

# Física II, Ondas

## Descripción Matemática del Movimiento Periódico No Armónico III



Profesor: Pedro Labraña  
Departamento de Física,  
Universidad del Bío-Bío

Carrera: Ingeniería Civil en Informática  
Créditos: 5

## Descripción de un movimiento periódico no armónico mediante las series de Fourier

Hemos visto que  $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ . El complejo conjugado es  $e^{-i\theta} = \cos \theta - i \sin \theta$ . A partir de esta relación es posible deducir que

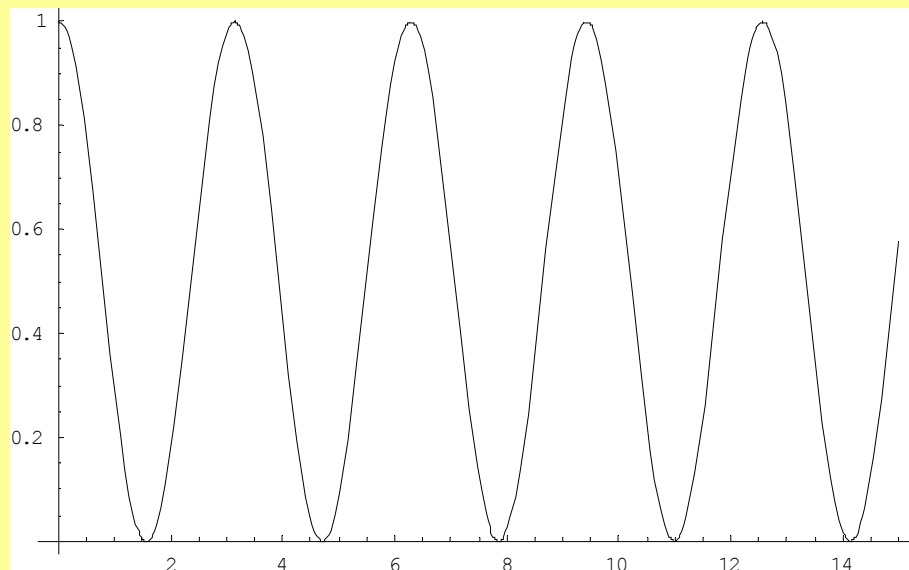
$$\cos^2 \theta = \frac{1}{2} (\cos(2\theta) + 1)$$

o que

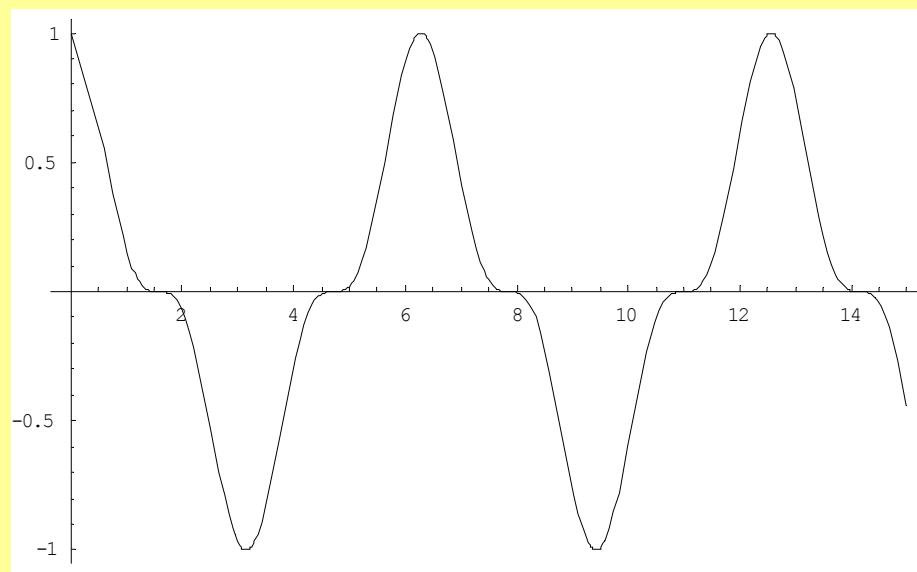
$$\cos^3 \theta = \frac{1}{4} (\cos(3\theta) + 3 \cos \theta)$$

Miremos por otro lado las graficas de estas funciones:

```
In[21]:= Plot[Cos[x]^2, {x, 0, 15}]
```



```
In[19]:= Plot[Cos[x]^3, {x, 0, 15}]
```



podemos apreciar que la forma de las funciones es “extraña” sin embargo ambas son funciones periodicas con período  $2\pi$ .

Notemos tambien que ambas funciones se pueden representar como combinación de funciones de la forma:

$$\begin{aligned} &1 \\ &\cos \theta \\ &\cos(2\theta) \\ &\cos(3\theta) \\ &\dots \end{aligned}$$

Efectivamente:

$$\begin{aligned} \cos^2 \theta &= \frac{1}{2} \times 1 + 0 \times \cos \theta + \frac{1}{2} \times \cos(2\theta) + 0 \times \cos(3\theta) + \dots \\ \cos^3 \theta &= 0 \times 1 + \frac{3}{4} \times \cos \theta + 0 \times \cos(2\theta) + 3 \times \cos(3\theta) + \dots \end{aligned}$$

o en forma abreviada, ambas pueden expresarse en la forma:

$$a_0 + a_1 \cos \theta + a_2 \cos(2\theta) + a_3 \cos(3\theta) + a_4 \cos(4\theta) + \dots$$

Existen teoremas que permiten afirmar que, en general cualquier función par periodica (ver nota<sup>1</sup>) en  $2\pi$  se puede representar por una serie infinita de la forma

$$f(\theta) = a_0 + a_1 \cos \theta + a_2 \cos(2\theta) + a_3 \cos(3\theta) + a_4 \cos(4\theta) + \dots$$

de la misma manera una función impar periodica se puede representar vía

$$f(\theta) = b_1 \sin \theta + b_2 \sin(2\theta) + b_3 \sin(3\theta) + b_4 \sin(4\theta) + \dots$$

Este tipo de representación se denomina **serie de Fourier** y el caso más general (para una función que no es par ni impar) es:

$$f(\theta) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\theta) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\theta)$$

Aquí las funciones  $\cos(nx)$  y  $\sin(nx)$  constituyen lo que se denomina una base para representar funciones periodicas

## ¿Cómo calcular los coeficientes $a_n$ y $b_n$ para una función dada?

Primero veamos algunas propiedades del cos y del sin. Se tiene:

$$\int_0^{2\pi} \cos \theta \, d\theta = \sin(2\pi) - \sin(0) = 0$$

y también:

$$\int_0^{2\pi} \cos(m\theta) \, d\theta = \left. \frac{\sin(m\theta)}{m} \right|_0^{2\pi} = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq 0 \\ 2\pi & \text{si } m = 0 \end{cases}$$

en que hemos usado que  $\sin(2\pi m) = 0$  si  $m$  es entero, pero teniendo la salvedad que  $\cos(m\theta) = 1$  si  $m = 0$ , de modo que  $\int_0^{2\pi} \cos(0\theta) \, d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi$ .

Algo similar pasa con

$$\int_0^{2\pi} \sin \theta \, d\theta = - \sin \theta \Big|_0^{2\pi} = -(\underbrace{\cos(2\pi)}_1 - \underbrace{\cos 0}_1) = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \sin(m\theta) d\theta = - \left. \frac{\cos(m\theta)}{m} \right|_0^{2\pi} = 0$$

Usando estos resultados y las identidades

$$\cos(a \pm b) = \cos(a) \cos(b) \mp \sin(a) \sin(b)$$

se puede demostrar las llamadas **relaciones de ortogonalidad**:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) \cos(nx) dx = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ \pi & \text{si } n=m \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) \sin(nx) dx = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx) \sin(nx) dx = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ \pi & \text{si } n=m \end{cases}$$

El coeficiente  $a_0$  se determina directamente integrando  $f(\theta)$  entre  $-\pi$  y  $\pi$ :

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} a_0 d\theta + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \sin(n\theta) d\theta}_0 +$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \cos(n\theta) d\theta}_0 = 2\pi a_0$$

Se obtiene:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) d\theta$$



Para determinar  $b_m$  se multiplica por  $\sin(m\theta)$  y se integra:

$$\begin{aligned}
 \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \sin(m\theta) d\theta &= \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} a_0 \sin(m\theta) d\theta}_0 + \\
 &\sum_{n=1}^{\infty} b_n \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} (\sin(n\theta) \sin(m\theta) d\theta)}_{\pi \text{ si } n \neq m} + \\
 &\sum_{n=1}^{\infty} a_n \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \cos(n\theta) \cos(m\theta) d\theta}_0 \\
 &= \pi b_m
 \end{aligned}$$

Se obtiene:

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \sin(m\theta) d\theta$$

de la misma manera se puede demostrar que:

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \cos(m\theta) d\theta$$

**Ejemplo:** Considere la función  $f(\theta) = \theta$  definida entre  $-\pi$  y  $\pi$  con periodicidad  $2\pi$ . Se tiene:

Ver pizarra

Fin