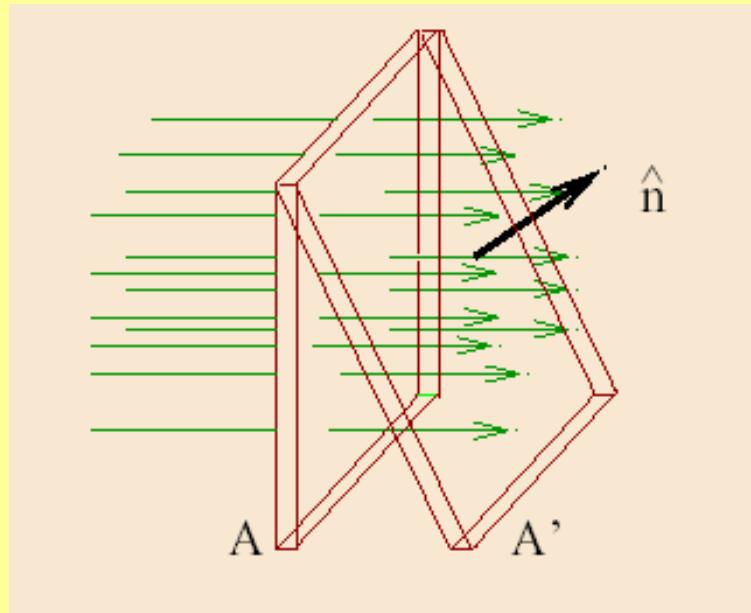
Estudiemos algunas consideraciones generales a este respecto

## Flujo del campo eléctrico $\phi_E$

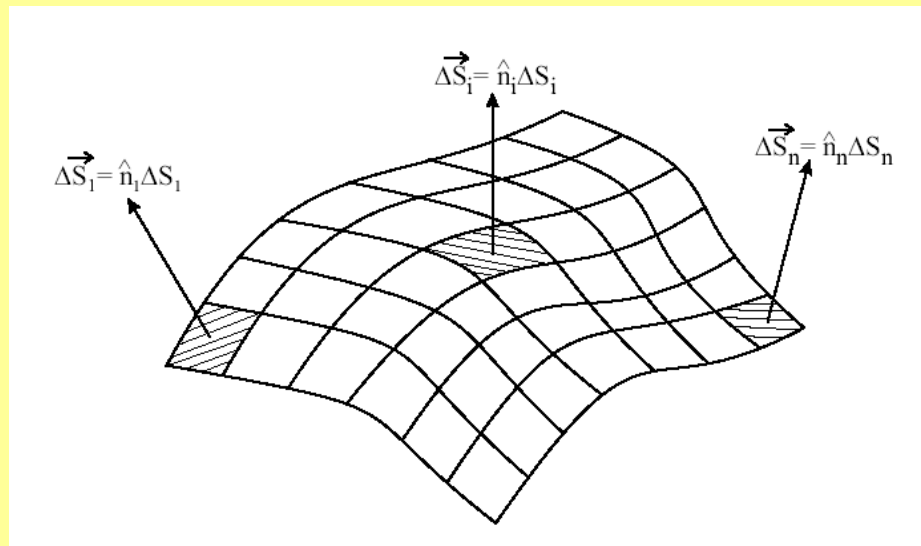
Definimos el flujo del campo  $\vec{E}$  por una superficie plana  $A\hat{n}$  (superficie orientada) como el producto

$$\phi_E \equiv \vec{E} \cdot A\hat{n}$$

Donde A es el área de la superficie y  $\hat{n}$  es un vector unitario ortogonal a la superficie el cual apunta según el sentido en el cual se recorra su borde y siguiendo la regla de la mano derecha (ver pizarra).



Si la superficie tiene una forma cualquiera, se generaliza la definición anterior, discretizando la superficie en elementos de superficie  $\Delta\vec{S}_i = \Delta S_i \hat{n}_i$ , y sumando las contribuciones de flujo de cada elemento de superficie:



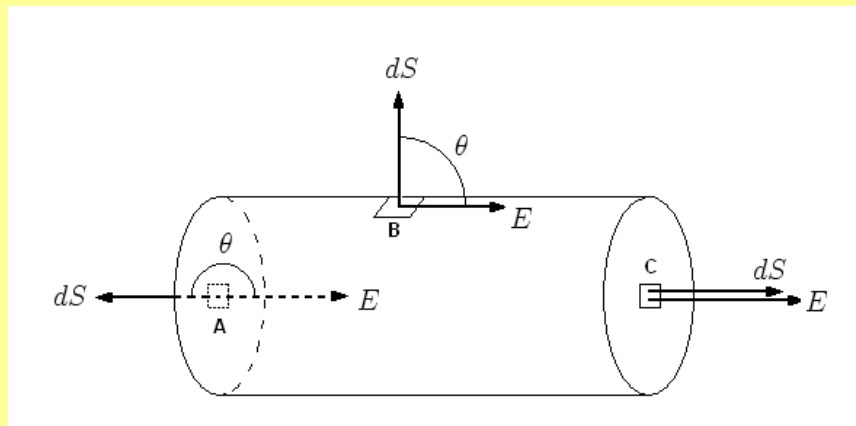
$$\phi_E = \sum_i \vec{E}_i \cdot \Delta\vec{S}_i$$

En el límite  $\Delta S_i \rightarrow 0$  y número de elementos de superficie tiende a infinito, el flujo total del campo se expresa como la integral de superficie

$$\phi_E = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_S \vec{E} \cdot \hat{n} dS$$

Donde  $dS$  es el diferencial de área y  $\hat{n}$  es un vector unitario ortogonal a la superficie el cual:

Para una superficie cerrada apunta hacia afuera de la superficie.

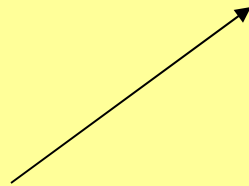


Para una superficie abierta apunta según el sentido en el cual se recorra su borde y siguiendo la regla de la mano derecha (ver pizarra).

## Algunos ejemplos (gentileza prof. D. Risso)

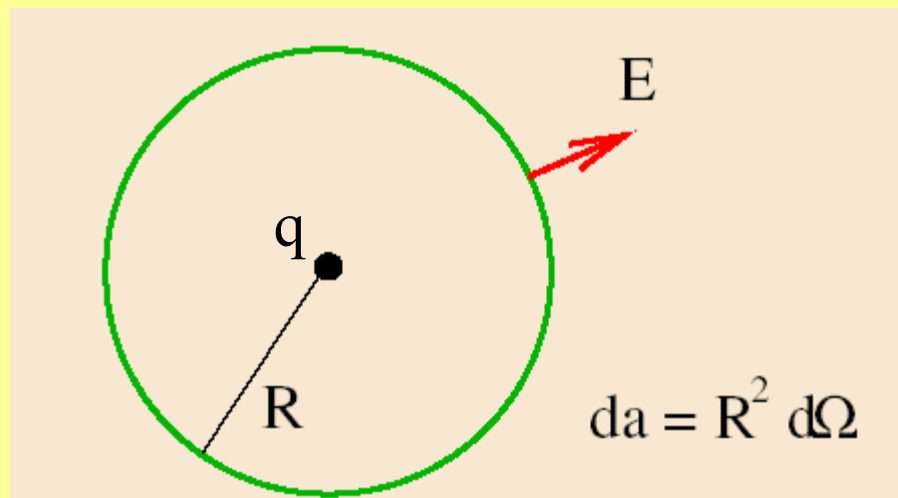
- 1) Considere un campo que varía según  $\vec{E} = E_0 \frac{x}{d} \hat{x}$ . Obtenga el flujo por: (a) una superficie paralela al plano YZ, ubicada en  $x = d$  y orientada según  $\hat{n} = \hat{x}$ ; (b) Repita su cálculo para la misma superficie pero orientada según  $\hat{n} = -\hat{x}$ .
- 2) Considere el flujo del campo anterior sobre una superficie paralela al plano XY.
- 3) Considere ahora un campo que varía según  $\vec{E} = E_0 \frac{xy}{d^2} \hat{x}$ . Obtenga el flujo por: (a) una superficie paralela al plano YZ, ubicada en  $x = d$  y orientada según  $\hat{n} = \hat{x}$ .

Tarea



## Repasemos el ejemplo visto en la clase anterior

**Ley de Gauss. ESFERA** Consideremos una carga puntual  $q$  en el centro de una esfera de radio  $R$ . El flujo a través de la superficie de la esfera está dado por:



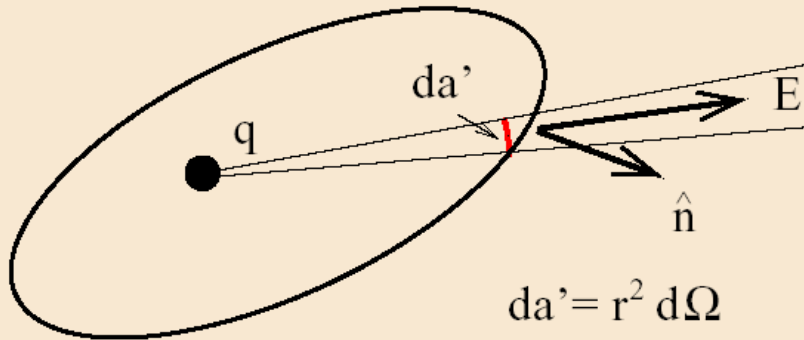
$$\phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

$$\oint \vec{E} \cdot \hat{n} da = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R^2} R^2 d\Omega = \frac{q}{\epsilon_0}$$

# ¿Cuanto vale el flujo en estos casos?

Ley de Gauss. CARGA PUNTUAL

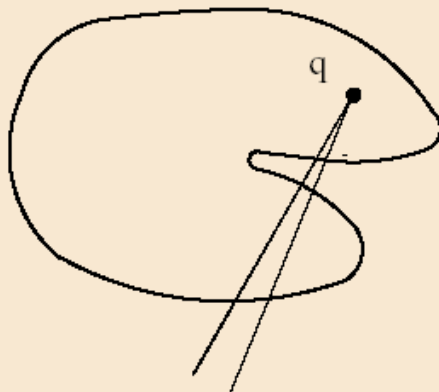
$$\oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} da = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oint \frac{\vec{r} \cdot \hat{n}}{r^3} da = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oint \frac{r}{r^3} da' = \frac{q}{\epsilon_0}$$



$$\phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

$$\phi_E = \frac{q}{\epsilon_0}$$

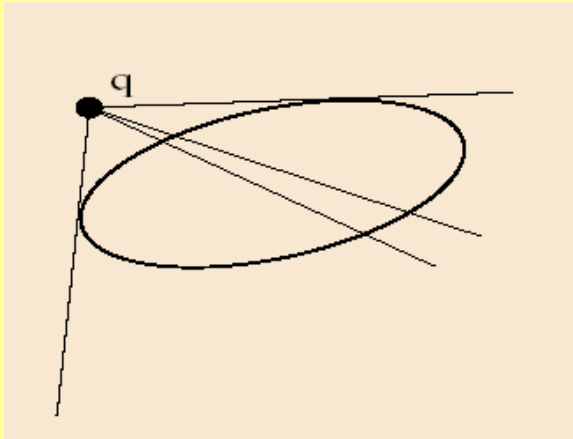
Ley de Gauss II. CASO ESPECIAL



$$\phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

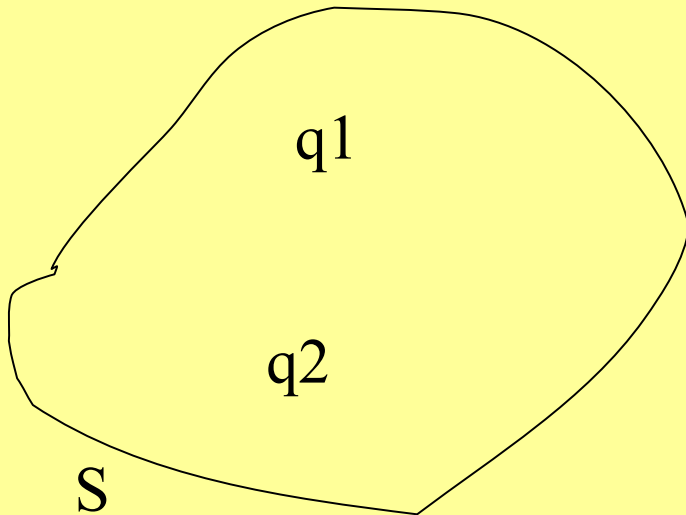
$$\phi_E = \frac{q}{\epsilon_0}$$

## CARGA FUERA DE LA SUPERFICIE



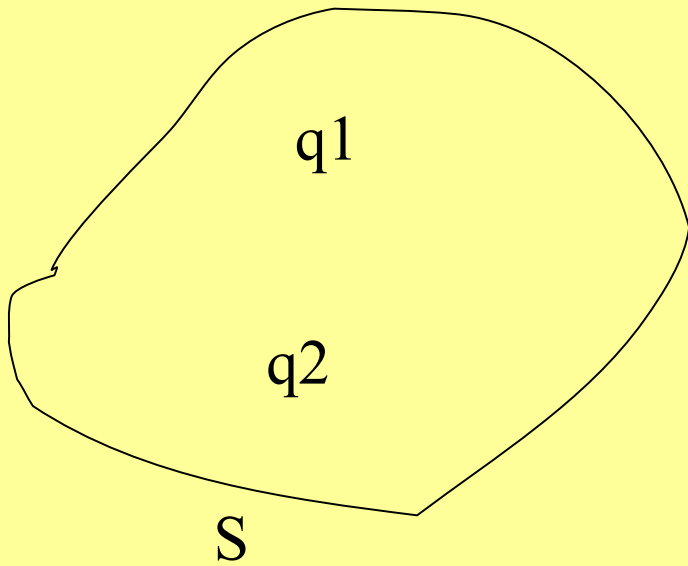
$$\phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$$

Veremos que estos son resultados generales



Consideremos el caso de dos cargas puntuales dentro de esta superficie **cerrada** arbitraria. ¿Cuanto vale el flujo del campo a través de la superficie S?

$$\phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

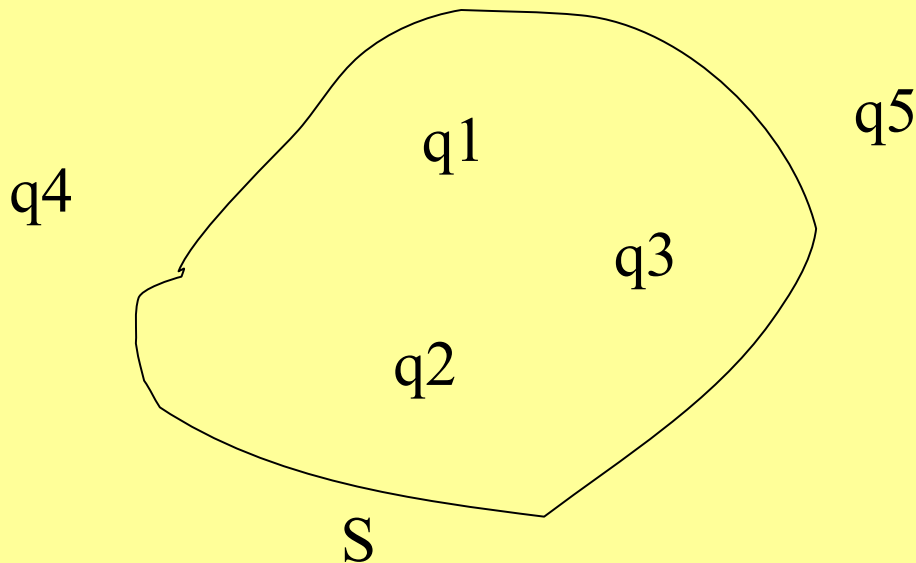


¿Cuanto vale el flujo del campo a través de la superficie cerrada S?

$$\phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

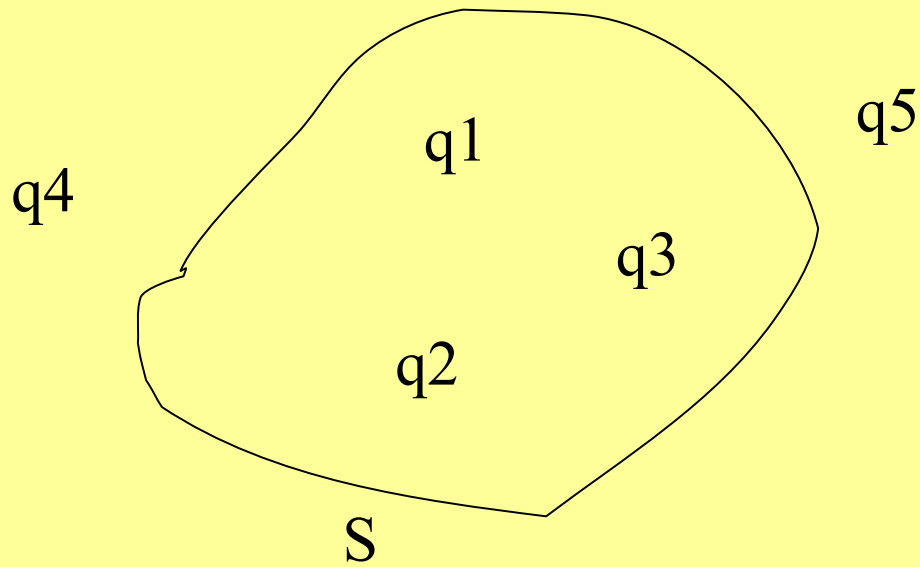
$$\phi_E = \frac{q_1 + q_2}{\epsilon_0}$$

Ej.4 Ahora un caso un poco más complicado



¿Cuanto vale el flujo del campo a través de la superficie cerrada S?

$$\phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s}$$



¿Cuanto vale el flujo del campo a través de la superficie cerrada S?

$$\phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

$$\phi_E = \frac{q_1 + q_2 + q_3}{\epsilon_0} = \frac{Q_{Encerrada}}{\epsilon_0}$$

Esto es un resultado general que se aplica tanto a distribuciones discretas de cargas como a distribuciones continuas de carga ( ver pizarra).

Esta es la denominada Ley de Gauss

## Ley de Gauss

Esta ley, establece que el flujo del campo eléctrico sobre una cierta superficie cerrada, es proporcional a la carga encerrada por dicha superficie. La constante de proporcionalidad es  $1/\epsilon_0$  (o equivalentemente  $4\pi K$ ). La Ley de Gauss se escribe:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{encerrada}}}{\epsilon_0}$$

## Aplicaciones de la ley de gauss a materiales no-conductores cargados

*La Ley de Gauss resulta útil para determinar el campo eléctrico en todo el espacio, en situaciones en que la densidad de carga presenta simetría sencilla.*

Ej.1

Carga puntual  $q$ . Usar la Ley de Gauss para determinar la intensidad del campo eléctrico en todo el espacio.

**Solucion:** El campo eléctrico presenta simetría esférica. Es decir la magnitud  $E = \|\vec{E}\|$  del campo toma el mismo valor sobre puntos de una superficie que está a una misma distancia  $r$  en cualquier dirección respecto a la carga. Esto quiere decir que el campo eléctrico tiene la forma  $\vec{E} = E(r)\hat{n}$ . La integral de flujo sobre una superficie esférica de radio

Tarea



$r$  (superficie *gaussiana*) queda:

$$\begin{aligned}\int \vec{E} \cdot d\vec{S} &= \int E(r)\hat{n} \cdot dS\hat{n} \\ &= E(r) \int dS \\ &= E(r)4\pi r^2\end{aligned}$$

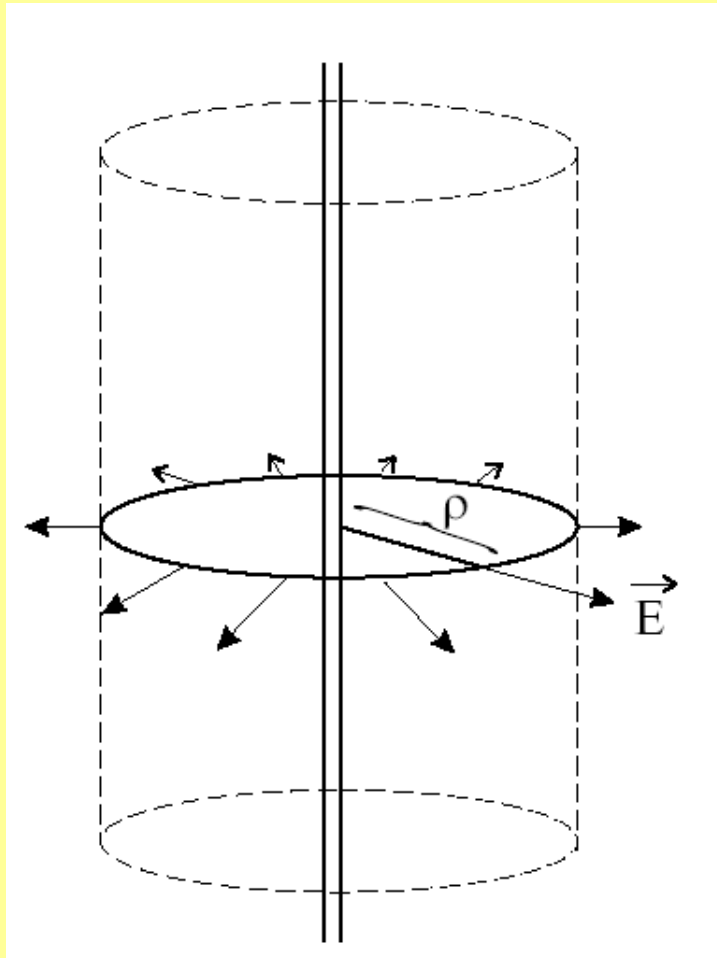
en que hemos usado que la superficie de la esfera (integral total sobre la superficie de una esfera) es  $4\pi r^2$ . El flujo recién calculado debe ser igual a  $q/\epsilon_0$  (ya que la carga encerrada por la superficie gaussiana es  $q$ ) de donde igualando y despejando  $E(r)$  sigue:

$$E(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{Kq}{r^2}$$

expresión que ya conocíamos a partir de la Ley de Coulomb.

Ej.2

Línea infinita con densidad de carga uniforme  $\lambda$ . Usar la Ley de Gauss para determinar el campo en todo el espacio.



**Solución:** El campo eléctrico presenta simetría cilíndrica. Es decir la magnitud  $E$  toma el mismo valor sobre los diferentes puntos de la superficie de un cilindro concéntrico al cable. Para aplicar el teorema escogemos una superficie *gaussiana* que es un cilindro finito (con tapas) de largo  $L$  y radio  $\rho$  concéntrico al cable con carga. Claramente no hay contribución al flujo en las tapas, pues allí el campo es perpendicular a la dirección  $\hat{n}$  de la superficie de las tapas. La única contribución al flujo viene del manto del cilindro. Se tiene

$$\begin{aligned}\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} &= \oint E(\rho) \hat{n} \cdot dS \hat{n} \\ &= E(\rho) \int dS \\ &= E(\rho) 2\pi\rho L\end{aligned}$$

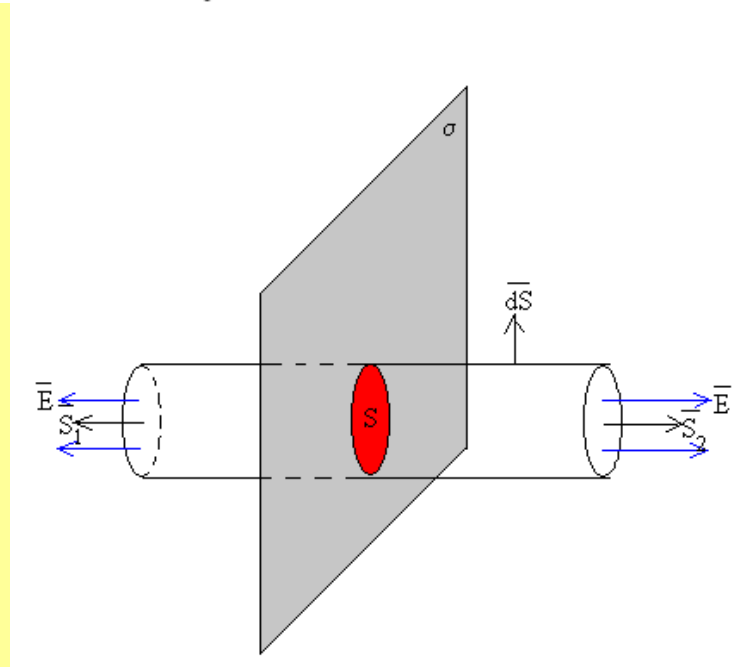
Sin embargo de acuerdo a la Ley de Gauss, este flujo debe ser igual a la carga neta encerrada ( $\lambda L$ ) dividida por  $\epsilon_0$ . De esta igualdad resulta

$$E(\rho) = \frac{\lambda L}{2\pi\rho\epsilon_0 L} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\rho}$$

que es la expresión que ya conocíamos para este problema.

Ej.3

Plano infinito delgado con densidad superficial uniforme  $\sigma_0$ . Calcular el campo eléctrico en todo el espacio usando la Ley de Gauss.



**Solucion:** Debido a la simetría de la configuración de carga, el campo eléctrico presenta la simetría del plano. De acuerdo a esta simetría el campo en la región superior tiene orientación perpendicular al plano mientras que el campo en la región inferior tiene dirección también perpendicular al plano cargado, pero opuesta a la dirección del campo en la región superior.

Para calcular el campo eléctrico escogemos una superficie *gaussiana* de integración constituida por un cilindro plano cuyas tapas superior e inferior están a igual distancia del plano con carga. El manto de este cilindro tiene la normal  $\hat{n}$  de su superficie perpendicular al vector campo eléctrico luego no hay contribución al flujo de esta superficie y la única contribución viene de las tapas superior e inferior (cada una de área  $A$ ). El flujo resulta:

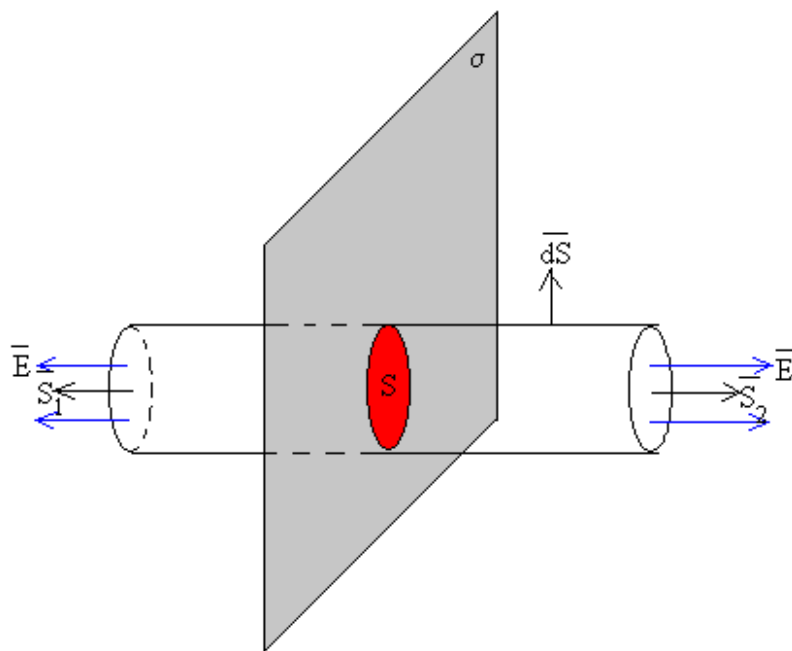
$$\int \vec{E} \cdot d\vec{S} = AE(z) + AE(-z) = 2E(z)A$$

y donde hemos usado que las magnitudes de  $E$  arriba y abajo, a la misma distancia  $z$ , son iguales.

Por otro lado la carga encerrada por este volumen es toda la carga contenida en el área  $A$  de la superficie que intersecta el cilindro:  $Q_{\text{encerrada}} = \sigma_0 A$ . Aplicando la Ley de Gauss queda:

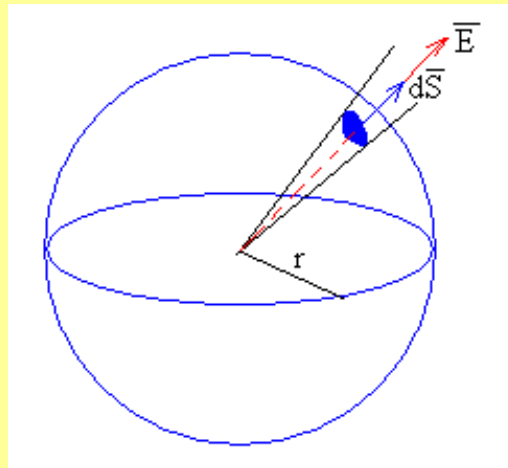
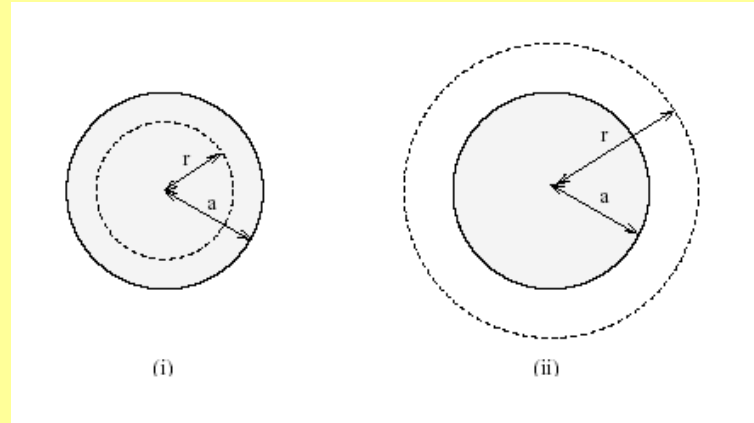
$$2E(z)A = \sigma_0 A / \epsilon_0$$

de donde se obtiene que el campo tiene intensidad  $E = \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0}$  constante (independiente de la altura  $z$  respecto del plano), resultado que ya conocíamos.



3)

4-Se tiene una esfera maciza no conductora de radio  $a$  y carga total  $Q$  distribuida uniformemente en ella. Determine el valor del campo eléctrico  $\vec{E}(\vec{r})$  en todo el espacio generado por esta esfera cargada.



Fin