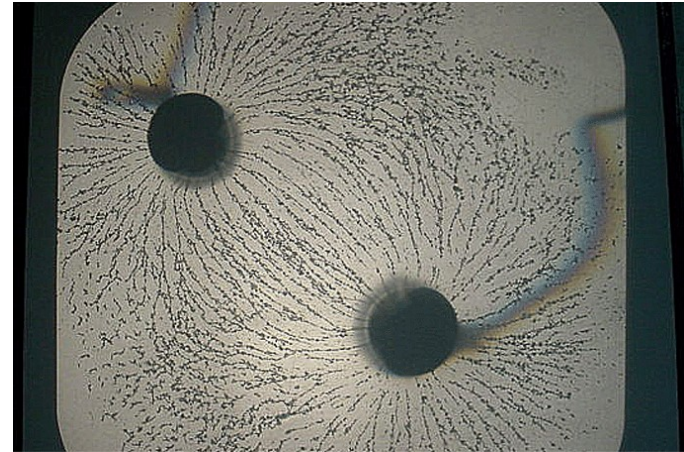
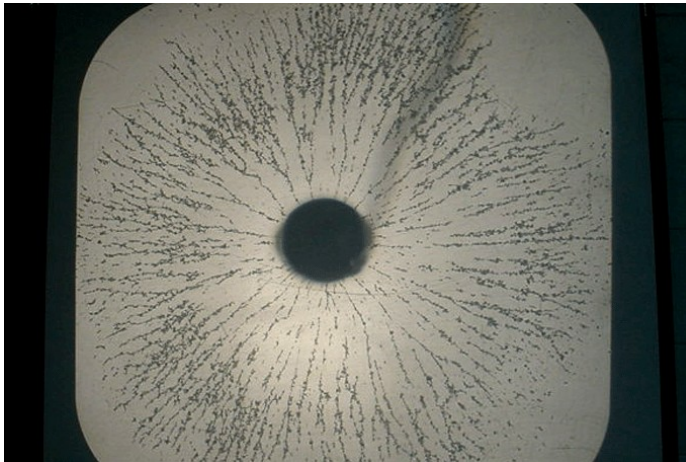


Campos Electromagnéticos

“Campo Eléctrico 3”



Profesor: Pedro Labraña
Departamento de Física,
Universidad del Bío-Bío

Carrera: Ingeniería Civil en Automatización
Créditos: 5

Campos Eléctricos

Cargas Eléctricas, Aisladores y conductores, Ley de Coulomb, Campo Eléctrico. Movimiento de partículas cargadas en campos eléctricos uniformes. Campo eléctrico de distribuciones continuas. Líneas de Campo Eléctrico.

Clase anterior: Campo Eléctrico

Campo eléctrico de una carga puntual ubicada en \vec{r}'

$$\vec{E}(\vec{r}) = K \frac{q}{||\vec{r} - \vec{r}'||^{3/2}} (\vec{r} - \vec{r}')$$

Carga puntual ubicada en el origen:

$$\vec{E}(\vec{r}) = K \frac{q}{r^2} \hat{r}$$

Notar que hemos escrito el campo eléctrico en coordenadas esféricas. ¿Como quedaría escrito en coordenadas cartesianas? (Pizarra)

Ej. 3

La figura 2.4 muestra dos cargas puntuales positivas iguales y de magnitud q , que están separadas a una distancia $2d$. Sobre el eje de las X se intenta poner un protón a distancia x .

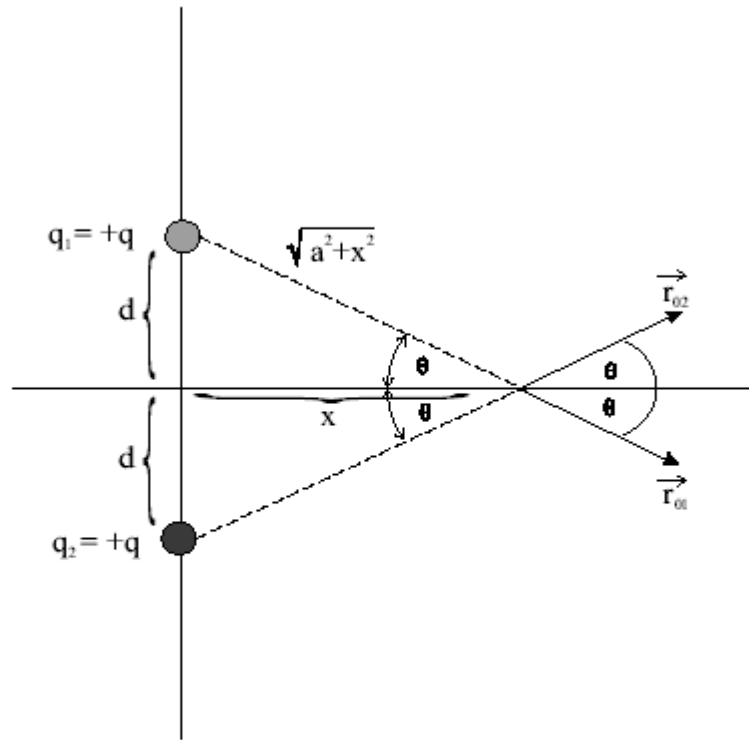


Figura 2.4: Campo eléctrico sobre un protón debido a dos cargas positivas. La figura grafica los vectores unitarios \hat{r}_{01} y \hat{r}_{02} .

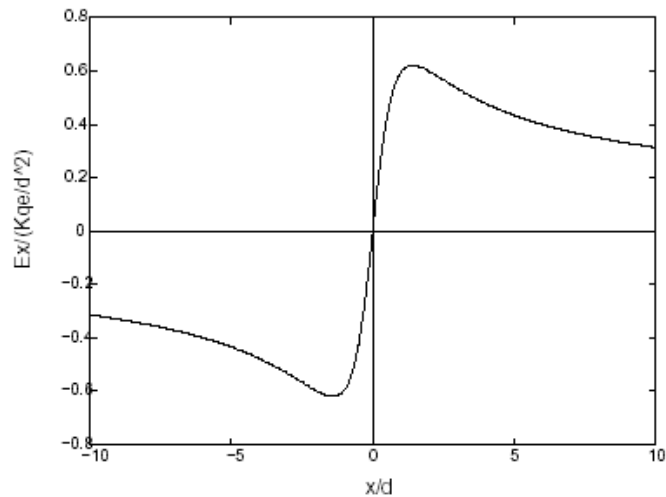
¿Cuanto vale el campo eléctrico que siente el protón? ¿Cuanto vale la fuerza que siente el protón?

Podemos solucionar el problema de dos maneras

A

Claramente los campos, provocados por cada carga q , por ser de igual magnitud, al ser sumados proyectan una componente neta exclusivamente en la dirección del eje X . El ángulo θ de proyección satisface: $\cos \theta = x / \sqrt{d^2 + x^2}$. De modo que el campo neto provocado por las dos cargas resulta (usando que $q_1 = q_2 = q$):

$$\begin{aligned}
 \vec{E}_0 &= K \frac{q_1}{d^2 + x^2} (\cos \theta \hat{x} - \sin \theta \hat{y}) \\
 &\quad + K \frac{q_2}{d^2 + x^2} (\cos \theta \hat{x} + \sin \theta \hat{y}) \\
 &= 2K \frac{q}{d^2 + x^2} \cos \theta \hat{x} \\
 &= 2K \frac{q}{d^2 + x^2} \frac{x}{\sqrt{d^2 + x^2}} \hat{x} \\
 &= 2K \frac{qx}{(d^2 + x^2)^{3/2}} \hat{x}
 \end{aligned}$$



El campo se anula si el protón está en el origen y su intensidad es máxima a una distancia de $\pm \frac{\sqrt{2}}{2}d$ del origen.

La fuerza sobre el protón se obtiene simplemente vía $\vec{F} = q_p \vec{E}$.

Gráfico del valor del campo eléctrico como función de la distancia

B

Ahora resolveremos el problema de manera diferente. Las posiciones de cada carga son

$$\begin{aligned}\vec{r}_1 &= +d\hat{y} \\ \vec{r}_2 &= -d\hat{y}\end{aligned}$$

y el protón está en $\vec{r} = x\hat{x}$. El campo se obtiene directamente evaluando:

$$\begin{aligned}\|\vec{r} - \vec{r}_1\| &= \|x\hat{x} + d\hat{y}\| = \sqrt{x^2 + d^2} \\ \|\vec{r} - \vec{r}_2\| &= \|x\hat{x} - d\hat{y}\| = \sqrt{x^2 + d^2}\end{aligned}$$

y reemplazando en

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^2 \frac{Kq_i(\vec{r} - \vec{r}_i)}{\|\vec{r} - \vec{r}_i\|^3}$$

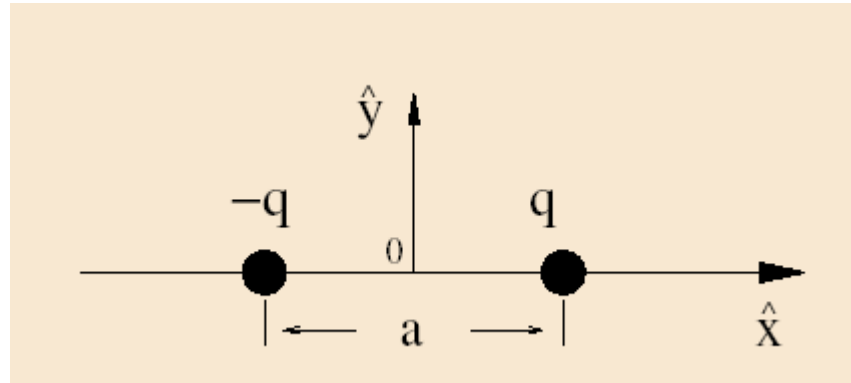
Resulta

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \frac{K(q)(x\hat{x} - d\hat{y})}{(x^2 + d^2)^{3/2}} + \frac{K(q)(x\hat{x} - (-d\hat{y}))}{(x^2 + d^2)^{3/2}} \\ &= \frac{2Kqx}{(x^2 + d^2)^{3/2}}\hat{x}\end{aligned}$$

de modo que se recupera el resultado obtenido anteriormente.

El dipolo eléctrico

Consideramos la siguiente distribución de cargas puntuales. A esta configuración se le denomina dipolo eléctrico. En este caso es un dipolo ubicado en el origen de coordenadas.



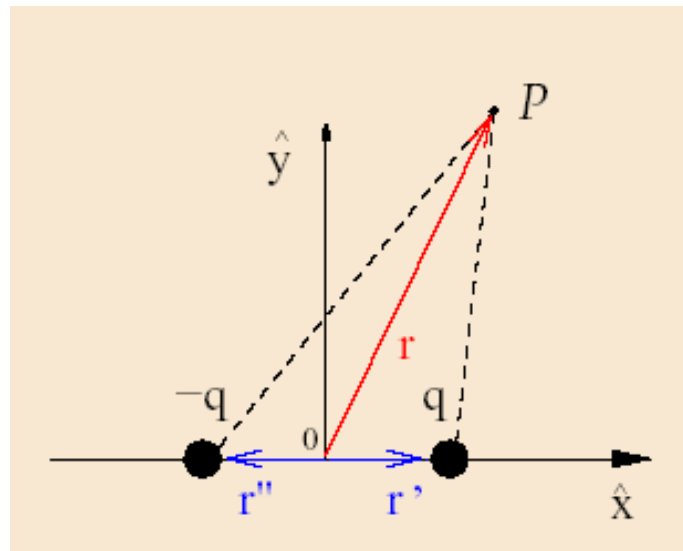
Ahora siendo más precisos

Se define el dipolo eléctrico como $\vec{p} = qa\hat{x}$. Demostrar que el campo eléctrico en el punto (x, y) muy alejado del origen es:

$$E_x = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{2x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^{5/2}}$$

$$E_y = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{3xy}{(x^2 + y^2)^{5/2}}$$

Solución



$$\text{Aquí : } \vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} \quad \vec{r}' = (a/2)\hat{x} \quad \vec{r}'' = -(a/2)\hat{x}$$

El campo eléctrico de un dipolo está dado por:

$$\vec{E} = kq \left[\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} - \frac{\vec{r} - \vec{r}''}{|\vec{r} - \vec{r}''|^3} \right]$$

Recordar que estamos considerando puntos (x,y) muy alejados del origen

Por lo tanto, como $a^2 \ll x^2, y^2$

$$\vec{r} - \vec{r}' = (x - a/2)\hat{i} + y\hat{j}$$

$$|\vec{r} - \vec{r}'|^2 = x^2 + y^2 - ax + a^2/4 \simeq x^2 + y^2 - ax$$

$$\vec{r} - \vec{r}'' = (x + a/2)\hat{i} + y\hat{j}$$

$$|\vec{r} - \vec{r}''|^2 = x^2 + y^2 + ax + a^2/4 \simeq x^2 + y^2 + ax$$

Luego,

$$\frac{1}{kq} E_x = \frac{x - a/2}{(x^2 + y^2 - ax)^{3/2}} - \frac{x + a/2}{(x^2 + y^2 + ax)^{3/2}}$$

Pero como $a \ll r$, entonces $ax \ll x^2 + y^2$ y podemos escribir:

$$(x^2 + y^2 - ax)^{-3/2} = (x^2 + y^2)^{-3/2} \left[1 - ax/(x^2 + y^2) \right]^{-3/2}$$

$$\begin{aligned}
 (x^2 + y^2 - ax)^{-3/2} &= (x^2 + y^2)^{-3/2} \left[1 - ax/(x^2 + y^2) \right]^{-3/2} \\
 &\simeq (x^2 + y^2)^{-3/2} \left[1 + \frac{3}{2} ax/(x^2 + y^2) \right]
 \end{aligned}$$

donde usamos $(1 + \delta)^n \simeq (1 + n\delta)$, para $\delta \ll 1$

Similarmente podemos escribir:

$$\begin{aligned}
 (x^2 + y^2 + ax)^{-3/2} &= (x^2 + y^2)^{-3/2} \left[1 + ax/(x^2 + y^2) \right]^{-3/2} \\
 &\simeq (x^2 + y^2)^{-3/2} \left[1 - \frac{3}{2} ax/(x^2 + y^2) \right]
 \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} E_x &= kq \left\{ \frac{x - a/2}{(x^2 + y^2 - ax)^{3/2}} - \frac{x + a/2}{(x^2 + y^2 + ax)^{3/2}} \right\} \\ &= kq(x^2 + y^2)^{-3/2} \left\{ (x - a/2) \left[1 + \frac{3}{2} ax / (x^2 + y^2) \right] \right. \\ &\quad \left. - (x + a/2) \left[1 - \frac{3}{2} ax / (x^2 + y^2) \right] \right\} \\ &= \frac{kqa(2x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^{5/2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p(2x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^{5/2}} \end{aligned}$$

La componente y la podemos escribir como

$$\begin{aligned} E_y &= kq \left\{ \frac{y}{(x^2 + y^2 - ax)^{3/2}} - \frac{y}{(x^2 + y^2 + ax)^{3/2}} \right\} \\ &= kqy(x^2 + y^2)^{-3/2} \left\{ \left[1 + \frac{3}{2} ax / (x^2 + y^2) \right] \right. \\ &\quad \left. - \left[1 - \frac{3}{2} ax / (x^2 + y^2) \right] \right\} \\ &= \frac{3kqaxy}{(x^2 + y^2)^{5/2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3pxy}{(x^2 + y^2)^{5/2}} \end{aligned}$$

Por lo tanto hemos demostrado que las componentes del campo eléctrico lejos del origen son

$$E_x = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{2x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^{5/2}}$$

$$E_y = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{3xy}{(x^2 + y^2)^{5/2}}$$

Líneas de campo de algunos de los ejemplos vistos

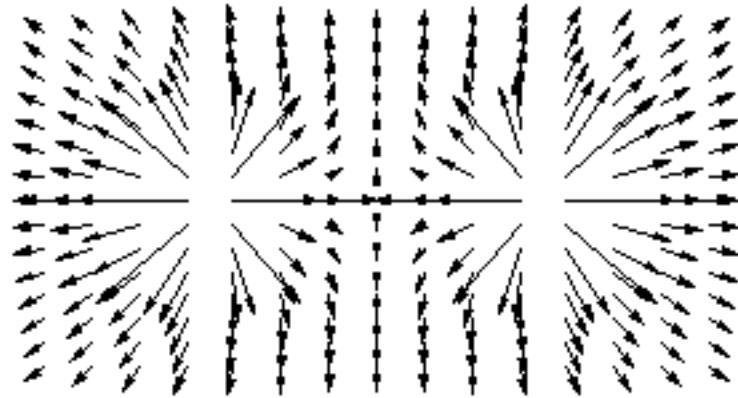
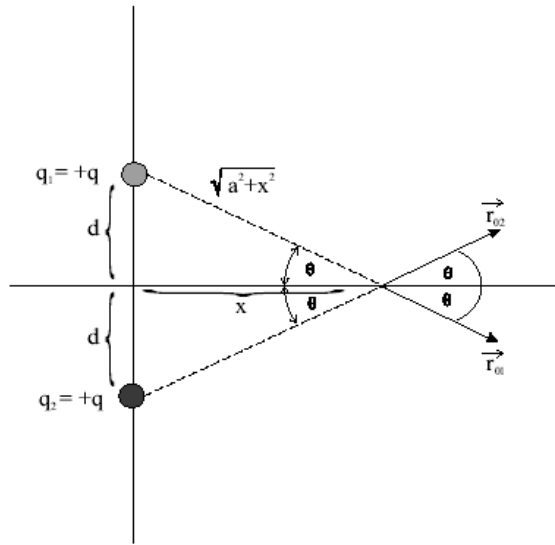
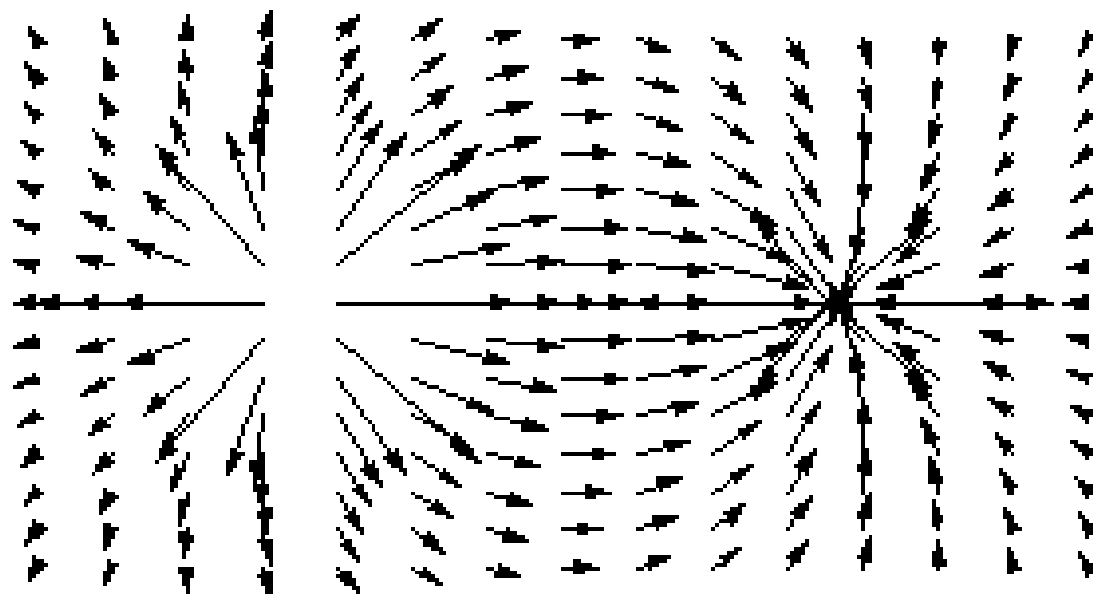
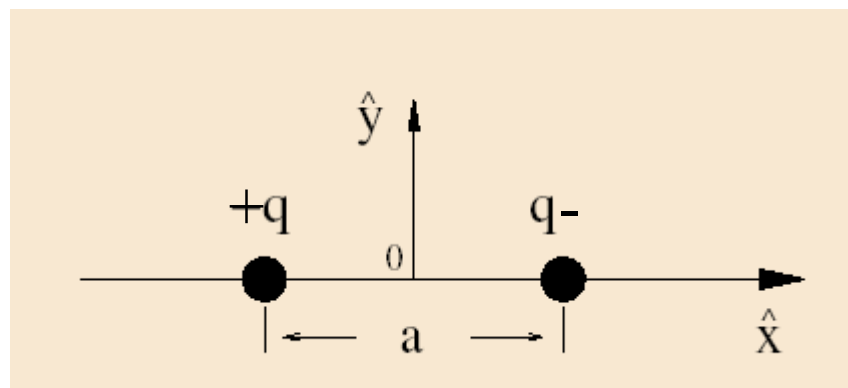
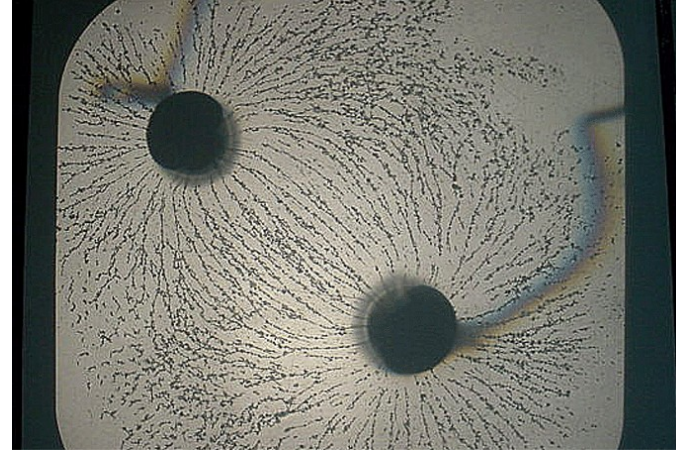
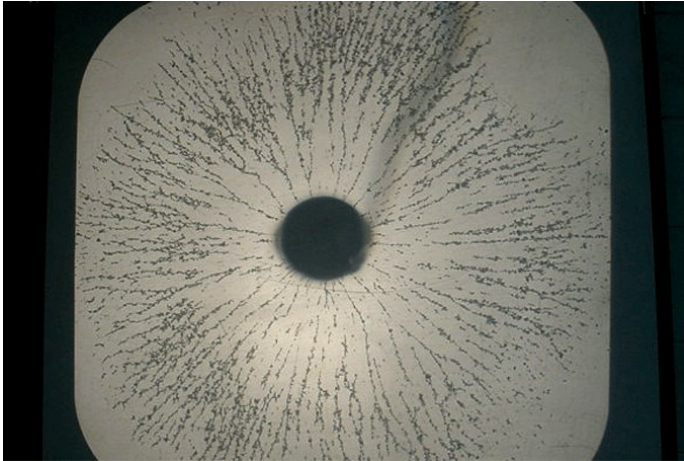


Figura 2.4: Campo eléctrico sobre un protón debido a dos cargas positivas. La figura grafica los vectores unitarios \hat{r}_{01} y \hat{r}_{02} .



<http://ephysics.physics.ucla.edu/MIT/mappingfields/HTML/mappingfields.htm>



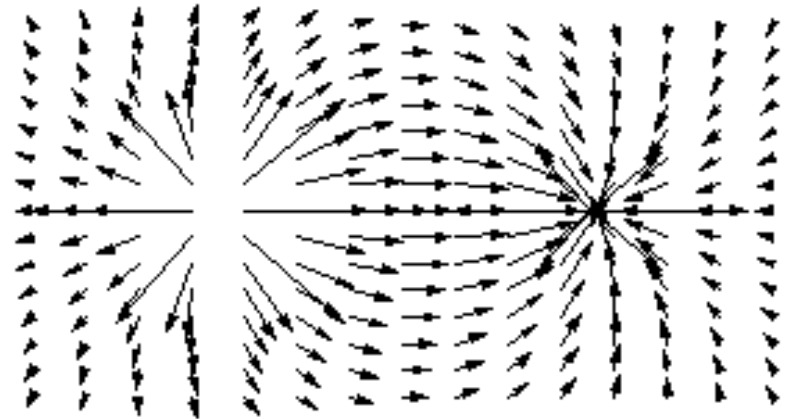
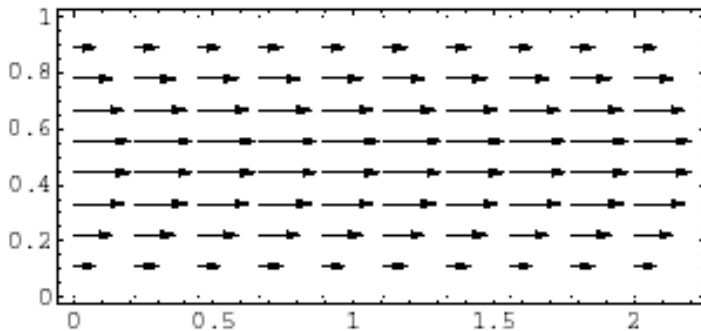
Por medio del uso de aceite, semillas de grama y empleando un pequeño electrodo cilíndrico que se carga con el generador de Wimshurt, se obtienen las líneas de campo para una carga puntual.

Movimiento de partículas cargadas en campo eléctricos uniformes

Si conocemos el valor del campo eléctrico para todo punto del espacio $\vec{E}(\vec{r})$. Entonces la fuerza que siente una carga q ubicada en \vec{r} está dada por la siguiente expresión:

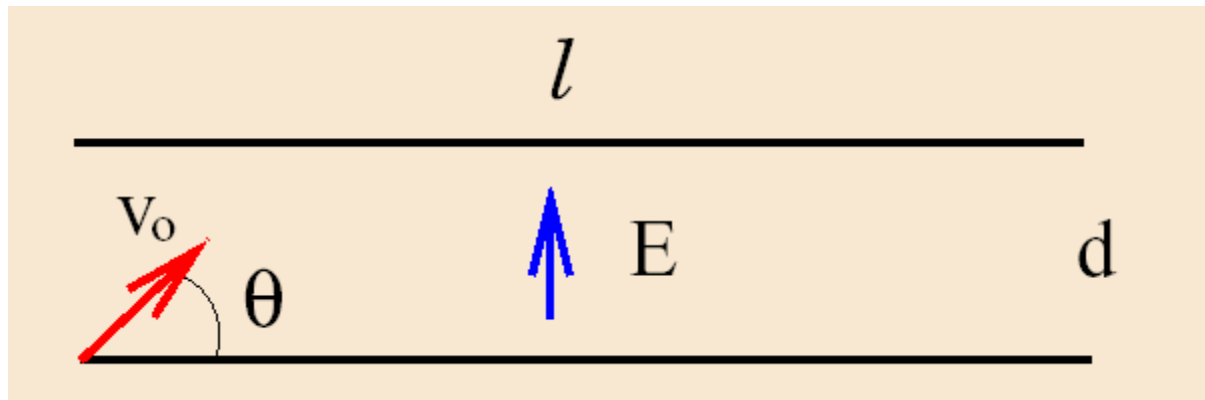
$$\vec{F}(\vec{r}) = q\vec{E}(\vec{r})$$

¿Para una carga $q > 0$, en qué dirección apunta la fuerza en los siguientes ejemplos de campo eléctrico?



Trayectoria de electrón en campo eléctrico

Entre dos placas de longitud $l = 10\text{ cm}$ y separación $d = 2\text{ cm}$, existe un campo eléctrico uniforme perpendicular a las placas. Un electrón parte de un extremo de la placa inferior con una velocidad $v_o = 6 \times 10^6\text{ m/s}$, haciendo un ángulo $\theta = 45^\circ$ con la placa. ¿Choca el electrón con placa superior? y si es así ¿donde choca?



Fin