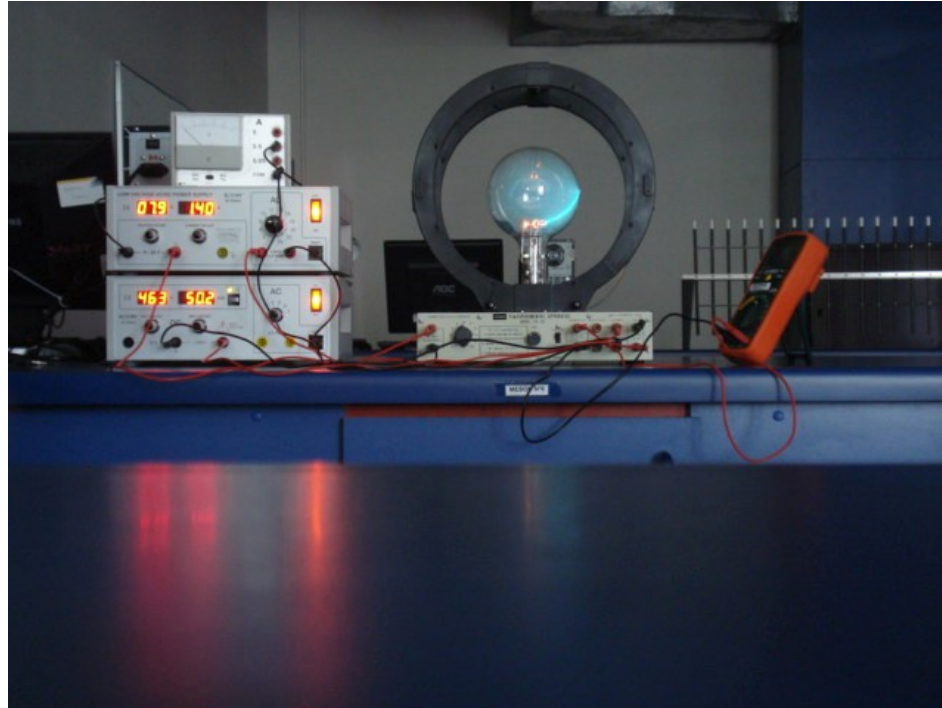


# Campos Electromagnéticos

## “Repaso de Cálculo Vectorial”



Profesor: Pedro Labraña  
Departamento de Física,  
Universidad del Bío-Bío

Carrera: Ingeniería Civil en Automatización  
Créditos: 5

## Clase anterior

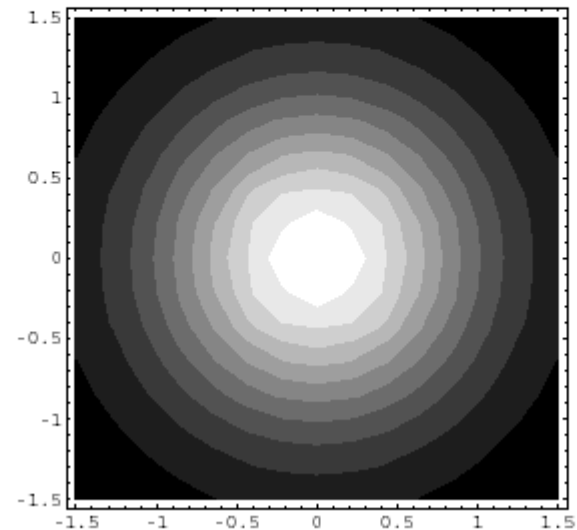
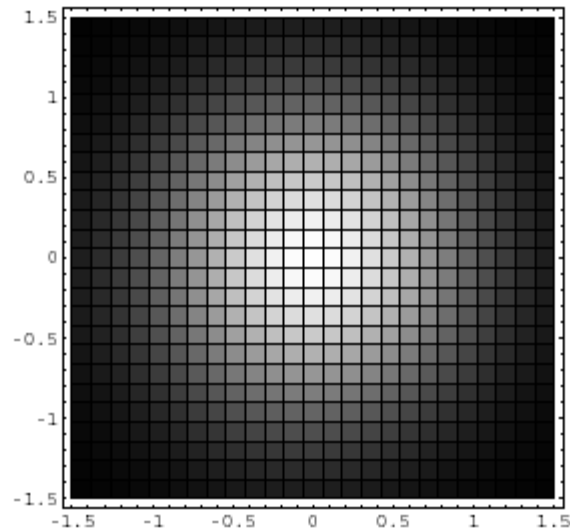
*Campo escalares: (A cada punto del espacio le asigna un número)*

Ej. El campo de temperatura en torno a un cable caliente recto, ubicado a lo largo del eje  $z$  y sometido a temperatura  $T_0$ , calienta el espacio en torno de él.

$$T(\vec{r}) = T_0 e^{-\rho^2/L^2} = T_0 e^{-\frac{x^2+y^2}{L^2}}$$

La longitud  $L$  es una función del tiempo que mide la distancia característica que ha alcanzado a calentar el cable en torno de él. Un gráfico de la distribución de temperatura en torno al cable corresponde a la siguiente figura, para el caso  $L = 1$ :

La figura siguiente corresponde a un las curvas de iso-temperatura (misma temperatura) en coordenadas cilíndricas:



## Campo vectoriales: A cada punto del espacio le asigna un vector

Ej.

Un ejemplo familiar de campo vectorial es el campo de velocidades de un fluido. La figura de a continuación muestra el caso del llamado *flujo de Poiseuille*, o flujo en un canal de sección uniforme:

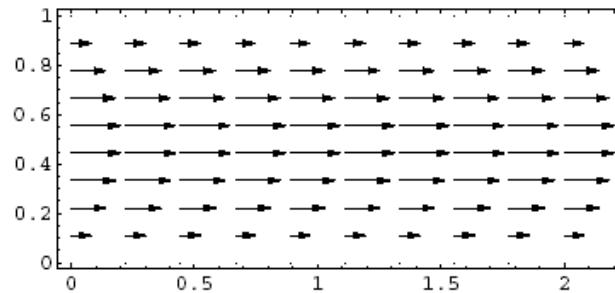


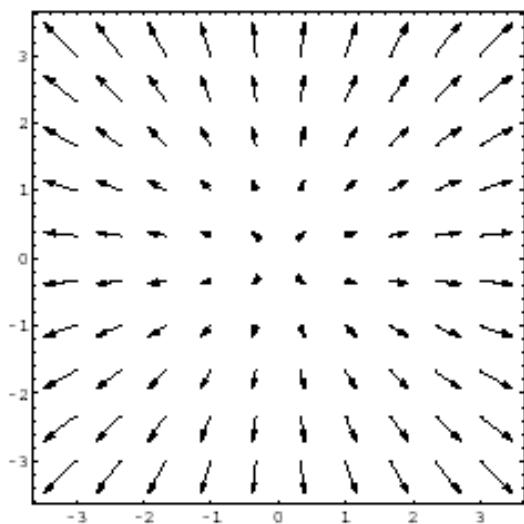
Figura 1.12: Representación gráfica del campo vectorial asociado al flujo de Poiseuille (flujo a lo largo de un canal).

Este flujo está descrito por la expresión

$$\vec{f} = 4 \frac{v_0}{L^2} y(y-L) \hat{x}$$

en que  $v_0$  es la rapidez del fluido al centro del canal y  $L$  la separación entre las paredes del canal. En este caso las paredes del canal corresponden a los bordes superior e inferior del dibujo.

Ej.



“Una fuente”

$$\vec{f}(\vec{r}) = \vec{r} = \rho \hat{\rho} = x\hat{x} + y\hat{y}$$

Un vórtice:  $\vec{f} = \hat{z} \wedge \vec{r} = -y\hat{x} + x\hat{y}$

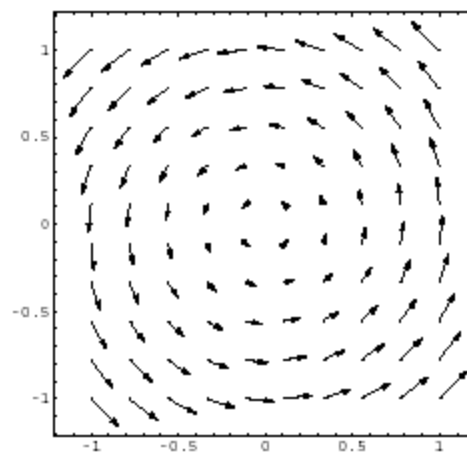
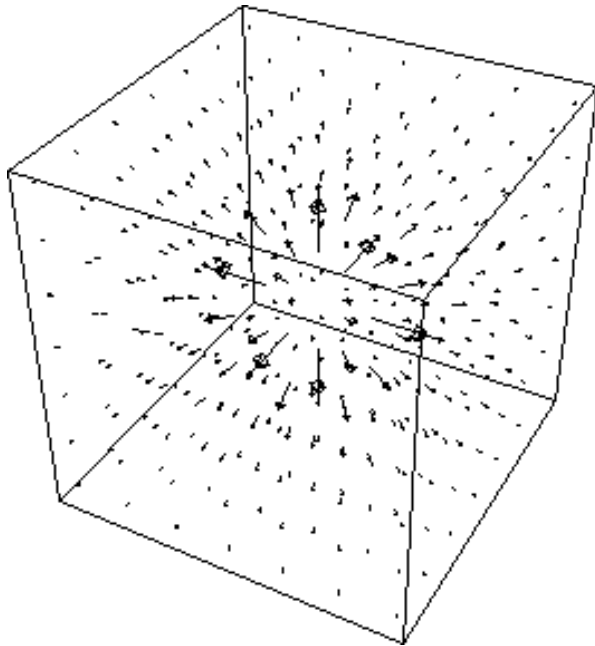


Figura 1.15: Representación gráfica del campo vectorial correspondiente a un vórtice de fluido

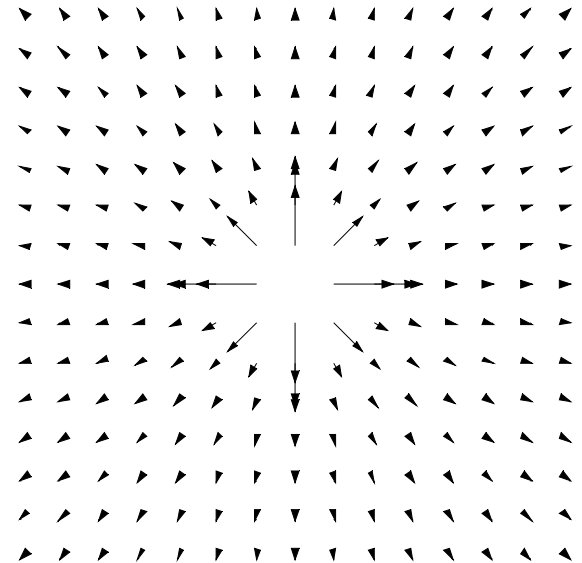
...y un viejo conocido

El campo eléctrico es un campo vectorial

El campo eléctrico de una carga puntual  
ubicada en el origen



Proyección en 2D al plano (x,y)



## Derivadas parciales de campos escalares

**Cartesianas:** Entendemos por derivada parcial, en el punto  $(x,y,z)$ , respecto a la variable  $x$  de una función escalar  $f(x,y,z)$  a:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\Delta x}.$$

Del mismo modo la derivación parcial respecto de la variable  $y$  sería:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y, z) - f(x, y, z)}{\Delta y}.$$

Sigue en forma natural una relación similar para la derivación respecto de la variable  $z$ .

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(x, y, z + \Delta z) - f(x, y, z)}{\Delta z}.$$

**Cilíndricas:** La derivación respecto de la variable  $\rho$  (coordenadas cilíndricas) de una función escalar  $f(\rho, \phi, z)$  está definida como:

$$\frac{\partial f}{\partial \rho} = \lim_{\Delta \rho \rightarrow 0} \frac{f(\rho + \Delta \rho, \phi, z) - f(\rho, \phi, z)}{\Delta \rho}.$$

Del mismo modo la derivación parcial respecto de la variable  $\phi$  sería:

$$\frac{\partial f}{\partial \phi} = \lim_{\Delta \phi \rightarrow 0} \frac{f(\rho, \phi + \Delta \phi, z) - f(\rho, \phi, z)}{\Delta \phi}.$$

La derivación respecto de la variable  $z$  no cambia respecto de la definición en cartesianas.

**Esféricas:** La derivación respecto de la variable  $r$  (coordenadas esféricas) de una función escalar  $f(r, \theta, \phi)$  está definida como:

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{f(r + \Delta r, \theta, \phi) - f(r, \theta, \phi)}{\Delta r}.$$

Del mismo modo la derivación parcial respecto de la variable  $\theta$  sería:

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = \lim_{\Delta \theta \rightarrow 0} \frac{f(r, \theta + \Delta \theta, \phi) - f(r, \theta, \phi)}{\Delta \theta}.$$

La derivación respecto de la variable  $\phi$  toma la misma forma que en cilíndricas:

$$\frac{\partial f}{\partial \phi} = \lim_{\Delta \phi \rightarrow 0} \frac{f(r, \theta, \phi + \Delta \phi) - f(r, \theta, \phi)}{\Delta \phi}.$$

Ej.en cartesianas, ver pizarra.

Notar que las derivadas parciales conmutan (ver pizarra)

## Derivadas parciales de campos vectoriales

La derivada parcial respecto de una variable  $x$  de una función vectorial  $\vec{f} = f_x(x,y,z)\hat{x} + f_y(x,y,z)\hat{y} + f_z(x,y,z)\hat{z}$  es:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\vec{f} &= \frac{\partial}{\partial x}(f_x\hat{x} + f_y\hat{y} + f_z\hat{z}) \\ &= \frac{\partial}{\partial x}(f_x\hat{x}) + \frac{\partial}{\partial x}(f_y\hat{y}) + \frac{\partial}{\partial x}(f_z\hat{z}) \\ &= \frac{\partial f_x}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial f_y}{\partial x}\hat{y} + \frac{\partial f_z}{\partial x}\hat{z}\end{aligned}$$

Idem si se deriva  $\vec{f}$  respecto de  $y$ :

$$\frac{\partial}{\partial y}\vec{f} = \frac{\partial f_x}{\partial y}\hat{x} + \frac{\partial f_y}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial f_z}{\partial y}\hat{z}.$$

Notar que al hacer estas derivadas los vectores unitarios se consideraron como constantes.



## Como recordarán del Test 1

Hay que tener un cierto cuidado cuando se hace derivada de este tipo para otros sistemas de coordenadas, por ejemplo al derivar el vector  $\vec{r}$  respecto de la variable  $\phi$  en coordenadas cilíndricas:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} &= \frac{\partial}{\partial \phi}(\rho \hat{\rho} + z\hat{z}) \\ &= \frac{\partial}{\partial \phi}(\rho \hat{\rho}) + \frac{\partial}{\partial \phi}(z\hat{z}) \\ &= \left(\frac{\partial \rho}{\partial \phi} \hat{\rho} + \rho \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial \phi}\right) + \frac{\partial}{\partial \phi}(z\hat{z}) \\ &= (0 \hat{\rho} + \rho \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial \phi}) + 0 \hat{z}\end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned}\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial \phi} &= \frac{\partial}{\partial \phi}(\cos \phi \hat{x}) + \frac{\partial}{\partial \phi}(\sin \phi \hat{y}) \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial \phi} \cos \phi\right) \hat{x} + \left(\frac{\partial}{\partial \phi} \sin \phi\right) \hat{y} \\ &= -\sin \phi \hat{x} + \cos \phi \hat{y} \\ &= \hat{\phi}\end{aligned}$$

Finalmente obtenemos

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} = \rho \hat{\phi}.$$

## Diferencial y gradiente de un campo escalar

El diferencial de un campo escalar se define como la diferencia de valor de la función entre dos puntos separados infinitesimalmente en  $d\vec{r}$ :

$$df = f(\vec{r} + d\vec{r}) - f(\vec{r})$$

Ver pizarra

**Coordenadas cartesianas.** En el caso de una sólo variable (por ejemplo  $x$ ) el diferencial es simplemente  $df = \frac{df}{dx} dx$ , sin embargo cuando hay más de una variable se debe derivar con respecto a cada una de ellas. El diferencial de un campo escalar en coordenadas cartesianas es:

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz \\ &= \left( \frac{\partial f}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{z} \right) \cdot (dx \hat{x} + dy \hat{y} + dz \hat{z}) \\ &= \nabla f \cdot d\vec{r} \end{aligned}$$

En que hemos introducido la siguiente notación vectorial

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{z}$$

**Coordenadas cilíndricas** De la misma manera se puede proceder en el caso de coordenadas cilíndricas. El diferencial de un campo escalar es:

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial f}{\partial \phi} d\phi + \frac{\partial f}{\partial z} dz \\ &= \frac{\partial f}{\partial \rho} d\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \phi} (\rho d\phi) + \frac{\partial f}{\partial z} dz \\ &= \left( \frac{\partial f}{\partial \rho} \hat{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \phi} \hat{\phi} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{z} \right) \cdot (d\rho \hat{\rho} + \rho d\phi \hat{\phi} + dz \hat{z}) \\ &= \nabla f \cdot d\vec{r} \end{aligned}$$

En que luego de identificar el diferencial de camino en coordenadas cilíndricas hemos introducido la siguiente notación vectorial:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial \rho} \hat{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \phi} \hat{\phi} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{z}$$

**Coordenadas esféricas** Para el caso de coordenadas esféricas se tiene:

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial r} dr + \frac{\partial f}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial f}{\partial \phi} d\phi \\ &= \frac{\partial f}{\partial r} dr + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} (r d\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} (r \sin \theta d\phi) \\ &= \left( \frac{\partial f}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \hat{\phi} \right) \cdot \\ &\quad (dr \hat{r} + r d\theta \hat{\theta} + r \sin \theta d\phi \hat{\phi}) \\ &= \nabla f \cdot d\vec{r} \end{aligned}$$

En que luego de identificar el diferencial de camino en coordenadas esféricas hemos introducido la siguiente notación vectorial:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \hat{\phi}$$

## Operador gradiente

Con el objeto de resumir conviene introducir un nuevo operador vectorial que se construye con las derivadas parciales. Este es el operador gradiente o nabla:

$$\nabla = \begin{cases} \hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} & (\text{cartesianas}) \\ \hat{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \hat{\phi} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} & (\text{cilndricas}) \\ \hat{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\hat{\theta}}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\hat{\phi}}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} & (\text{esfricas}) \end{cases}$$

Ver pizarra

con esto el diferencial  $df$  queda:

$$df = \nabla f \cdot d\vec{r}$$

Notemos que  $\nabla f$  es un vector.

El operador gradiente toma a un campo escalar y lo transforma en una campo vectorial

**Significado del operador  $\nabla$  o gradiente aplicado a un campo escalar** El operador gradiente o  $\nabla$  recién introducido, cuando es aplicado a un campo escalar, permite obtener un vector que apunta (localmente, es decir en cada posición  $\vec{r}$ ) en la dirección que crece más rápidamente el campo escalar.

Fin