

Física II, Ondas

Descripción Matemática del Movimiento Periódico No Armónico II



Profesor: Pedro Labraña
Departamento de Física,
Universidad del Bío-Bío

Carrera: Ingeniería Civil en Informática
Créditos: 5

Clase anterior

Objetos físicos más complejos poseen más de una frecuencia natural de vibración y más de una frecuencia de resonancia (Ej. El puente de Tacoma).

Ver video

Ver página:

<http://www.phy.ntnu.edu.tw/ntnujava/index.php?topic=17>

Descripción Matemática del Movimiento Periódico No Armónico

*El péndulo no lineal. **Fasores.** Descripción de un movimiento periódico no armónico mediante las Series de Fourier. Serie de Fourier real. Serie de Fourier Compleja. Transformada de Fourier.*

Fasores

(Números complejos)

$$z = R e^{i\theta}$$

Un número complejo se puede representar como una exponencial de argumento complejo

Recordemos

Por un lado en una sección previa vimos que el movimiento circular uniforme tiene una directa relación con el movimiento oscilatorio cuando uno define

$$\begin{aligned} x &= R \cos \theta \\ y &= R \sin \theta \end{aligned}$$

Donde

$$\theta = \omega t$$

Un número complejo arbitrario lo podemos escribir de la siguiente manera

$$z = x + iy$$

en que $i = \sqrt{-1}$. Para el caso recién mencionado se tiene:

$$z = R \cos \theta + iR \sin \theta$$

← Tiene una interpretación
geométrica

(Ver el diagrama de Argand en la pizarra)

Por lo tanto un número complejo arbitrario lo puedo escribir como

$$z = R \cos \theta + iR \sin \theta$$

(Ver pizarra)

Propiedad I

Propiedades: La derivada de z respecto de θ será

$$\frac{dz}{d\theta} = \frac{dx}{d\theta} + i \frac{dy}{d\theta} = -R \sin \theta + i R \cos \theta$$

pero si usamos que $-1 = i \times i$ y extraemos un factor i podemos reescribir

$$\frac{dz}{d\theta} = i \underbrace{(R \cos \theta + i R \sin \theta)}_z = i z$$

Las sucesivas derivadas de z con respecto al argumento (fase) θ serán:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 z}{d\theta^2} &= i^2 z \\ \frac{d^3 z}{d\theta^3} &= i^3 z \\ \frac{d^4 z}{d\theta^4} &= i^4 z \\ \dots &= \dots \end{aligned}$$

es decir vale la regla general:

$$\frac{d^n z}{d\theta^n} = i^n z$$

Propiedad II

Como el modulo del número complejo Z (ver pizarra) se obtiene multiplicando el número complejo por su complejo conjugado se tiene la siguiente relación

$$||z||^2 = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 = R^2$$

Luego

$$||z|| = R$$

Por otro lado las propiedades de derivación sugieren que z se comporta o tiene las mismas propiedades de las derivadas de la siguiente función exponencial

$$z = R e^{i\theta}$$

En efecto:

- para el modulo se tiene $\|z\|^2 = z z^* = R e^{i\theta} R e^{-i\theta} = R^2 e^{i\theta-i\theta} = R^2 e^0 = R^2$ de modo que $\|z\| = R$
- y para las derivadas se cumple

$$\begin{aligned}\frac{dz}{d\theta} &= R i e^{i\theta} = i z \\ \frac{d^2 z}{d^2 \theta} &= \frac{d}{d\theta} i z = i^2 z \\ \frac{d^3 z}{d^3 \theta} &= \frac{d}{d\theta} i^2 z = i^3 z \\ \dots &= \dots\end{aligned}$$

Esto permite identificar la cantidad $e^{i\theta}$ con la cantidad $\cos \theta + i \sin \theta$

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

Notar la belleza de esta ecuación

Aplicaciones

Demostrar las siguientes identidades

1)

$$\cos[\theta] = \frac{1}{2} [e^{i\theta} + e^{-i\theta}]$$

2)

$$\sin[\theta] = \frac{1}{2i} [e^{i\theta} - e^{-i\theta}]$$

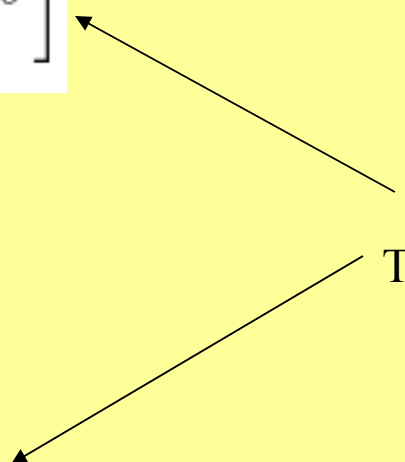
3)

$$\cos^2 \theta = \frac{1}{2} (\cos(2\theta) + 1)$$

4)

$$\cos^3 \theta = \frac{1}{4} (\cos(3\theta) + 3 \cos \theta)$$

Tarea



Ver pizarra

Fin del repaso de Fasores.

Descripción de un movimiento periódico no armónico mediante las series de Fourier

Ver apuntes del profesor D. Risso entregados en clases

Fin