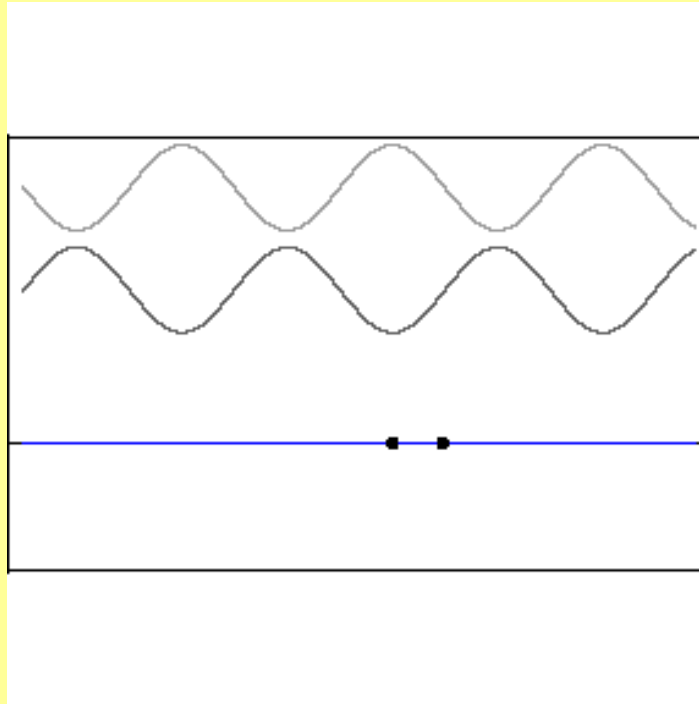


Física II, Ondas

Ondas transversales en una cuerda

Modos normales



Profesor: Pedro Labraña
Departamento de Física,
Universidad del Bío-Bío

Carrera: Ingeniería Civil en Informática
Créditos: 5

Ondas Mecánicas

*Tipos de Ondas, Ondas Viajeras, La ecuación de onda, El Principio de Superposición, **Ondas Estacionarias**, Energía transportada por una onda.*

Ondas estacionarias II

Estudiamos el comportamiento de las ondas transversales en cuerdas de longitud finita. Consideraremos dos casos:

- 3) Cuerda de largo L con sus dos extremos fijos.
- 4) Cuerda de Largo L con un extremo fijo y el otro libre

Con este objetivo debemos resolver la ecuación de onda sujeta a condiciones a diferentes condiciones de borde

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}$$

Cuerda de largo L con sus dos extremos fijos

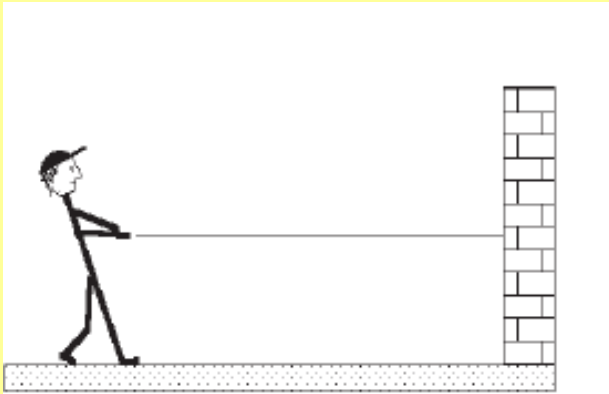
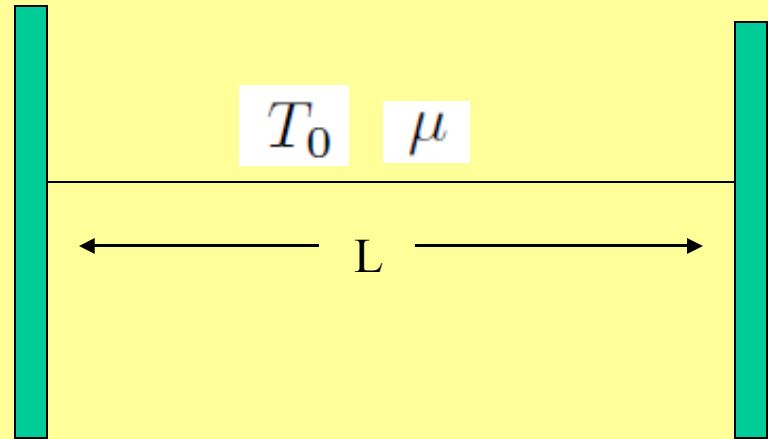


Figura 3.1: Cuerda bajo tensión.



$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \underbrace{\frac{T_0}{\mu}}_{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

con rapidez de onda $c = \sqrt{T_0/\mu}$.

Buscamos soluciones a la ecuación de onda que complan con las condiciones

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}$$

$$u(0, t) = 0 \text{ y } u(L, t) = 0$$

Consideramos una solución del tipo

$$u(x, t) = A(x) \cos(w t)$$

Modos normales

Introducimos esta posible solución en la ecuación y vemos que pasa

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -w^2 A(x) \cos(w t)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{d^2 A}{dx^2} \cos(w t)$$

y la ecuación de onda queda:

$$-w^2 A(x) \cos(w t) = c^2 \frac{d^2 A}{dx^2} \cos(w t)$$

de donde sigue:

$$\frac{d^2 A}{dx^2} = - \underbrace{\frac{w^2}{c^2}}_{k^2} A(x)$$

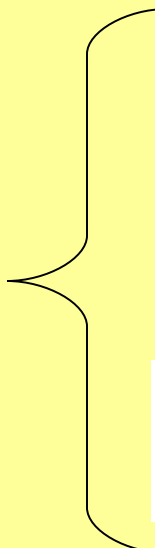
Vemos que $A(x)$ obedece una ecuación tipo *oscilador armónico* pero en que las “oscilaciones” ocurren en el espacio con una “frecuencia angular” espacial (no temporal) que satisface $k = w/c$ o

$$w = c k$$

La solución espacial más general es:

$$A(x) = A_0 \operatorname{Sen}[kx + \alpha]$$

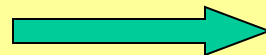
y como queremos que los puntos $x = 0$ y $x = L$ no se muevan se debe tener:


$$A(0) = 0$$



$$\alpha = 0$$

$$A(L) = 0$$



$$kL = n\pi \text{ con } n \text{ entero}$$

$$k = k_n = \frac{n\pi}{L} \quad n = 1, 2, \dots$$

Los números de onda posible no son cualquiera sino que son múltiplos enteros de π/L .

Esto tiene una consecuencia importante: como $w = ck$ entonces las frecuencias no son cualquiera sino que son múltiplos de una frecuencia fundamental $w_1 = c\pi/L$. Esto es:

$$w_n = ck_n = c \frac{n\pi}{L} \quad n = 1, 2, \dots$$

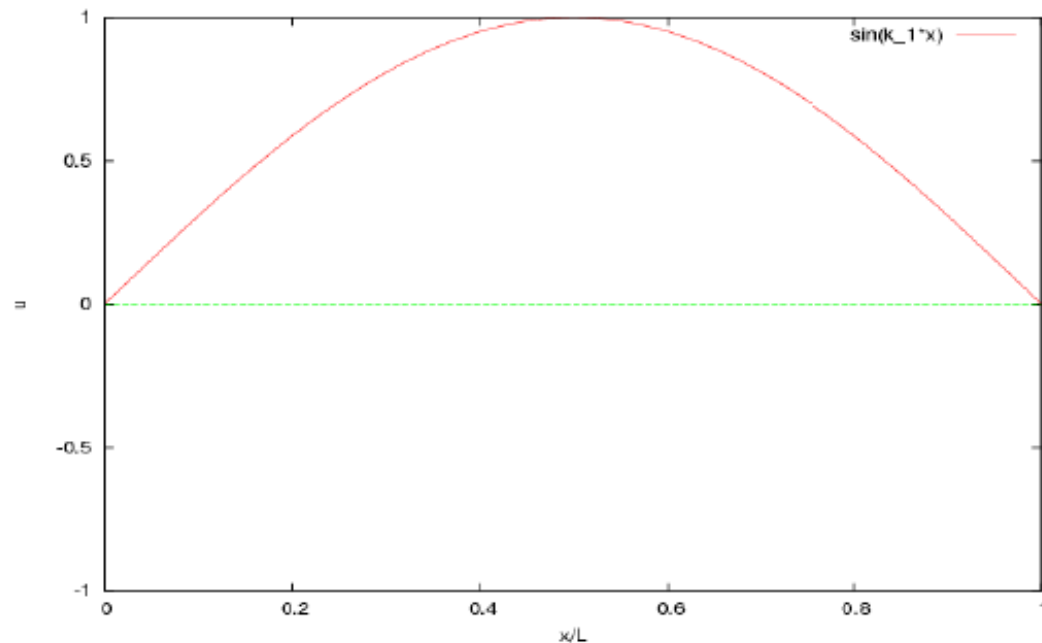
Luego la solución será:

$$u(x, t) = A_0 \operatorname{Sen}[k_n x] \operatorname{Cos}[w_n t]$$

Grafiquemos los distintos modos normales que resultan:

El caso $n = 1$ corresponde a:

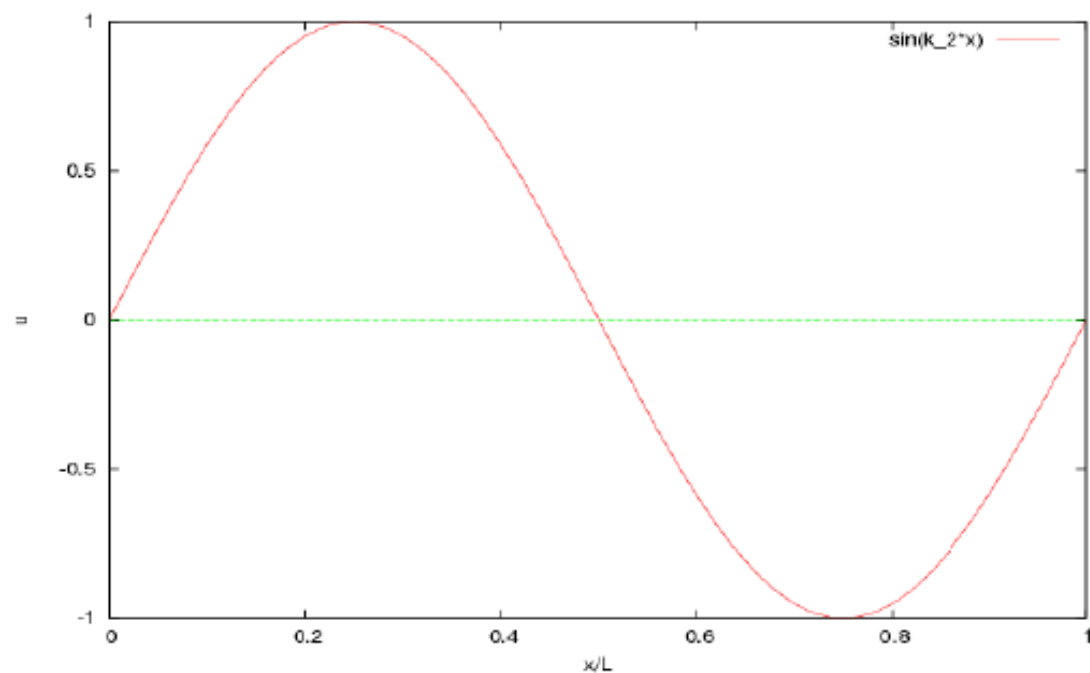
$$u(x, t) = A_0 \sin\left(\frac{\pi}{L} x\right) \cos(w_1 t)$$



y tiene 2 puntos nodales en los extremos fijos.

El caso $n = 2$ corresponde a:

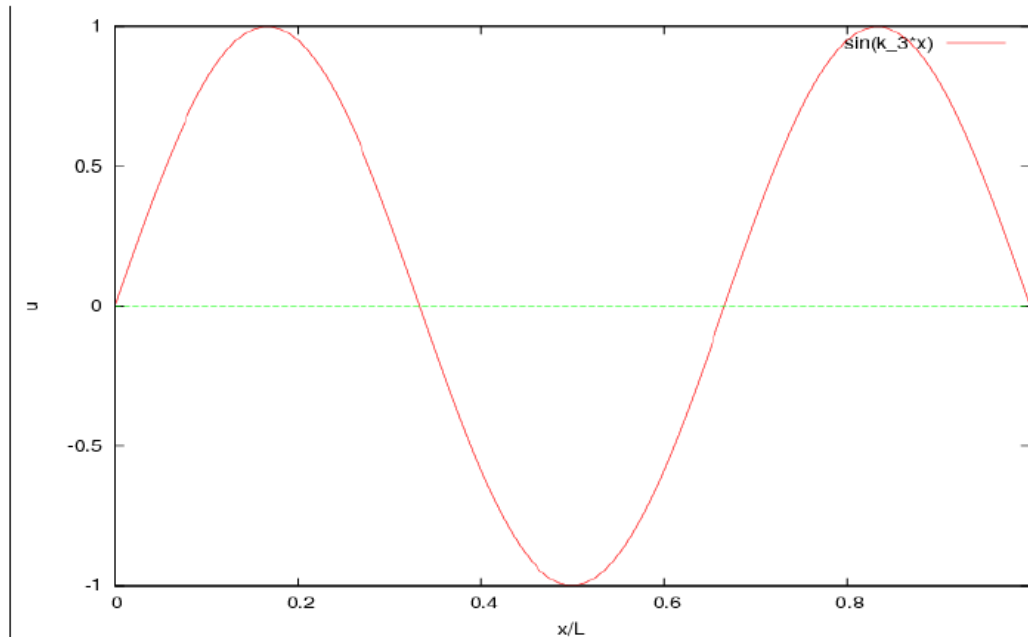
$$u(x, t) = A_0 \sin \left(\frac{2\pi}{L} x \right) \cos(w_2 t)$$



y tiene, adicionalmente, un punto nodal en el centro.

El caso $n = 3$ corresponde a:

$$u(x, t) = A_0 \sin \left(\frac{2\pi}{L} x \right) \cos(w_2 t)$$



y tiene dos puntos nodales en el centro, equiespaciados. Aquí $w_3 > w_2$.

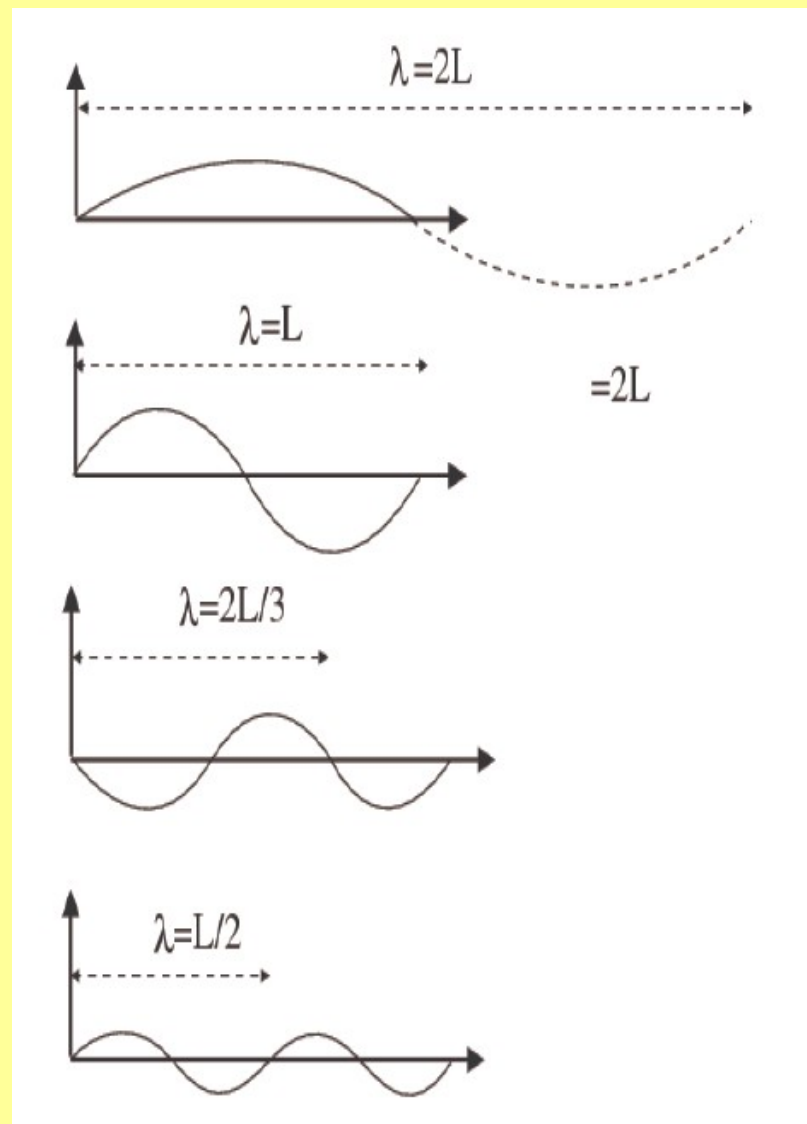
$$w_2 > w_1$$

Ahora recordamos que el número de onda k está relacionado con la longitud de onda

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}$$

- Si $n = 1$ entonces $\lambda_1 = 2\pi/k_1 = 2\pi/(\pi/L) = 2L$.
- Si $n = 2$ entonces $\lambda_2 = 2\pi/k_2 = 2\pi/(2\pi/L) = L$.
- Si $n = 3$ entonces $\lambda_3 = 2\pi/k_3 = 2\pi/(3\pi/L) = \frac{2}{3}L$.
- Si $n = 4$ entonces $\lambda_4 = 2\pi/k_4 = 2\pi/(4\pi/L) = \frac{1}{2}L$.

lo que está bosquejado en la figura siguiente para los distintos modos:



De modo que la **longitud de onda** $\lambda = 2\pi/k$ mide la longitud en que ocurre una “oscilación” espacial.

¿ y qué pasó con las soluciones tipo onda viajera?

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}$$

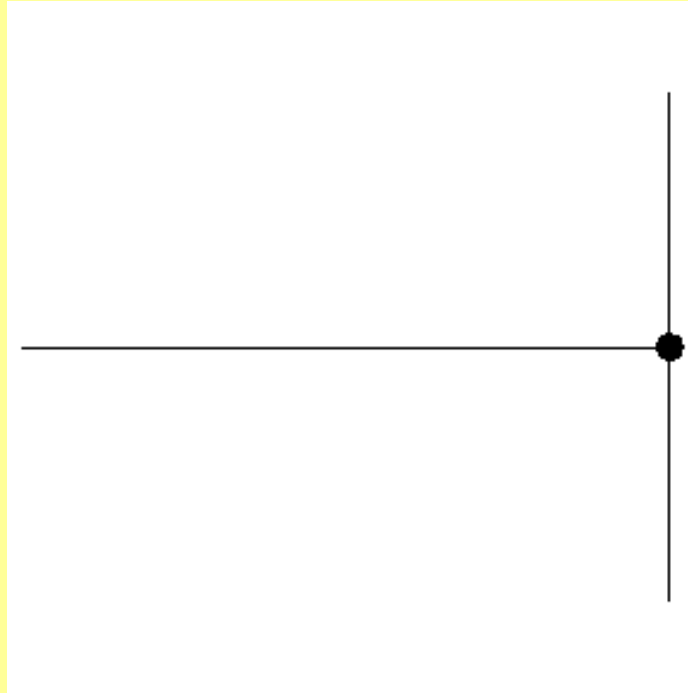
Soluciones a esta ecuación

$$u(x, t) = f(x - vt) \quad \text{Si el pulso viaja a la derecha}$$

$$u(x, t) = f(x + vt) \quad \text{Si el pulso viaja a la izquierda}$$

$$T(x, t) = f(x - vt) + g(x + vt)$$

Onda viajera y un extremo fijo



Luego podemos demostrar que si enviamos un tren de ondas armónicas viajeras hacia la derecha, finalmente obtenemos la interferencia de ondas viajeras que viajan hacia la derecha y que viajan hacia la izquierda.

Interferencia de dos trenes de ondas armónicas de igual frecuencia y amplitud que viajan en sentidos contrarios en una cuerda tensa.

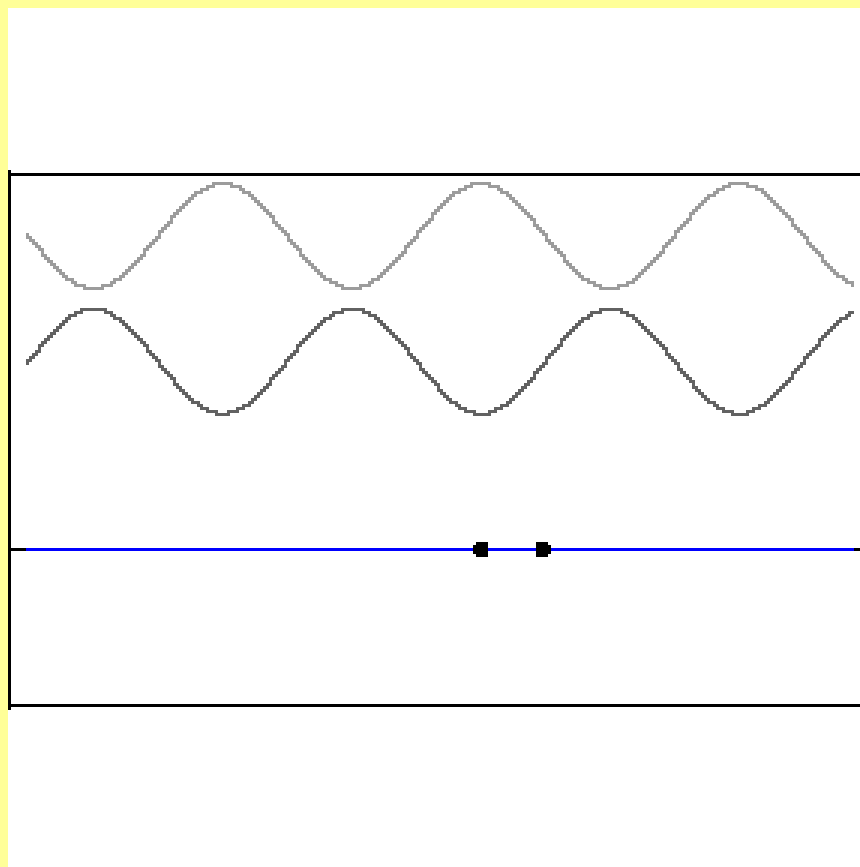
$$y_1(x, t) = y_m \text{ Sen}[kx - \omega t]$$

$$y_2(x, t) = y_m \text{ Sen}[kx + \omega t]$$

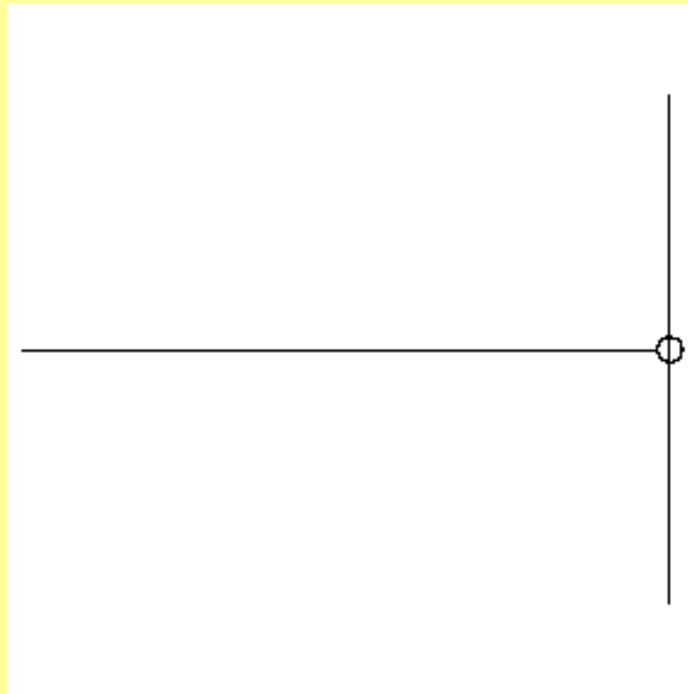
$$Y(x, t) = y_1 + y_2$$

Resultado

$$Y(x, t) = 2y_m \text{ Sen}[kx] \text{ Cos}[\omega t]$$



Cuerda de Largo L con un extremo fijo y el otro libre



Ver pizarra

Fin