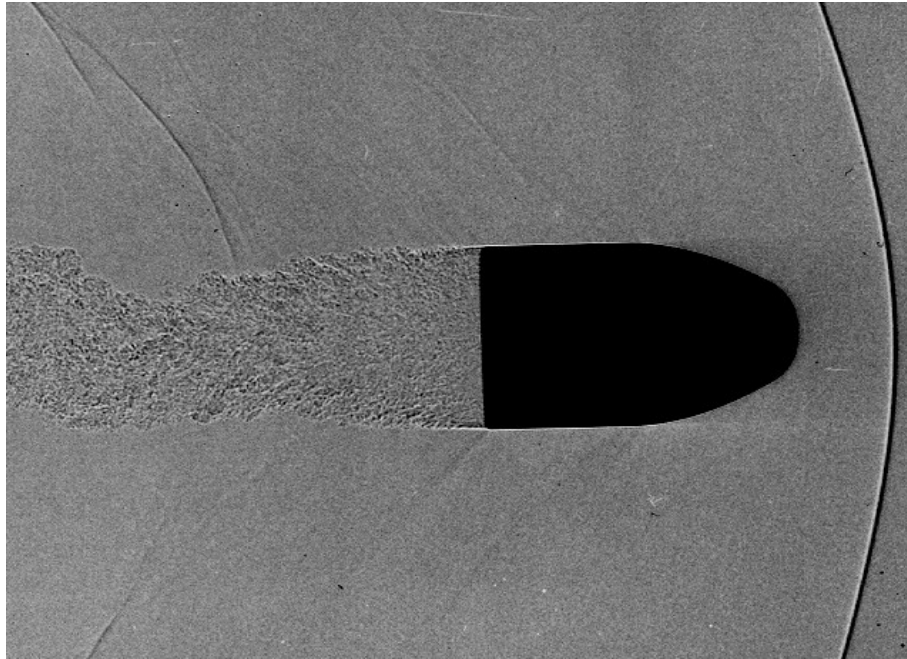


# Física II, Ondas

## Movimiento Amortiguado y Forzado



Profesor: Pedro Labraña  
Departamento de Física,  
Universidad del Bío-Bío

Carrera: Ingeniería Civil en Informática  
Créditos: 5

# Movimiento Oscilatorio

..., Relación Entre el Movimiento Armónico Simple y el Movimiento Circular Uniforme (Análisis de Fasores) , Oscilaciones Forzadas y Resonancia, Movimiento Amortiguado.

## Oscilaciones Amortiguadas y la Energía

Clase anterior

Ecuación

$$\frac{d^2 X}{dt^2} + \omega_0^2 X + \gamma \frac{dX}{dt} = 0$$

$$\omega_0 > \frac{\gamma}{2}$$

Solución amortiguada

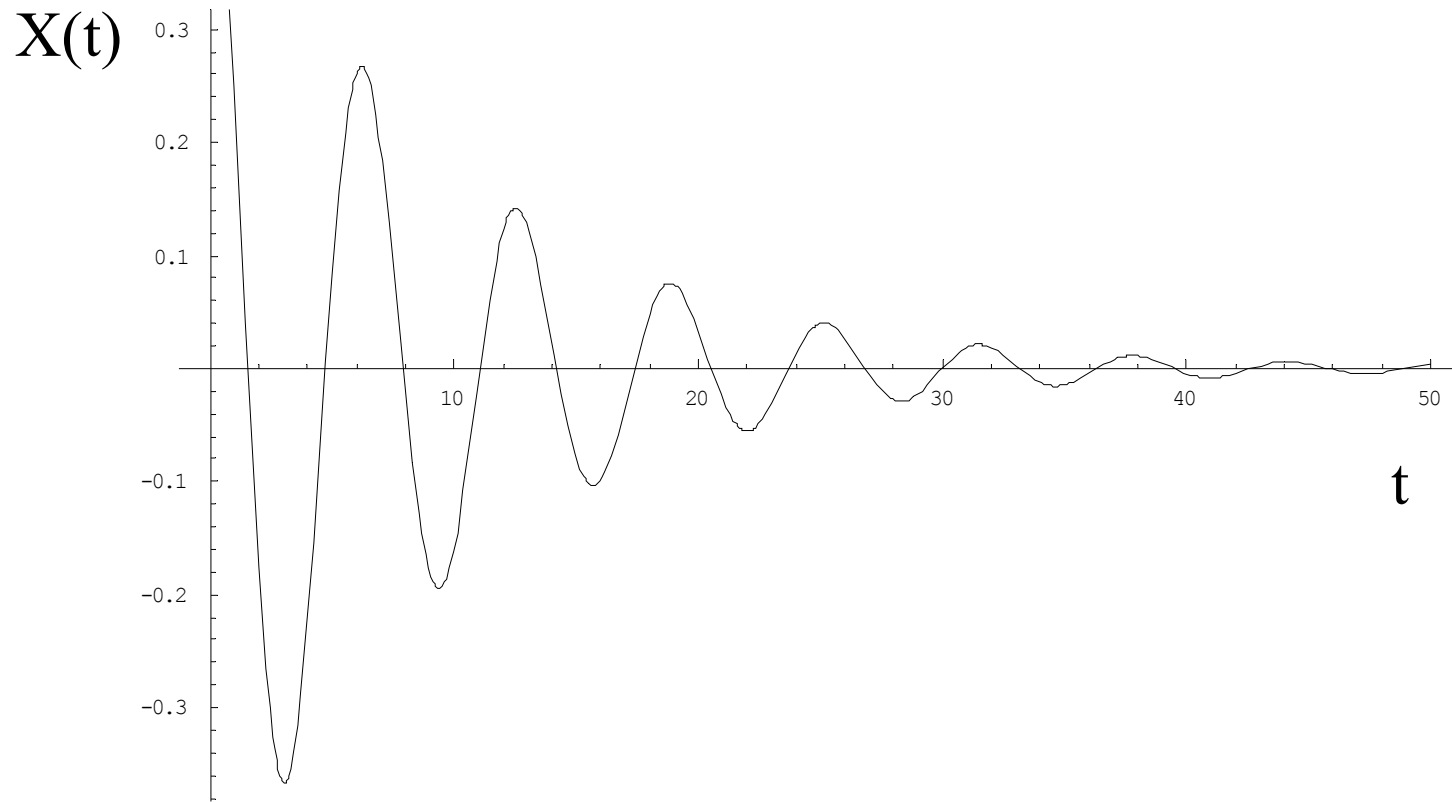
Solución

$$X(t) = A e^{-\frac{\gamma t}{2}} \cos[\bar{\omega} t + \delta]$$

Donde A y  $\delta$  son constantes que se fijan utilizando las condiciones iniciales.

Donde:

$$\bar{\omega} = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2}$$



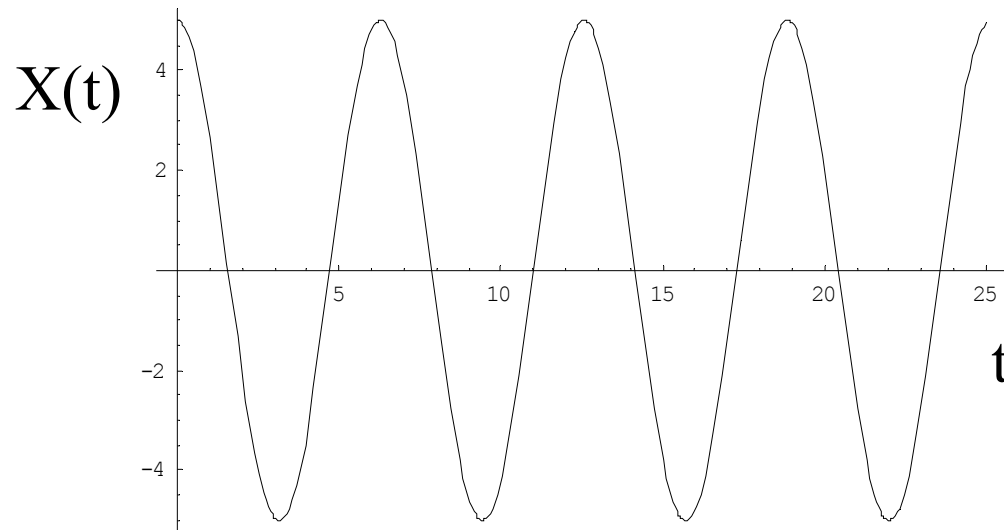
Pregunta: 1) ¿El periodo de oscilación de una masa  $M$  unida a un resorte  $K$  aumenta o disminuye al introducir este sistema en un líquido viscoso de constante  $b$ ?

# Solución amortiguada y la Energía

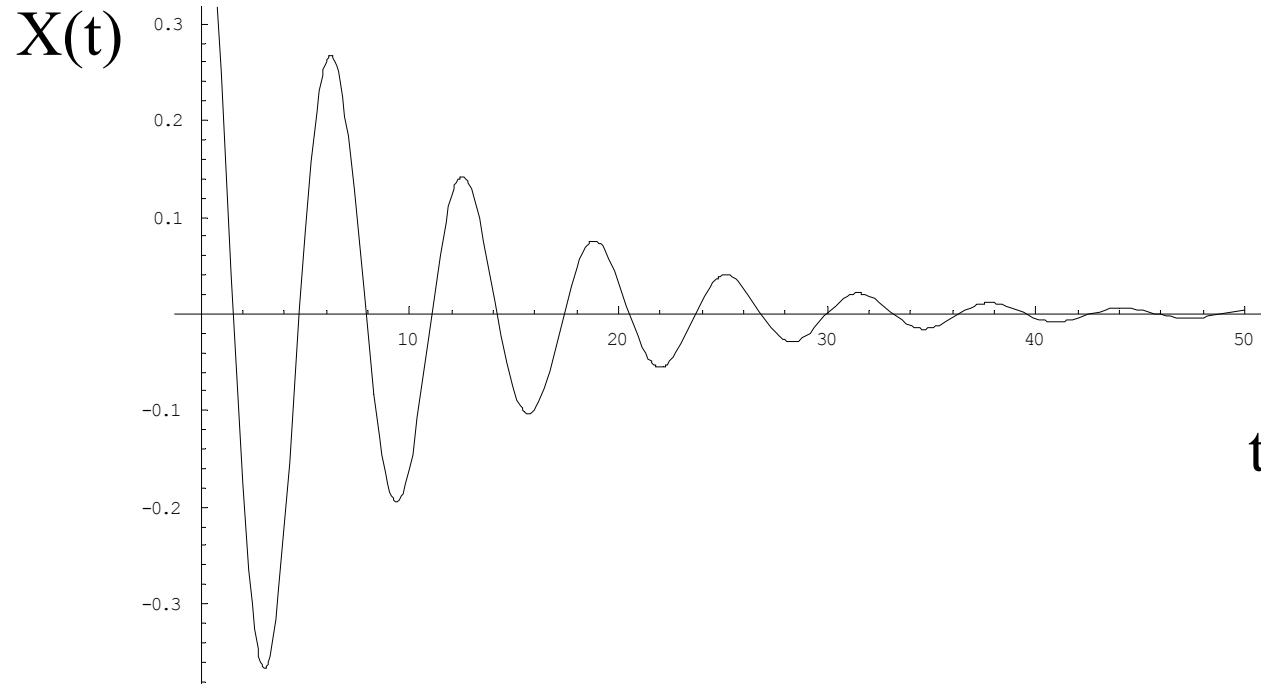
La energía de un oscilador libre se conserva y su valor es:

$$E = \frac{k}{2} A^2 = m\omega_0^2 \frac{A^2}{2}$$

Luego si ustedes observan un objeto que se mueve realizando un movimiento armónico simple, ustedes podrán inferir que este objeto posee una energía almacenada E.



## Energía en un oscilador amortiguado



La energía no se conserva en esta situación

$$E \neq \text{Constante}$$

Dada la presencia de fuerzas disipativas (fuerza de roce), el oscilador pierde energía en el tiempo, lo que se evidencia en la disminución de la amplitud de oscilación. Notar que en los tres casos considerados la amplitud de “oscilación” decrece exponencialmente en el tiempo. Como la energía mecánica es proporcional al cuadrado de la amplitud de oscilación, la energía mecánica del sistema decrece en el tiempo de acuerdo con la ecuación:

$$E(t) = E_0 e^{-\gamma t} = E_0 e^{-t/\tau}$$

Donde  $E_0$  es la energía inicial del sistema

(Ver pizarra)

$$\text{Donde } \tau = \frac{1}{\gamma} = \frac{m}{b}$$

Tiempo característico del sistema

En particular si evaluamos la energía en  $t = \tau$ . Obtenemos:

$$E(t = \tau) = E_0 (0.37)$$

Luego en un tiempo  $t = \tau$  el sistema posee un 37% de la energía que tenía originalmente.

(Ver pizarra)

# Oscilaciones Amortiguadas y Forzadas

Consideramos nuestro sistema con amortiguamiento viscoso, pero ahora sometido a una fuerza externa que depende del tiempo. (Ver pizarra)

Una posibilidad es forzar el sistema con una fuerza que sea periódica pero de un periodo diferente al del sistema. Esto es, consideramos una fuerza externa de la forma:

$$F_E(t) = F_0 \cos[wt]$$

Caso libre, pero  
con roce

$$X(t) = A e^{-\frac{\gamma}{2}t} \cos[\bar{w}t + \delta]$$

$$\bar{w} = \sqrt{w_0^2 - \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2}$$

Escribimos la ecuación de movimiento

$$F_T = ma_x = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -k(x - l_0) - b \frac{dx}{dt} + F_0 \cos[wt]$$

La ecuación diferencial que debemos resolver es:

$$\frac{d^2 X}{dt^2} + \omega_0^2 X + \gamma \frac{dX}{dt} = \frac{F_0}{m} \cos[wt]$$

Donde

$$X = (x - l_0)$$

$$X(t) = ?$$

Imponemos una solución donde la masa oscilará con la frecuencia de la fuerza externa. Diremos que esta será la solución una vez que el sistema esté en el denominado estado estacionario.

$$X(t) = A \cos[wt + \delta]$$

Donde A y delta son constantes (no dependen del tiempo) que están determinadas por las características del sistema.



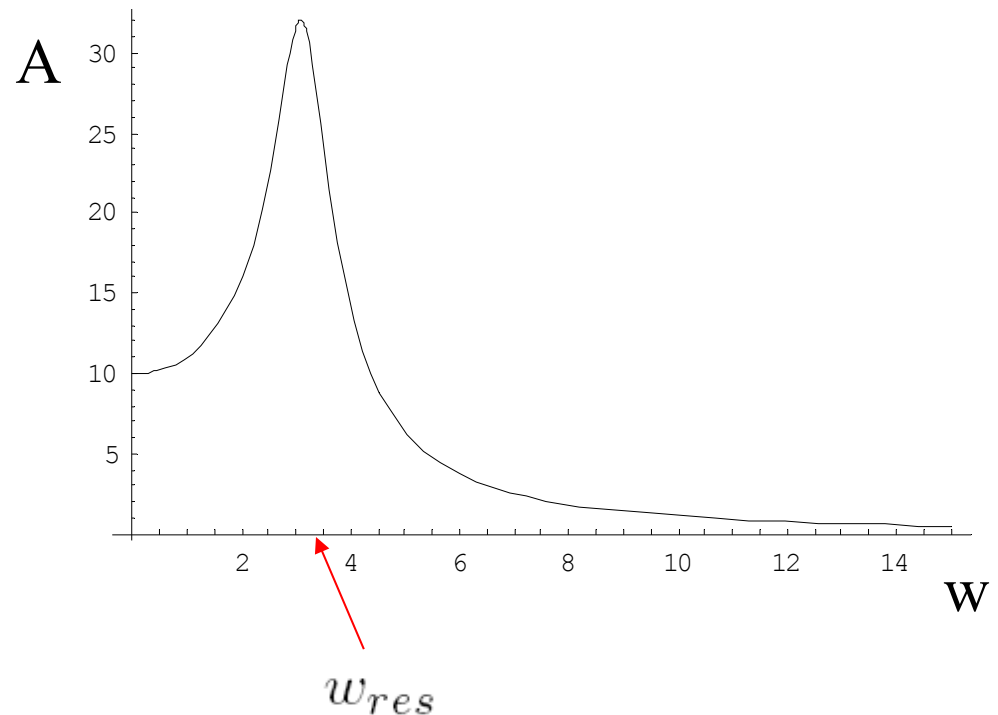
En particular obtenemos que estas constantes valen:

$$X(t) = A \cos[wt + \delta]$$

$$A = \frac{F_0}{m \sqrt{(w_0^2 - w^2)^2 + (\gamma w)^2}} \quad \tan[\delta] = \frac{\gamma w}{(w_0^2 - w^2)}$$

$$\delta = \arctan \left[ \frac{\gamma w}{(w_0^2 - w^2)} \right]$$

(Ver pizarra)

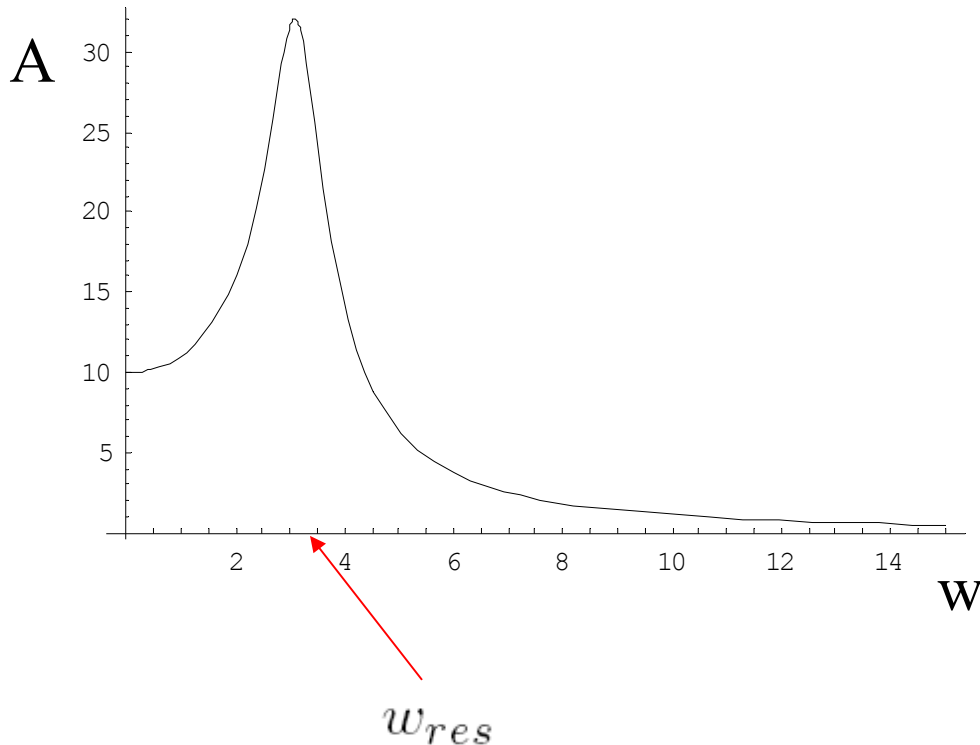


# Resonancia

El fenómeno de resonancia también se manifiesta para este sistema. De hecho podemos notar que la amplitud de oscilación para la vibración forzada ( $A$ ) alcanza un máximo cuando la frecuencia de la fuerza externa es igual a la denominada frecuencia de resonancia del sistema ( $w = w_{res}$ ). Notemos que a diferencia del caso sin roce viscoso, ahora la amplitud en resonancia ( $A_{res}$ ) es un valor finito.

$$w_{res} = \sqrt{w_0^2 - \frac{\gamma^2}{2}}$$

$$A_{res} = \frac{F_0}{m\gamma} \frac{1}{\sqrt{w_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}}$$



(Ver pizarra)

$$X(t) = A \cos[wt + \delta]$$

(Ver videos)

Fin