

Física II, Ondas

Clase 3



Profesor: Pedro Labraña
Departamento de Física,
Universidad del Bío-Bío

Carrera: Ingeniería Civil en Automatización
Créditos: 5

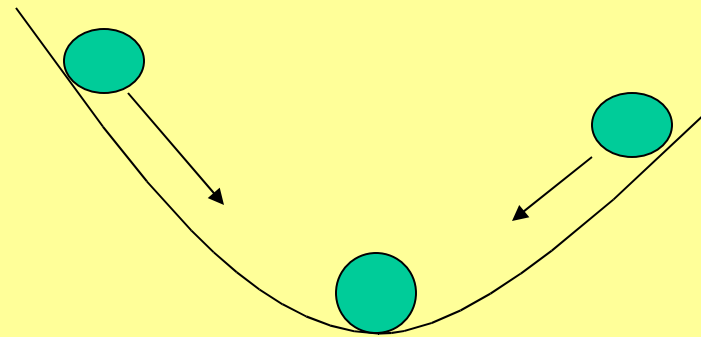
Movimiento Oscilatorio

*Conceptos Básico, El Oscilador Armónico Simple, Movimiento Armónico Simple,
Consideraciones de Energía en el Movimiento Armónico Simple*

Clase anterior

Fuerza restauradora: Fuerza que tiende a “restaurar” el movimiento hacia el punto de equilibrio estable. (ver animación)

Ej.



La naturaleza es generosa en este tipo de fuerzas:

(a) Un árbol oscila bajo la acción del viento y de sus propias fuerzas de tensión internas, una vez que el viento pasa, el árbol vibra un rato, pero el roce interno y con el aire detiene lentamente su movimiento hasta que se estaciona en el equilibrio.

(b) Una molécula sometida a un scanner de resonancia magnética sufre una fuerza magnética, que la saca de su equilibrio, vibra un rato emitiendo ondas electromagnéticas que son captadas por los sensores del scanner, y luego se estacionan nuevamente en sus puntos de equilibrio.

(c) Un puente oscila un rato bajo las fuerzas de peso de los vehículos que circulan sobre el y sus propias tensiones internas, la disipación del roce interno hace que finalmente las vibraciones disminuyan y vuelva a su situación de reposo.

El ejemplo más importante de fuerza restaurativa es el debido a la acción de los resortes a través de la *Ley de Hooke*¹. Este modelo es importante porque conduce a ecuaciones diferenciales que pueden resolverse en forma sencilla. Estas ecuaciones son lineales (es decir no figuran términos con potencias de 2 o superior en la expresión).

En general una vibración cualquiera corresponde a un modelo o ecuación no lineal (que normalmente solo pueden resolverse en forma numérica salvo un conjunto menor de casos en que las vibraciones son pequeñas en torno a una situación de equilibrio),



OJO con esto

El Oscilador Armónico Simple

Si una partícula vibra con respecto a una posición de equilibrio bajo la influencia de una fuerza que es proporcional a la distancia de la partícula a la posición de equilibrio, se dice que la partícula tiene un movimiento armónico simple. La fuerza es tal que en todo momento se dirige hacia el punto de equilibrio (es una fuerza restauradora).

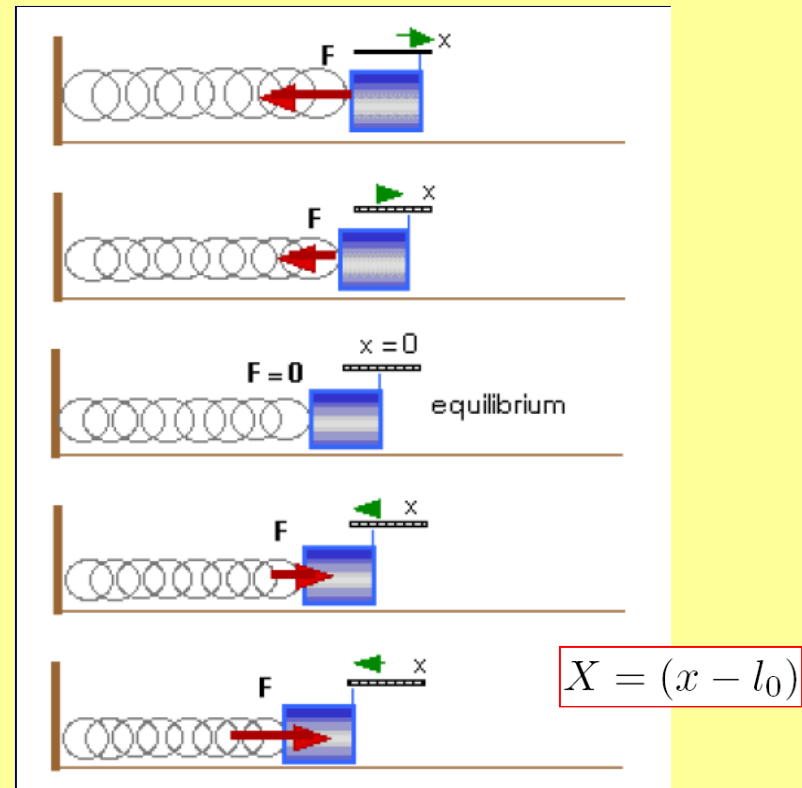
Un ejemplo de oscilador armónico simple es una partícula de masa m fija a un resorte de constante k .

Por simplicidad supondremos que la masa y el resorte están sobre una superficie horizontal sin roce. Si el resorte tiene un largo natural l_0 . Entonces tenemos que la fuerza que ejerce el resorte sobre la masa m está dada por:

$$F_r = -k(x - l_0)$$

Ley de Hooke

$x = l_0$ Posición de equilibrio para la masa m



Aplicamos la segunda ley de Newton ($F = m \cdot a$), al movimiento de la masa sujeta a la fuerza del resorte. La idea es determinar $x(t)$.

$$F = ma_x = m \frac{d^2 x}{dt^2}$$

Ecuación de movimiento para la masa será

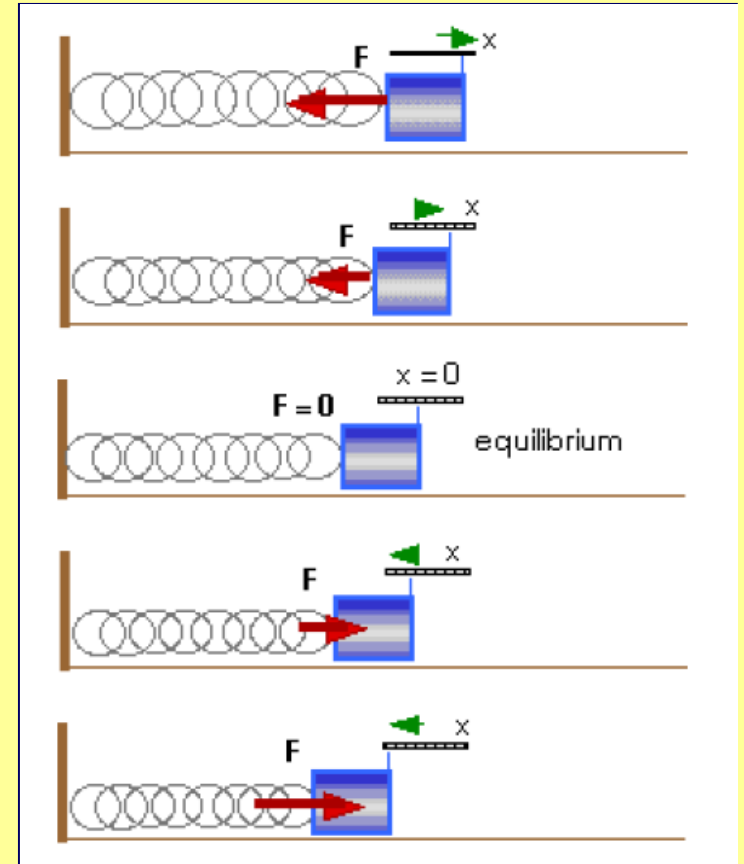
$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -k (x - l_0)$$

Ecuación diferencial de segundo grado y lineal. La incógnita en esta ecuación es la función $x(t)$. Donde $x(t)$ es la posición de la masa m en el tiempo t .

Por simplicidad definimos la variable X :

$$X = (x - l_0)$$

$X(t)$ mide el desplazamiento de m respecto de su punto de equilibrio



$$F_r = -k (x - l_0)$$

$$X = (x - l_0)$$

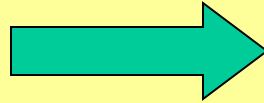
Notemos que:

$$1) \frac{dX}{dt} = \frac{d}{dt}(x - l_0) = \frac{dx}{dt}$$

$$2) \frac{d^2 X}{dt^2} = \frac{d^2 x}{dt^2}$$

Luego la ecuación de movimiento se puede escribir de la siguiente forma más sencilla

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -k (x - l_0)$$



$$m \frac{d^2 X}{dt^2} = -k X$$

Donde la variable por determinar es $X(t)$

$$\frac{d^2 X}{dt^2} + \frac{k}{m} X = 0$$

Ecuación del oscilador armónico simple

Definimos:

$$\omega_0 \equiv \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Frecuencia angular

Luego la ecuación del oscilador armónico simple queda:

$$\frac{d^2 X}{dt^2} + \omega_0^2 X = 0 \quad (*)$$

La idea es determinar cuanto vale la función $X(t)$

$$X(t) = ?$$

Es posible demostrar que una solución general de esta ecuación es la siguiente

$$X(t) = A \cos(\omega_0 t + \delta)$$

Donde

$$A = \text{cte.}$$

$$\delta = \text{cte.}$$

Demostración (Ver la pizarra)

Son constantes por determinar.
Constantes arbitrarias.

Significado físico de las constantes

$$\omega_0 \equiv \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$A = Cte.$$

$$\delta = Cte.$$

Relevancia física de la frecuencia angular

$$\omega_0 \equiv \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Recordemos que $X(t)$ mide el desplazamiento de la masa m desde su punto de equilibrio. Ahora, ya que resolvimos la ecuación del movimiento armónico simple, sabemos como es esta función $X(t)$

$$X(t) = A \cos(\omega_0 t + \delta)$$

En particular podemos notar que esta función es periódica

$$X\left(t + \frac{2\pi}{\omega_0}\right) = A \cos\left[\omega_0 \left(t + \frac{2\pi}{\omega_0}\right) + \delta\right] = A \cos\left[\omega_0 (t) + \delta + 2\pi\right]$$

$$= A \cos(\omega_0 t + \delta) = X(t)$$

Por lo tanto la función $X(t)$ es una función periódica con periodo T

$$X(t + T) = X(t)$$

Donde el periodo
está dado por

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

Luego

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

Luego todos los movimientos que son solución de la ecuación (*) tiene el mismo periodo de oscilación y este queda determinado sólo por la masa m de la partícula que vibra y por la constante del resorte k .

No depende de la amplitud del movimiento, no depende de la velocidad con que soltaron la masa, no depende del color del resorte, no depende de la temperatura, no depende de

La frecuencia del oscilador viene dada por:

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Por lo tanto:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \nu$$

Lo que justifica el nombre de frecuencia angular para ω

Verificamos las unidades

$$[w^2] = \left[\frac{k}{m}\right] = \frac{\text{Newton/metro}}{\text{Kg}} = \frac{\text{Kg metro/seg}^2/\text{metro}}{\text{Kg}} = \frac{1}{\text{seg}^2}$$

Todo bien

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \nu$$

Significado físico de la constante A

A es la amplitud del movimiento de la masa m. A tiene unidades de longitud ([Metros])

Significado físico de la constante δ

Esta constante se denomina constante de fase y no tiene unidades. Sirve para que la solución general X(t) satisfaga las condiciones iniciales.

La amplitud A y la constante de fase quedan determinadas por la posición y velocidad iniciales de la partícula de masa m.

Elongación, velocidad, y aceleración en un movimiento armónico simple

Elongación = Desplazamiento respecto del punto de equilibrio

$$X(t) = A \cos(w_0 t + \delta) \quad \text{Máximo desplazamiento } \boxed{A}$$

Velocidad de la masa m:

$$V = V(t) = \frac{dX}{dt} = -A \omega_0 \text{Sen}(w_0 t + \delta)$$

Máxima velocidad

$$\boxed{A \omega_0}$$

Aceleración de la masa m:

$$a = a(t) = \frac{d^2 X}{dt^2} = -A \omega_0^2 \cos(w_0 t + \delta)$$

Máxima aceleración

$$\boxed{A \omega_0^2}$$

(Ver animación)

Cuando la elongación es máxima entonces la rapidez es cero y la aceleración es máxima pero apunta en sentido contrario a la elongación

Cuando la elongación es cero entonces la rapidez es máxima y la aceleración es cero.

¿cuánto vale la fuerza cuando $X=0$?

¿cuánto vale la fuerza cuando la elongación es máxima?

Fin