Física II, Ondas

Descripción Matemática del Movimiento Periódico No Armónico.

La transformada de Fourier

Profesor: Pedro Labraña
Departamento de Física,
Universidad del Bío-Bío

Carrera: Ingeniería Civil en Informática
Créditos: 5

Descripción Matemática del Movimiento Periódico No Armónico

El péndulo no lineal. Fasores. Descripción de un movimiento periódico no armónico mediante las Series de Fourier. Serie de Fourier real. Serie de Fourier Compleja. ***Transformada de Fourier.***

Clases anteriores

Funciones con periodo arbitrario T

Serie de Fourier compleja

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{2\pi n}{T} t}$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x)\, e^{-\frac{2\pi n}{T} t}\, dt$$

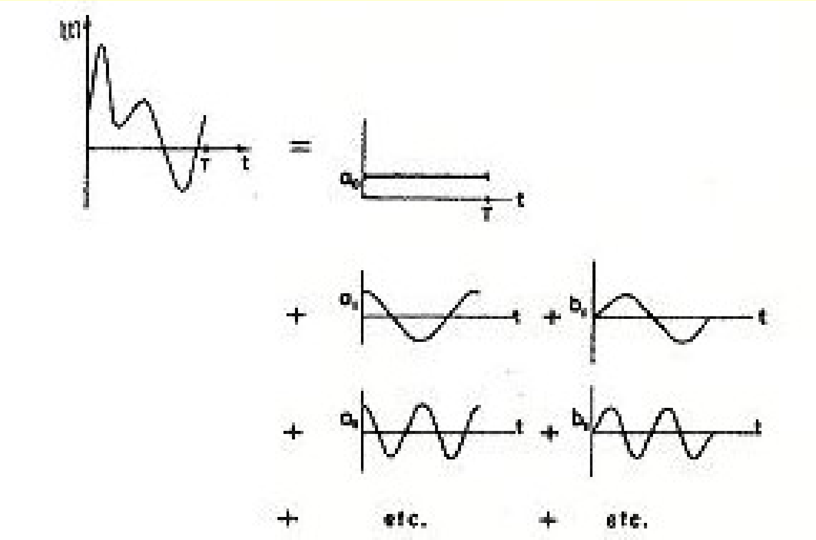
Las cantidades

$$w_n = \frac{2\pi n}{T} \qquad n = \ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Serie de Fourier real

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, Cos\left[\left(\frac{2\pi}{T} n\right) t\right] + \sum_{n=1}^{\infty} b_n\, Sen\left[\left(\frac{2\pi}{T} n\right) t\right]$$

Un poco de física. Supongamos que f(t) representa la posición en un tiempo t de un objeto de masa M que al estar sometido a algún tipo de fuerza realiza un movimiento oscilatorio de periodo T.



$$
\begin{aligned}
f(t) = a_0 & \\
&+ a_1 \cos \omega t + b_1 \operatorname{sen} \omega t \\
&+ a_2 \cos 2\omega t + b_2 \operatorname{sen} 2\omega t \\
&+ a_3 \cos 3\omega t + b_3 \operatorname{sen} 3\omega t \\
&+ \ldots \qquad\qquad + \ldots
\end{aligned}
$$

$$\omega = 2\pi/T$$

Fig. 50-2. Cualquier función periódica *f(t)* es igual a una suma de funciones armónicas simples.

Las cantidades

$$w_n = \frac{2\pi n}{T} \qquad n = \ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Pregunta: ¿Cual de las funciones armónicas tiene mayor periodo?

¿Cual es el periodo de la función f(t) respecto de los periodos de las funciones armónicas?

$$T_n = \frac{T}{n}$$

Tiene el periodo del armónico fundamental n = 1

Pero en una función periódica están presentes muchos armónicos no solo el fundamental. Recordemos el ejemplo

Por ejemplo para la función $f(\theta) = \theta$ (definida entre $-\pi$ y π con periodicidad 2π) este espectro resulta:

$$
\begin{aligned}
a_0 &= 0 \\
a_n &= 0 \\
b_n &= -\frac{2(-1)^n}{n}
\end{aligned}
$$

y en la grafica siguiente se muestra su distribución:

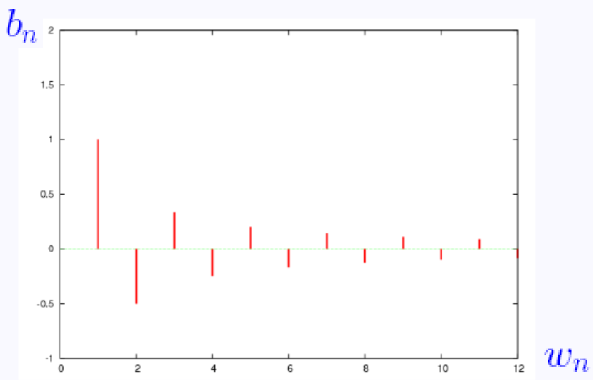


Figura 2.4: Espectro de Fourier de la función $f(\theta) = \theta$ definida (definida entre $-\pi$ y π con periodicidad 2π).

Estos armónicos son una señal que indica cuales son las frecuencias naturales del objeto que está oscilando. Como hemos mencionado, objetos más complejos que un oscilador armónico simple poseen más de una frecuencia natural de oscilación. De este modo, determinar el espectro de Fourier nos permite determinar estas frecuencias naturales de oscilación del objeto.

No debemos olvidar la importancia física de estas frecuencias naturales

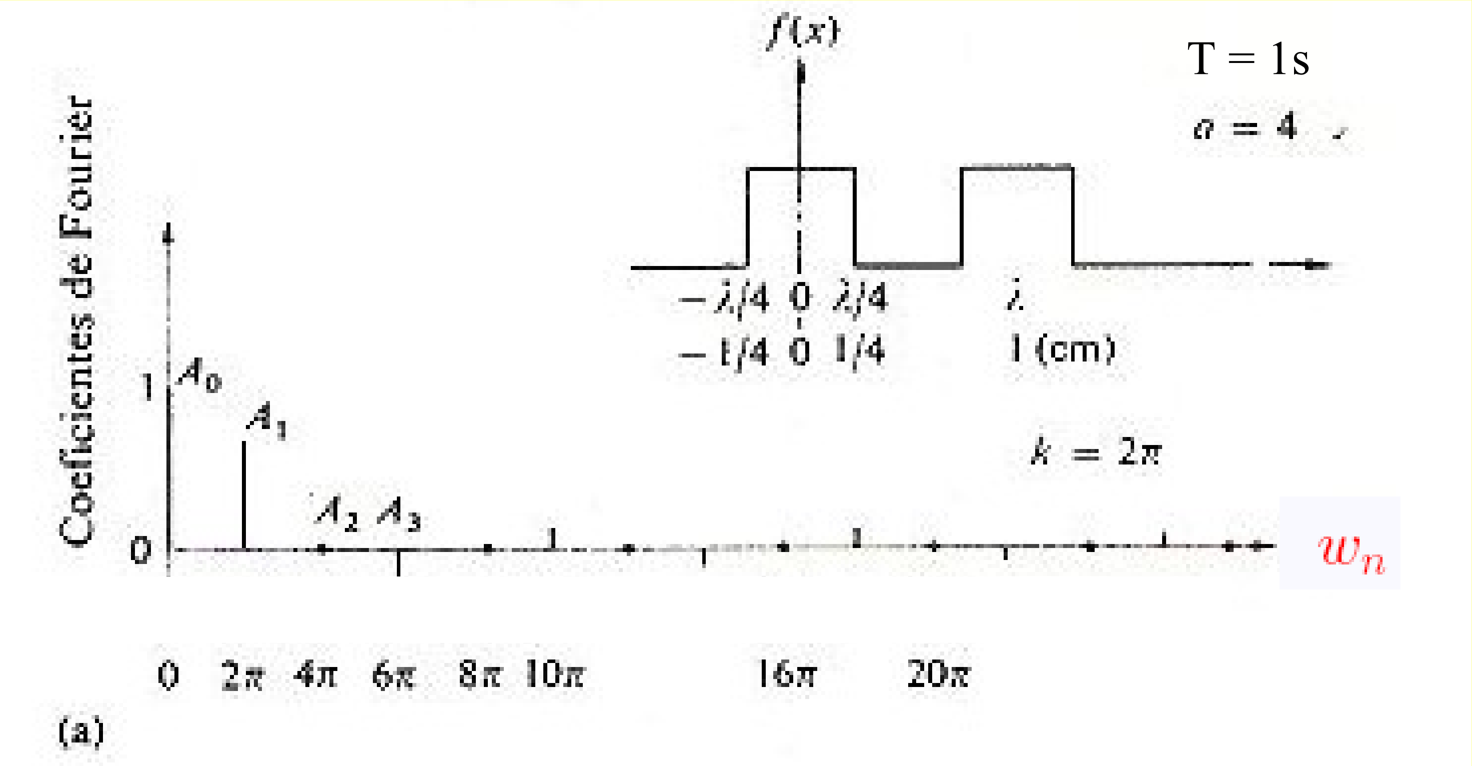
Resonancia

Ej. Puente de Takoma

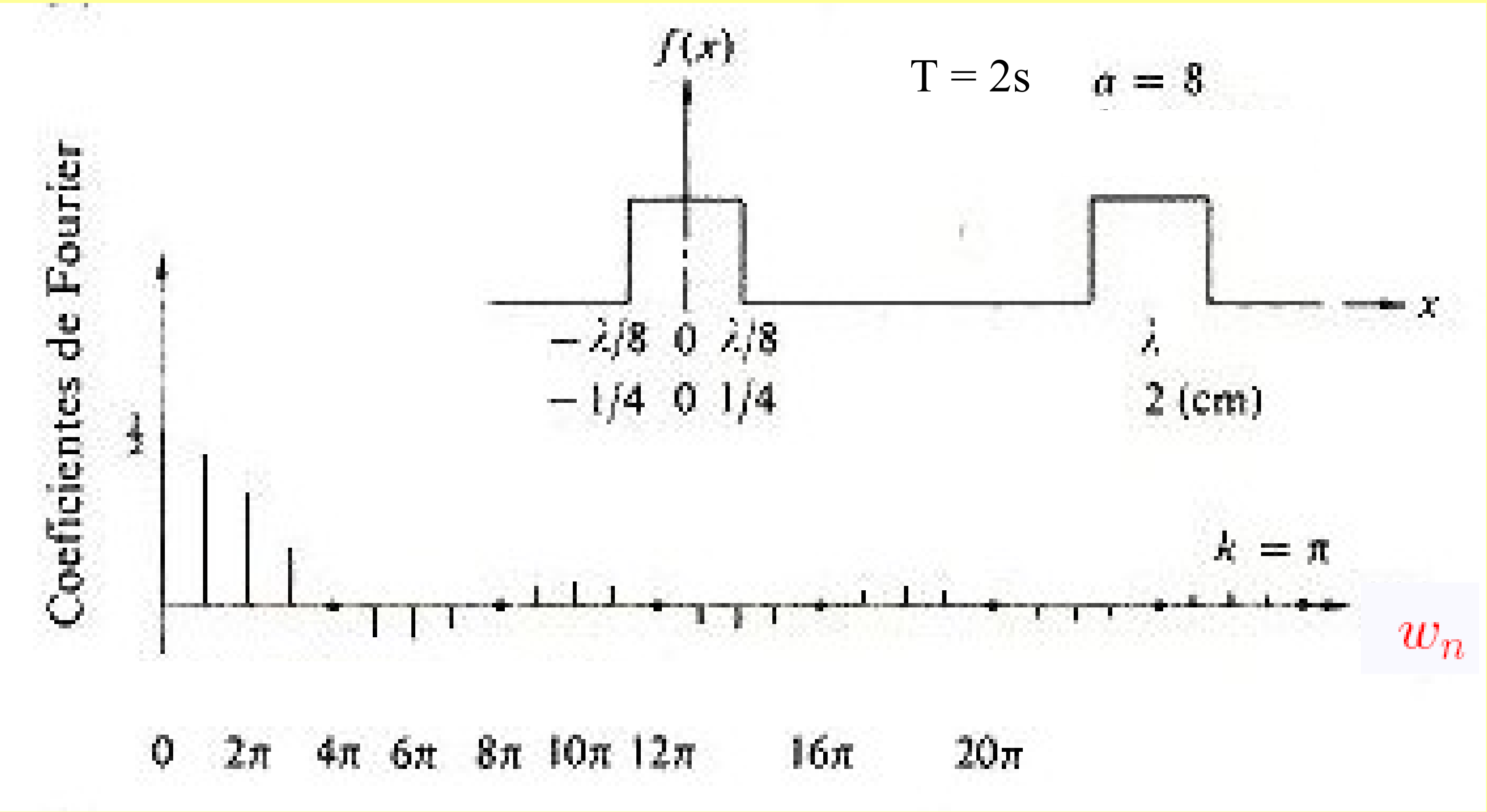
Funciones no-periódicas. Transformada de Fourier

Nota: Realizaremos un introducción no formal a este tema

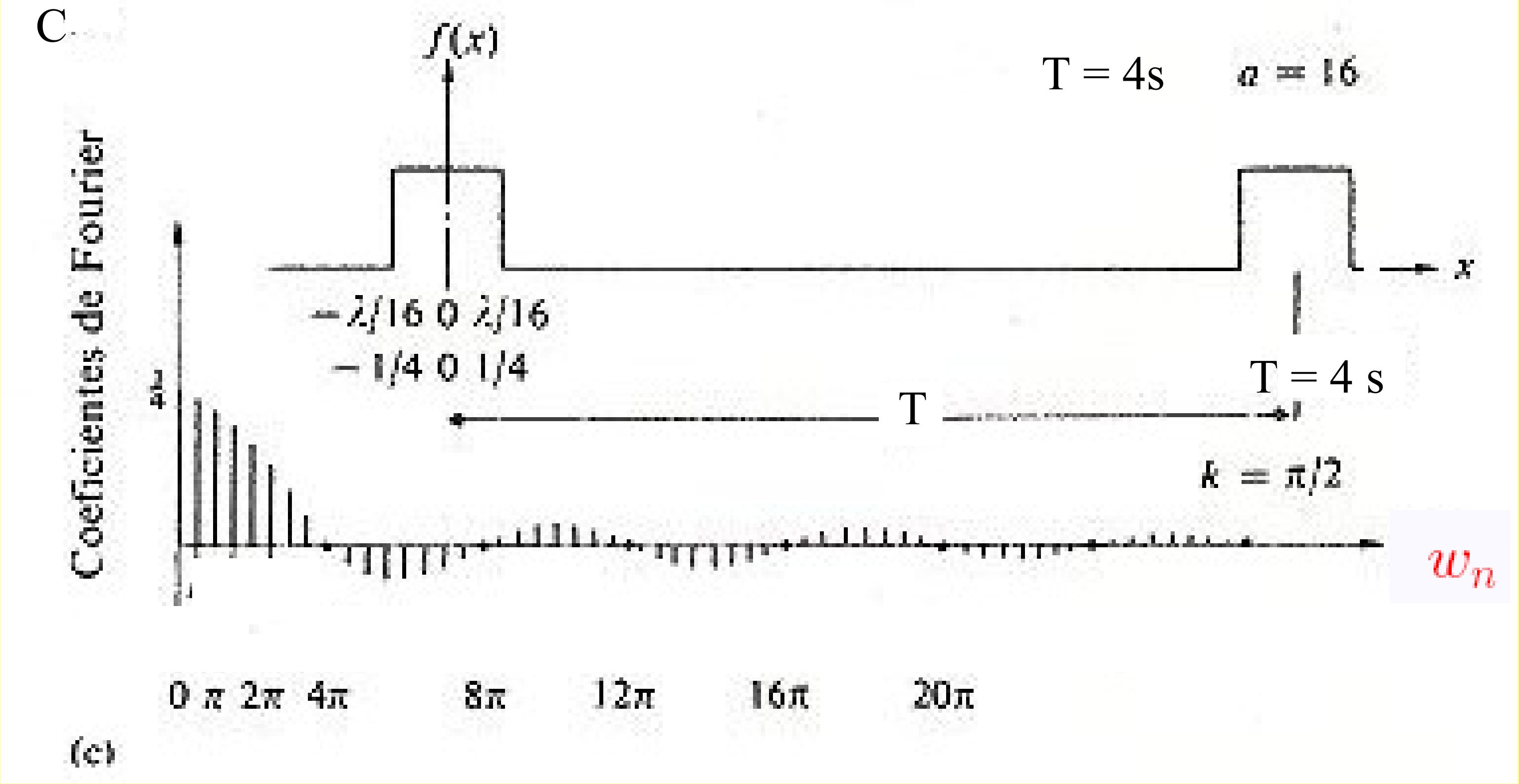
Ver pizarra



B



f(x)
T = 2s
α = 8
x
− λ/8 0 λ/8
− 1/4 0 1/4
λ
2 (cm)
Coeficientes de Fourier
k = π
w_n
0 2π 4π 6π 8π 10π 12π 16π 20π



Conclusión: Ver pizarra

Un par de ejemplos (ver videos)

Fin