

Física II, Ondas

Descripción Matemática del Movimiento Periódico No Armónico IV



Profesor: Pedro Labraña
Departamento de Física,
Universidad del Bío-Bío

Carrera: Ingeniería Civil en Informática
Créditos: 5

Descripción Matemática del Movimiento Periódico No Armónico

*El péndulo no lineal. Fasores. Descripción de un movimiento periódico no armónico mediante las Series de Fourier. **Serie de Fourier real. Serie de Fourier Compleja.** Transformada de Fourier.*

Clase anterior

Este tipo de representación se denomina **serie de Fourier** y el caso más general (para una función que no es par ni impar) es:

$$f(\theta) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\theta) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\theta)$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) d\theta$$

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \sin(m\theta) d\theta$$

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \cos(m\theta) d\theta$$

Serie de Fourier compleja

Un resultado interesante y útil es que la serie de Fourier puede reescribirse en término de expresiones complejas:

$$\begin{aligned} f(\theta) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \underbrace{\left(\frac{e^{in\theta} + e^{-in\theta}}{2} \right)}_{\cos(n\theta)} + \\ &\quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \underbrace{\left(\frac{e^{in\theta} - e^{-in\theta}}{2i} \right)}_{\sin(n\theta)} \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\underbrace{\frac{a_n - ib_n}{2}}_{c_n} e^{in\theta} + \underbrace{\frac{a_n + ib_n}{2}}_{c_n^*} e^{-in\theta} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [c_n e^{in\theta} + c_n^* e^{-in\theta}] \\
&= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{in\theta} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} c_n^* e^{-in\theta}}_{\sum_{n=-\infty}^{-1} c_{-n}^* e^{in\theta}} \\
&= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{in\theta} + \sum_{\substack{n=-1 \\ -\infty}}^{\infty} c_{-n}^* e^{in\theta} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{-1} c_{-n}^* e^{in\theta} + c_0 e^{i0\theta} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{in\theta}
\end{aligned}$$

donde en la última línea se ha renombrado $c_{-n}^* \rightarrow c_n$ y $a_0 \rightarrow c_0$.

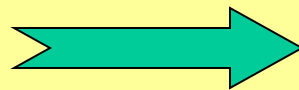
Con esto se obtiene la representación más simple:

$$f(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} c_n e^{in\theta}$$

conocida como **Serie de Fourier Compleja**:

Donde hemos definido

$$\begin{aligned} c_0 &= a_0 \\ c_n &= \frac{b_n - ia_n}{2} \\ c_n^* &= \frac{b_n + ia_n}{2} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} a_0 &= c_0 \\ a_n &= c_n + c_n^* \\ b_n &= \frac{c_n - c_n^*}{i} = i(c_n - c_n^*) \end{aligned}$$

$$f(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} c_n e^{in\theta}$$

Los coeficientes c_n se pueden obtener en forma directa usando la *relación de ortogonalidad*:

$$\int_0^{2\pi} e^{in\theta} e^{-im\theta} d\theta = \begin{cases} 2\pi & \text{si } n = m \\ 0 & \text{si } n \neq m \end{cases}$$

Tarea: demostrar esta relación
(problema 2 guía #3)

Aplicando a ambos lados de la serie e integrando se obtiene:

$$\int_0^{2\pi} f(\theta) e^{-im\theta} d\theta = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} c_n \underbrace{\int_0^{2\pi} e^{in\theta} e^{-im\theta} d\theta}_{2\pi \text{ si } n = m} = 2\pi c_m$$

De donde obtenemos que

$$c_m = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-im\theta} f(\theta) d\theta$$

Ejemplo: Considere $f(\theta) = \cos^3 \theta$, determine los coeficientes c_n de la Serie de Fourier compleja:

$$\begin{aligned}
c_n &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-im\theta} \cos^3 \theta \, d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-im\theta} \left[\frac{1}{4} (\cos(3\theta) + 3 \cos \theta) \right] d\theta \\
&= \frac{1}{8\pi} \int_0^{2\pi} e^{-im\theta} \left[\frac{e^{3i\theta} + e^{-3i\theta}}{2} + 3 \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \right) \right] d\theta \\
&= \frac{1}{8\pi} \left[\underbrace{\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} e^{3i\theta} e^{-im\theta} d\theta}_{2\pi \text{ si } m=3} + \underbrace{\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} e^{-3i\theta} e^{-im\theta} d\theta}_{2\pi \text{ si } m=-3} \right. \\
&\quad \left. + \underbrace{\frac{3}{2} \int_0^{2\pi} e^{i\theta} e^{-im\theta} d\theta}_{2\pi \text{ si } m=1} + \underbrace{\frac{3}{2} \int_0^{2\pi} e^{-i\theta} e^{-im\theta} d\theta}_{2\pi \text{ si } m=-1} \right]
\end{aligned}$$

así que tenemos: $c_{-3} = 1/8$, $c_{-1} = 3/8$, $c_3 = 1/8$ y $c_1 = 3/8$, el resto de los coeficientes es nulo.

Fin