Consideremos la siguiente matriz diagonalizada:

$$A = \begin{bmatrix} 3.75 & 0 & 0 \\ 0 & 2.24 & 0 \\ 0 & 0 & 1.38 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{Observable}} \text{Energía}$$

Consideremos: $\vec{X} = (1, 2, 3)$

Calcule: $\vec{X} \cdot \vec{X}^T =< X|X >$

Calcule: $< X|A|X >=$

Interptrete su resultado

# Ecuación propia de los eigenvalores

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x}$$

$$det|A - \lambda I| = 0$$

Ej: $$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# Eigenvectores

Utilicemos: $\lambda = -1$

$$R\vec{x} = -\vec{x} \Rightarrow R\vec{x} + \vec{x} = 0$$

Utilizando un vector columna general: $\vec{x} = (a, b, c)$

Sistema de ecuaciones:

$$a + b = 0$$
$$a + b = 0$$
$$2c = 0$$

$$a = 1, b = -1, c = 0$$

Sin embargo no es unitario:

Normalizar $\mathbf{x}_1 = \left[ \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right]$

......

# Observables compatibles e incompatibles

$$
\begin{aligned}
\mathrm{AB} &= \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a_1 b_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 b_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 b_3 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} b_1 a_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 a_2 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 a_3 \end{bmatrix} = \mathrm{BA}
\end{aligned}
$$

$$[A, B] =$$

Conmutación implica compatibilidad

Observables incompatibles: $[Q, P] \neq 0$

$$[Q, P] = i\hbar I$$

En estricto rigor la no conmutación es por ejes:

$$[Q_i, P_i] = i\hbar I$$

Delta de Kronecker

$$[Q_i, P_j] = \delta_{ij} i\hbar I$$

# Relaciones canónicas de conmutación

$$[Q_i, Q_j] = 0$$

$$[P_i, P_j] = 0$$

$$[Q_i, P_j] = \delta_{ij} i\hbar I$$

¿Qué expresan las cantidades anteriores?

Determine si las siguientes matrices representan observables compatibles:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -i \\ 0 & 1 & 0 \\ i & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2i \\ 0 & 7 & 0 \\ -2i & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

# Probabilidades

Si en un evento puede ocurrir de n maneras diferentes entre un total de N maneras posibles, la probabilidad p que ocurra ese evento es:

$$p = \frac{n}{N} < 1$$

Suma de todas las probabilidades es una certeza.

$$\sum_{i=1}^{N} p_i = 1$$

# Elementos de estadítica aplicada a matrices

Promedio aritmético
o media aritmética:

$$< A >= \frac{\sum_{i=1}^{N} \lambda_i}{N}$$

Obtener <A> para la siguiente matriz, suponiendo que cada elemento tiene la misma probabilidad de obtenerse.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 10 & & & & \\ & 8 & & \mathbf{0} & \\ & & 5 & & \\ & \mathbf{0} & & 4 & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

Esperanza matemáica de una matriz:

$$< A >= \sum_{i=1}^{N} \lambda_i p_i$$

Media cuadrática de una matriz:

$$< A^2 >= \sum_{i=1}^{N} \lambda_i^2 p_i$$

Relación Importante:

$$< (A- < A > I)^2 >=< A^2 > - < A >^2$$

Es posible demostrar que:

$$\langle \mathbf{K}^2 \rangle \langle \mathbf{L}^2 \rangle \geq \left| \frac{1}{2} \langle \mathbf{KL} - \mathbf{LK} \rangle \right|^2$$

Siendo K y L dos observables.

Si hacemos la siguiente sustitución:

$$\mathbf{K} = \mathbf{A} - \langle \mathbf{A} \rangle \mathbf{I}$$

$$\mathbf{L} = \mathbf{B} - \langle \mathbf{B} \rangle \mathbf{I}$$

Obtenemos: $$\langle(\mathbf{A}-\langle\mathbf{A}\rangle\mathbf{I})^2\rangle\langle(\mathbf{B}-\langle\mathbf{B}\rangle\mathbf{I})^2\rangle$$
$$\geq\left|\frac{1}{2}\langle\mathbf{AB}-\mathbf{BA}\rangle\right|^2$$

Si A es la matriz Posición **P** y B es la matriz Momentum **M.**

$$\langle(Q-<Q>I)^2\rangle\langle(P-<P>I)^2\rangle\geq|\frac{1}{2}(QP-PQ)|^2$$

$$\downarrow$$

$$[Q,P]=i\hbar I$$

$$\langle(Q-<Q>I)^2\rangle\langle(P-<P>I)^2\rangle\geq\left(\frac{\hbar}{2}\right)^2$$

Tomando la raiz cuadrada a ambos lados:

$$\sqrt{\langle(Q-<Q>I)^2\rangle\,\langle(P-<P>I)^2\rangle} \geq \left(\frac{\hbar}{2}\right)$$

Y haciendo que

$$\Delta Q = \sqrt{<(Q-<Q>I)^2} \quad (\Delta x)$$

$$\Delta P = \sqrt{<(P-<P>I)^2}$$

Se tiene que:

$$\boxed{\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}}$$

# Ejercicios:

*1.- Suponiendo que la componente en la coordenada **x** de la velocidad con que se desplaza una masa de **0.5 g** se puede medir con una exactitud de **±10⁻⁴ m/s**, determínese el límite de exactitud con la cual se pueda localizar la partícula a lo largo del eje **x**.*

*2.- Repítase el cálculo cuando el cuerpo en movimiento es un electrón.*

## Observar que:

$$\Delta v_x = \left(+10^{-4} - \left(-10^{-4}\right)\right) [m/s] \quad ?$$

*3.- Calcúlese la incertidumbre en la medición de la posición de un fotón con una longitud de onda de* ***2500 Angstroms*** *si dicha longitud de onda se conoce con una precisión de* ***una parte en un millón***.

Del problema: $\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = 10^{-6}$

Pero: $p = \frac{p}{\lambda} \Rightarrow dp = ?$

*4.- Suponiendo que en cierto experimento se puede medir el momentum de una partícula con una exactitud de* ***una parte en cada mil****, encuéntrese la mínima incertidumbre en la posición de la partícula si se trata de un electrón que se está moviendo a una velocidad de* ***$2\times 10^8$ m/s****.*

$$0.511 \left[\frac{MeV}{c^2}\right] \rightarrow 9.11 \cdot 10^{-31} [kg]$$

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

¿La masa no es un escalar?