



Campos Electromagnéticos

Profesor: Pedro Labraña

Ayudante: José Fonseca

1- Derivacion parcial.

a) Calcule las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$ de las funciones:

$$f(x, y, z) = kxyz$$

$$f(x, y, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}}$$

b) Calcule las derivadas parciales (coordenadas cilindricas) $\frac{\partial f}{\partial \rho}$, $\frac{\partial f}{\partial \phi}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$ de las funciones:

$$f(\rho, \phi, z) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln(\rho_0/\rho)$$

$$f(\rho, \phi, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}$$

$$f(\rho, \phi, z) = \frac{\lambda a \cos \phi}{2\pi\epsilon_0 \rho^2}$$

c) Calcule las derivadas parciales (coordenadas esfericas) $\frac{\partial f}{\partial r}$, $\frac{\partial f}{\partial \theta}$, $\frac{\partial f}{\partial \phi}$ de las funciones:

$$f(r, \phi, \theta) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}$$

$$f(r, \phi, \theta) = -E_0 \left(\frac{a^3}{r^2} - r \right) \cos \theta$$

$$f(r, \phi, \theta) = \frac{Qa}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{d^2 + r^2 - 2dr \cos \theta}}$$

2-Calculo de Gradiente.

a) Considere la distancia $u = |\vec{r} - \vec{r}_i|$. En que

\vec{r}_i es un vector fijo en el espacio

$$\vec{r}_i = x_i \hat{x} + y_i \hat{y} + z_i \hat{z}, y$$

$\vec{r} = x \hat{x} + y \hat{y} + z \hat{z}$ es el vector de posición usual (el vector variable). Calcule ∇u y muestre que este resulta.

$$\nabla u = \nabla(|\vec{r} - \vec{r}_i|) = \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$$

b) En los cálculos de a continuacion será útil el siguiente resultado

$$\nabla f = f'(u) \nabla u$$

válido para una función $f(u)$ de la distancia $u = |\vec{r} - \vec{r}_i|$ y donde para ∇u se debe usar su resultado de a).

- $\nabla \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} \right)$
- $\nabla \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} \right)$
- $\nabla \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^n} \right)$
- $\nabla \ln(|\vec{r} - \vec{r}_i|)$

3-Calcular la Divergencia y Rotor.

Encuentre la divergencia de los campos vectoriales:

a) $\vec{A} = (x^2 + xy)\hat{i} + (y^2 + zx)\hat{j} + (z^2 + xy)\hat{k}$

b) $\vec{F} = xy\hat{i} + (y^2 + e^{xz})\hat{j} + \sin(xy)\hat{k}$

c)

$$E = (x\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) + (y\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) + (z\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$$

4- Si \vec{r} es un vector que va desde el origen al punto (x, y, z) , demuestre las formulas:

a) $\vec{\nabla} \cdot \vec{r} = 3$

b) $\vec{\nabla} \times \vec{r} = 0$

c) $(\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{r} = \vec{u}$

Nota: \vec{u} es un vector arbitrario.

5- El vector unitario normal a la superficie $\phi(\vec{r}) = Cte.$ es:

$$\hat{n} = \frac{\vec{\nabla} \phi}{|\vec{\nabla} \phi|}$$

a) Encuentre \hat{n} para la esfera e interprete:

$$\phi(\vec{r}) = a(x^2 + y^2 + z^2)$$

b) Encuentre \hat{n} para el elipsoide:

$$\phi(\vec{r}) = ax^2 + by^2 + cz^2$$

6- Si B es un campo vectorial. Demuestre la identidad:

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = 0$$

7- Si r es la magnitud del vector que va desde el origen al punto (x,y,z) y $f(r)$ es una función arbitraria de r, demuestre que (puede usar los resultados de la pregunta 2):

$$\vec{\nabla} f(r) = \frac{\vec{r}}{r} \frac{df}{dr}$$

$$\vec{\nabla} f(r) \times [f(r)\vec{r}] = 0$$

8- Teorema de Green.

Usando el teorema de la divergencia demuestre la siguiente identidad:

$$\int_V (\Psi \nabla^2 \phi - \phi \nabla^2 \Psi) dV = \oint_S (\Psi \vec{\nabla} \phi - \phi \vec{\nabla} \Psi) \cdot \hat{n} ds$$

se sugiere que utilice el siguiente campo vectorial para demostrar la identidad de Green

$$\vec{F} = \psi \vec{\nabla} \phi - \phi \vec{\nabla} \psi.$$

9- En un día con buen tiempo, el campo eléctrico sobre la superficie de la tierra queda descrito adecuadamente por la siguiente expresión empírica:

$$\vec{E}(z) = -(ae^{-\alpha z} + be^{-\beta z})\hat{z},$$

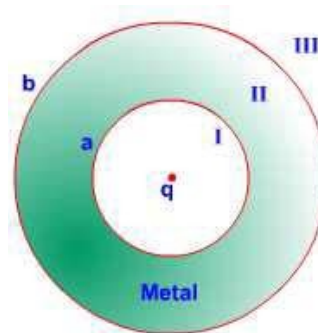
donde a, b, α, β son constantes con α y β positivos, y z denota la altura sobre la superficie de la tierra.

a) Determine la densidad de carga eléctrica en la atmósfera como función de la altura.

b) Calcule la carga total contenida en una columna vertical de sección transversal A que se extiende desde $z = 0$ hasta $z = \infty$.

10-Desarrollar los ejercicios 9 y 11 de la guía 3.

11-Una concha conductora, hueca tiene radio interior a y radio exterior b , como muestra la figura. Hallar el campo eléctrico y el potencial en las regiones I, II y III sabiendo que hay una carga q en el centro.



12-Una distribución de carga esférica tiene una densidad de carga volumétrica que es función únicamente de r , la distancia al centro de la distribución. En otras palabras, $\rho = \rho(r)$. Si

$\rho(r)$ tiene los valores dados a continuación, determine el campo eléctrico en función de r . Integre el resultado para obtener una expresión para el potencial electrostático $\phi(r)$, sujeto a la restricción de que $\phi(\infty) = 0$ y $\rho = \frac{A}{r}$, siendo A constante para $0 \leq r \leq R$; $\rho = 0$ para $r > R$.

13-Una carga Q está distribuida uniformemente en una esfera de radio a . Si se toma como el potencial en el infinito como cero, ¿calcule el potencial en $r = b < a$?

14-Halle el campo eléctrico debido a los siguientes potenciales eléctricos.

a) $\phi = \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$

b) $\phi = \frac{\sin(\theta) \cos(\phi)}{r^2}$

15-La distribución de una carga esférica está expresada por

$$\rho(r) = \begin{cases} \rho_0 \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) & r \leq a \\ 0, & r > a \end{cases}$$

(a) Halle \mathbf{E} y ϕ para $r \geq a$

(b) Halle \mathbf{E} y ϕ para $r \leq a$

16-Un disco circular de radio a tiene una carga uniforme de ρ_s . Demuestre que el potencial en un punto de su eje situado h metros alejado de su centro es:

$$\phi = \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} [(h^2 + a^2)^{1/2} - h]$$