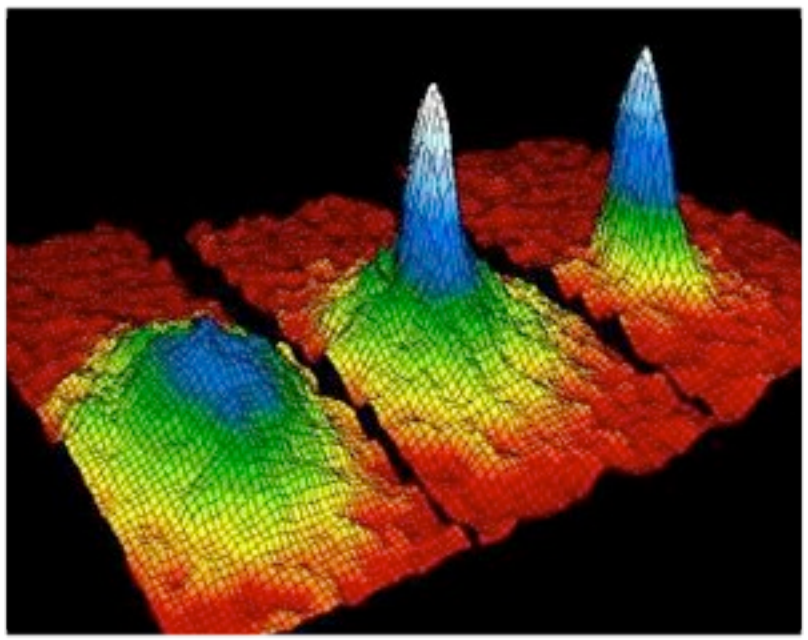
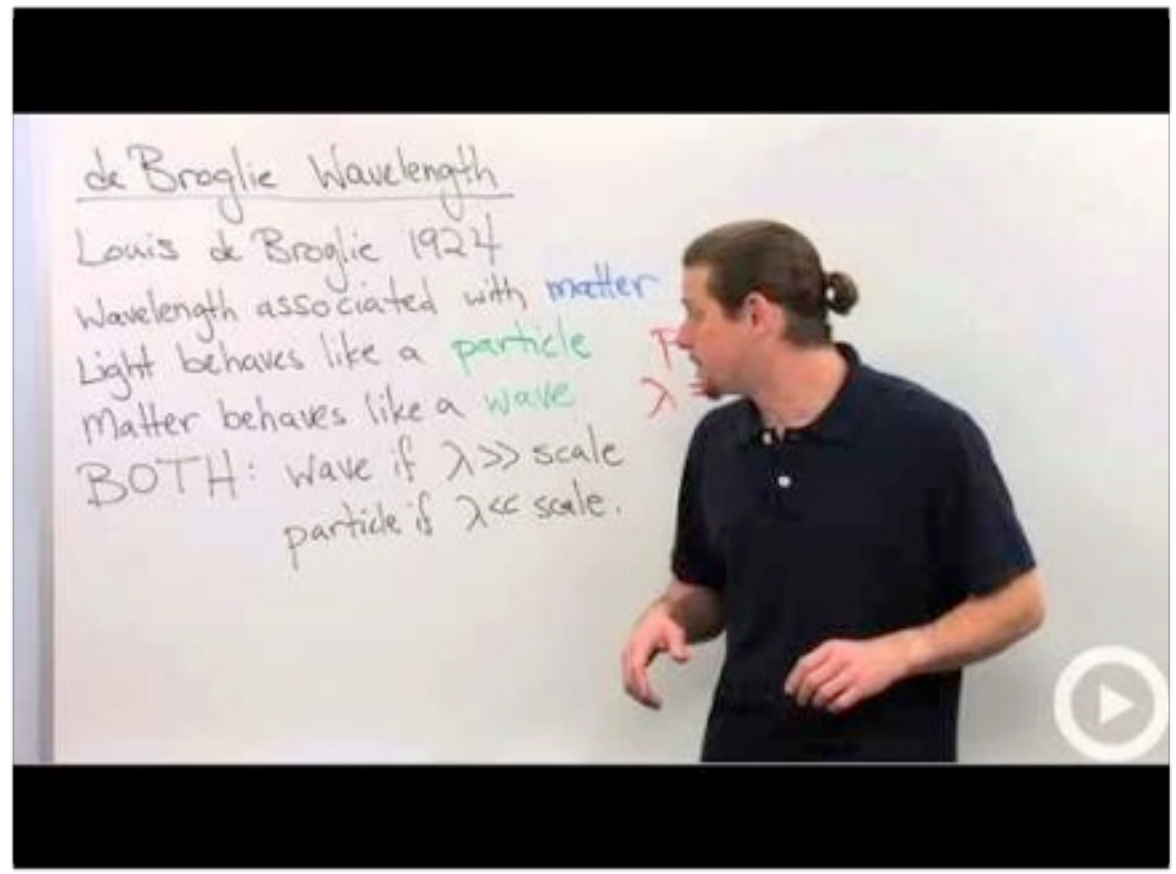
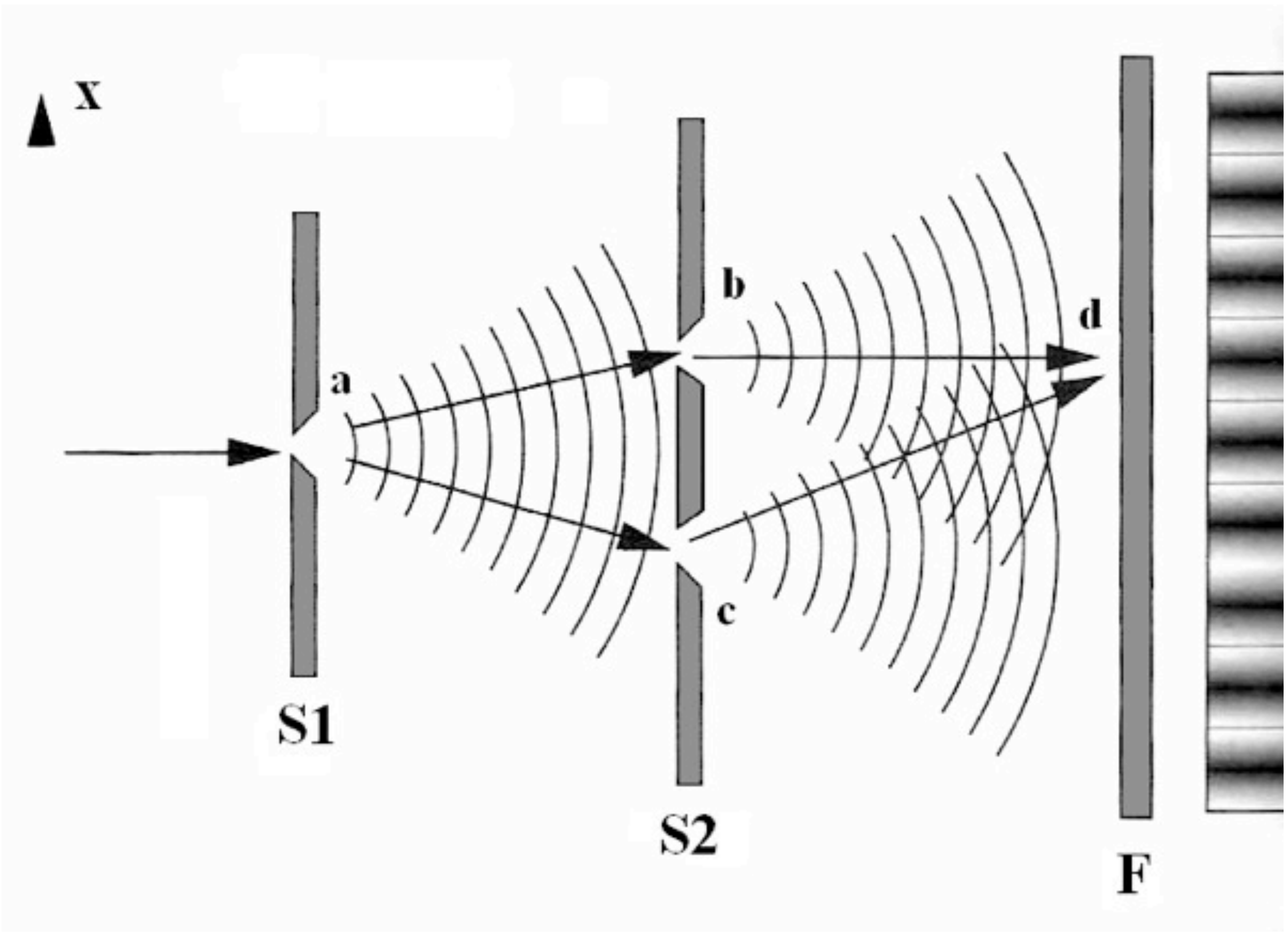
Hipótesis de Louis de Broglie

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

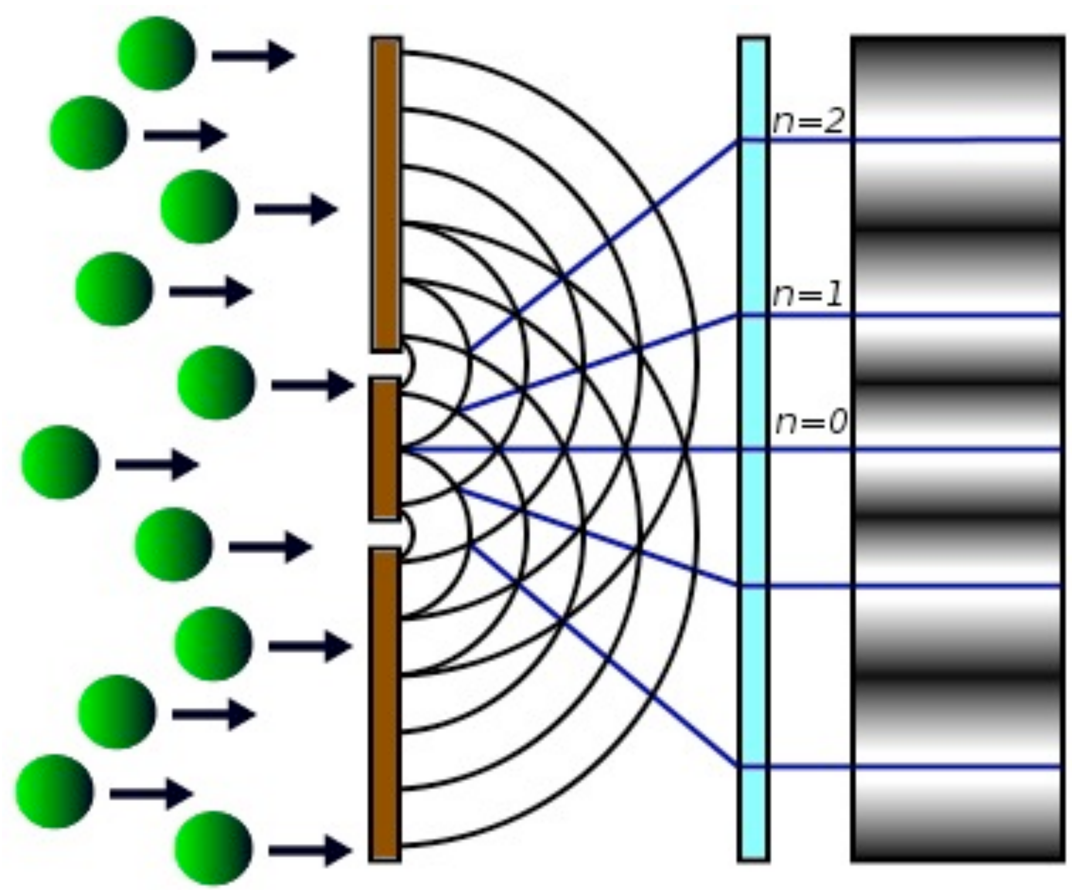




Como se ha visto una onda genera un patrón de interferencia:



Un flujo de partículas como los electrones también generan un patrón de interferencia.



Dado que los electrones poseen propiedades ondulatorias, parece lógico considerar la posibilidad de producir ondas electrónicas estacionarias. Si la energía está asociada a la frecuencia de una onda estacionaria, como $E=hf$, estas ondas exigen para su formación una serie discreta de energías.

Dado que los estados energéticos discretos en los átomos podía explicarse con el concepto de ondas estacionarias condujo a Schrödinger y a otros a una teoría matemática detallada conocida como Mecánica Cuántica.

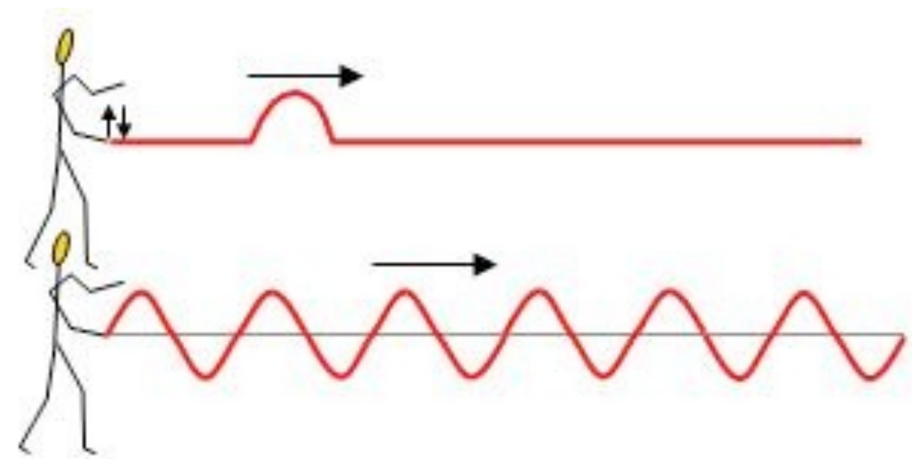
En esta mecánica el electrón es descrito mediante una función de onda Ψ que obedece a una ecuación llamada ecuación de Schrödinger.

$$i\hbar\frac{\partial\Psi(t,\vec{r})}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}^2\Psi(t,\vec{r}) + V(\vec{r},t)\Psi(t,\vec{r})$$

Interpretación de la función de onda

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

En una cuerda

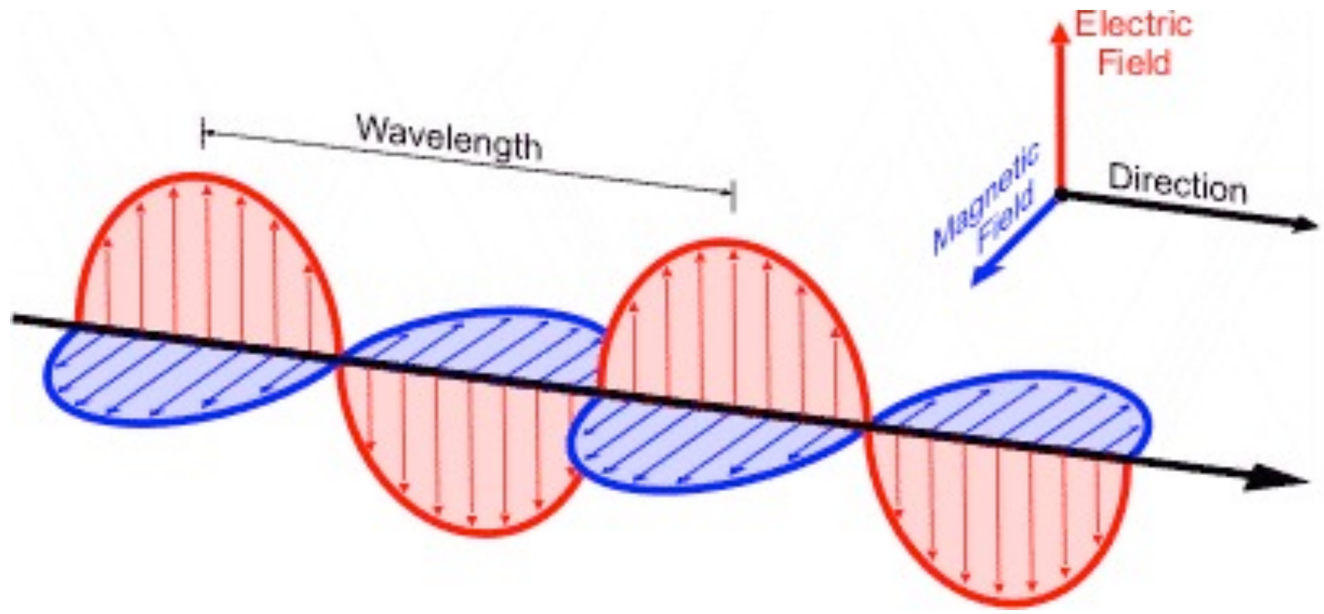


d=desplazamiento

$$\frac{\partial^2 d}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 d}{\partial t^2}$$

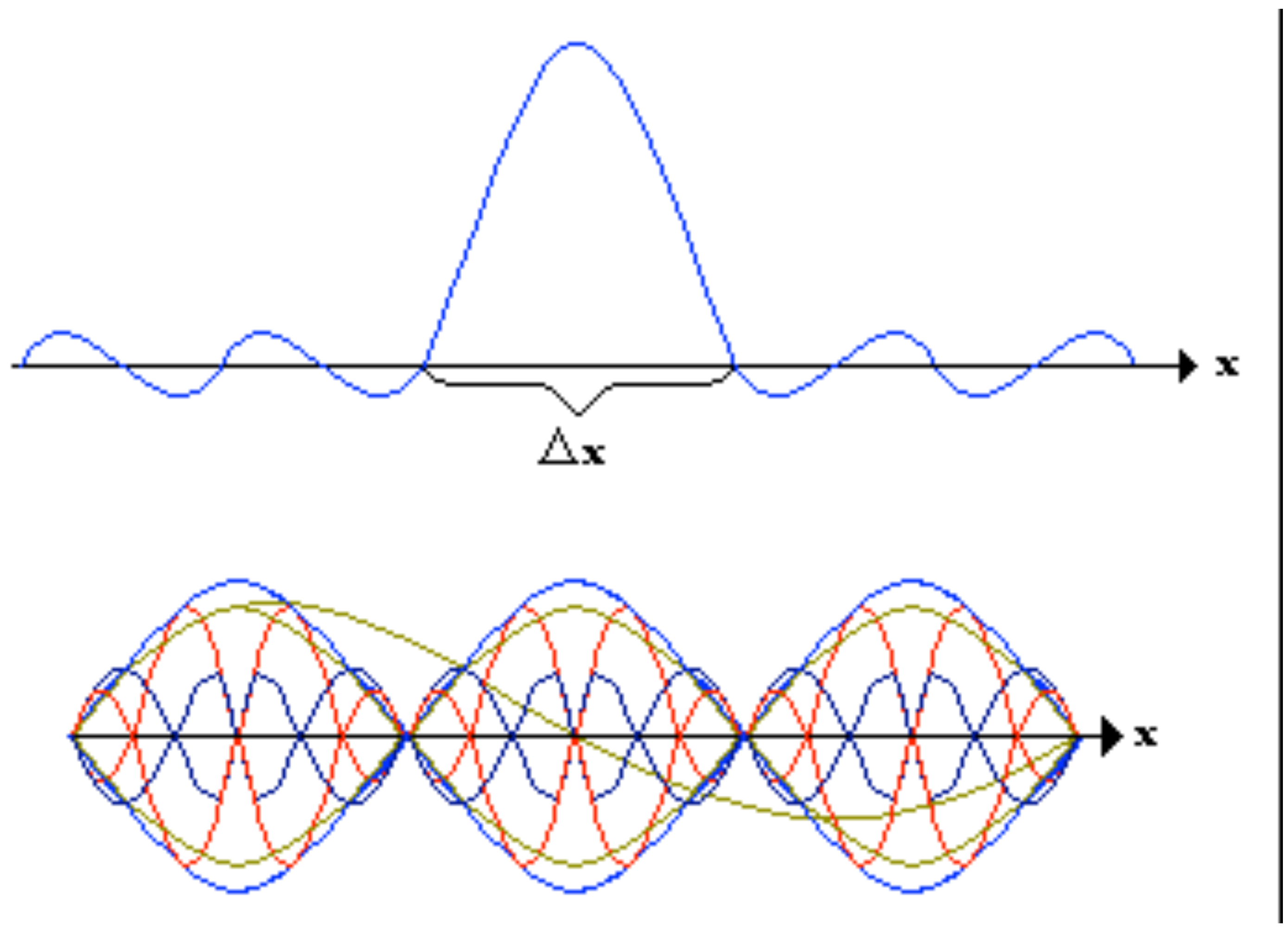
$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}$$

¿Y en la Luz?



$$\nabla^2 \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \qquad \nabla^2 \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$$

¿Y la función de onda?



La ecuación de Max Born

$$pq - qp = \frac{h}{2\pi i}$$

Momentum

Posición

Tanto la posición como el momentum son variables físicas **reales**, entonces?

Conmutador y anticonmutador

Sean A y B dos cantidades (físicas por ejemplo), se define el conmutador entre ellas como:

$$[A, B] = AB - BA$$

Y el anticonmutador como:

$$\{A, B\} = AB + BA$$

Demostrar:

$$[A + B, C] = [A, C] + [B, C]$$

$$[A, BC] = [A, B]C + B[A, C]$$

Constante h de Dirac: $\hbar = \frac{h}{2\pi}$

Con esta constante y haciendo uso del conmutado pordemos escribir la ecuación de Born como:

$$[q, p] = i\hbar$$

$$¿\ [q,p] = i\hbar\ ?$$

Tenemos una forma más compacta de escribir dicha ecuación. ¿Pero aún no entendemos su significado?

¿  ?

Inconsistencia:

$$\underbrace{[q,p]}_{\text{Matriz}} = \underbrace{i\hbar}_{\text{Número}}$$

Para solucionar la inconsistencia notacional debemos notar lo siguiente:

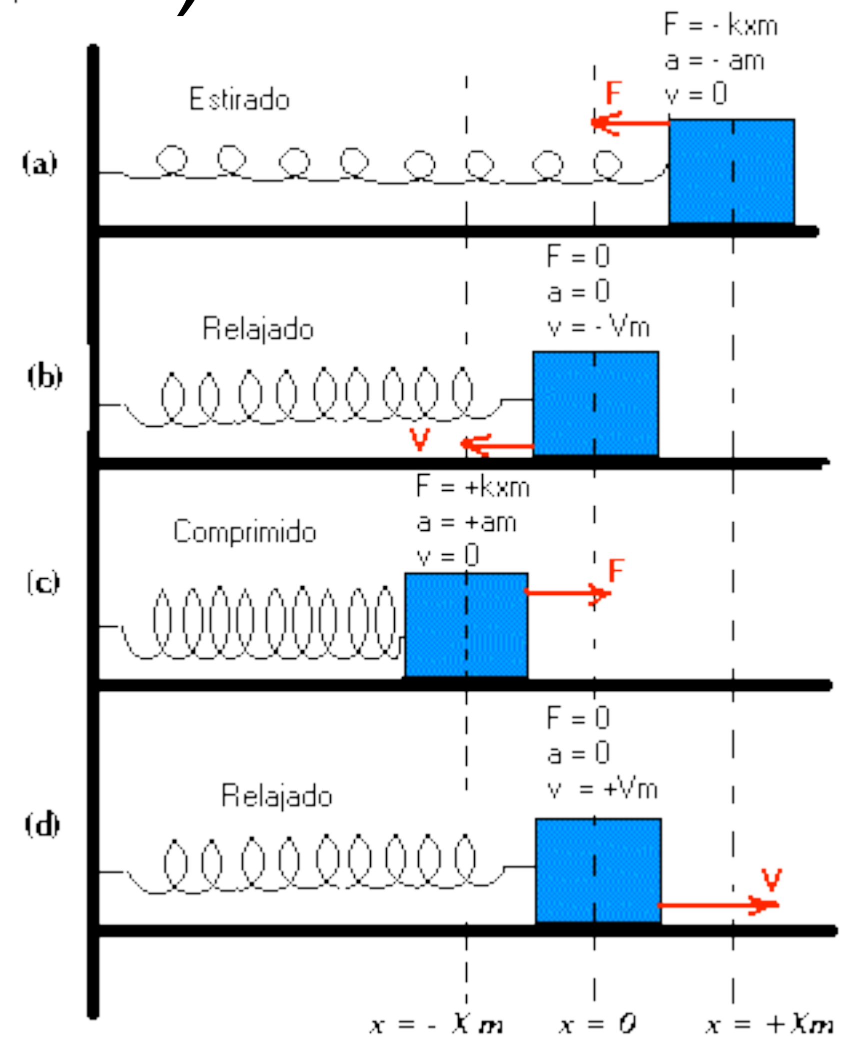
$$[p, q] = \begin{pmatrix} i\hbar & 0 & 0 \\ 0 & i\hbar & 0 \\ 0 & 0 & i\hbar \end{pmatrix} = i\hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = i\hbar I$$

Matriz Identidad: $I = i\hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Cuantización

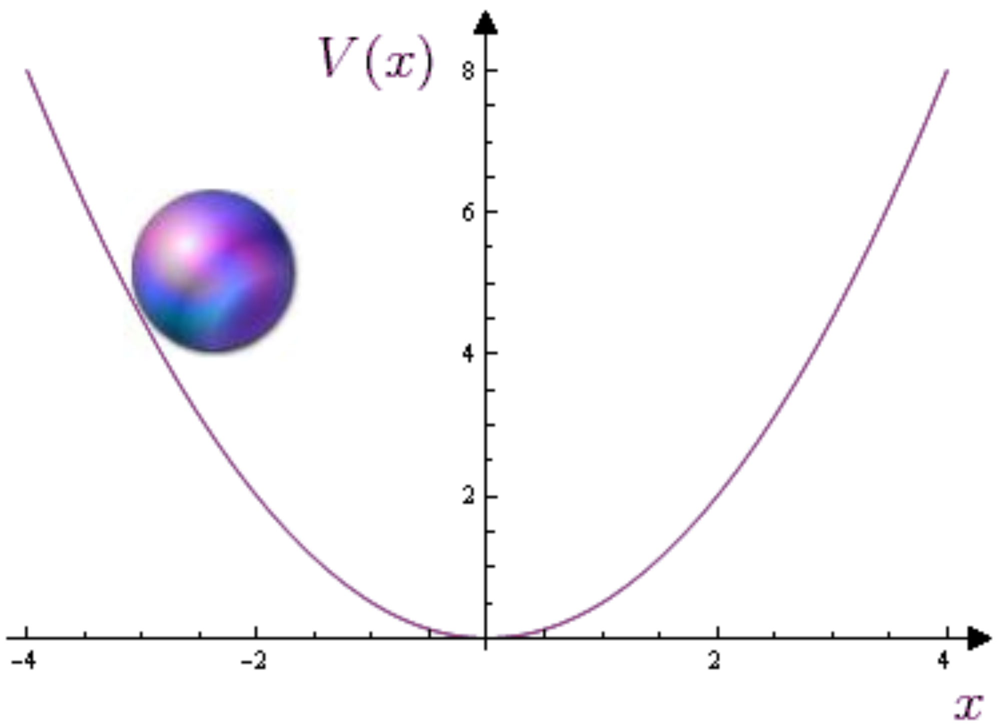
Proceso mediante el cual transformamos variables físicas clásicas en variabls físicas cuánticas (asociadas de matrices).

Ejemplo: el oscilador armónico



Hamiltoniano del oscilador armónico

$$H = K + V = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$$



$$= \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2$$

$$= \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$

Reemplazamos las variables contínuas clásicas por las matrices cuánticas:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{P}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 \mathbf{Q}^2$$

¿Pero cuáles con los valores de la energía medidos en un laboratorio?

Diagonalizar

Observable: $$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ λ

Los valores 0,3,4 y 1 son los **eigenvalores** o autovalores del observable = cantidades medidas en un laboratorio.

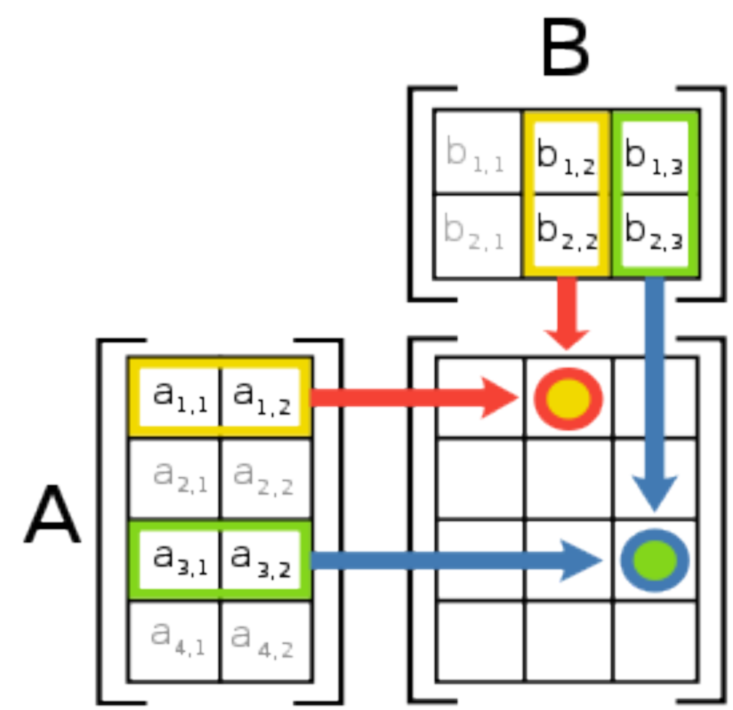
Operaciones con matrices

Sean:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Suma: $A + B = ???$

Multiplicación: $AB =$



Y?:

$$BA = ???$$

Claramente:

$$AB \neq BA$$

Conjugado de una matriz

El acto de conjugar es simplemente cambiar el signo de los elementos complejos de la matriz:

$$\alpha = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\alpha^*} \alpha^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Transpuesta de una matriz

El acto de transponer es simplemente cambiar las filas por las columnas de la matriz:

$$\alpha^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{(\alpha^*)^T} (\alpha^*)^{\mathrm{T}} = \alpha^\dagger = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

alpha **daga**

Observar que:

$$\alpha = \alpha^\dagger$$

Cuando lo anterior se cumple estamos frente a una matriz **hermítica**.

¿Son las Matrices de Pauli hermíticas?

$$\sigma_1 = \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_2 = \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_3 = \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Conjugado de un número Z

$$Z = a + bi \longrightarrow Z^* = \bar{Z} = a - bi$$

$$Z = a - bi \longrightarrow Z^* = \bar{Z} = a + bi$$

Ejercicios

Calcular $Z\bar{Z} =$ para cada caso.

a) $Z = 4e^{2i}$

b) $Z = cos(20) - 3isen(20)$

Producto escalar

$$\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, \dots)$$

$$\vec{y} = (y_1, y_2, y_3, y_4, \dots)$$

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + \dots .$$

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \sum_1^n x_i y_i$$

Convención de suma de Einstein: $\vec{x} \cdot \vec{y} = x_i y_i$

(Índices repetidos implican suma)

Sea $\vec{X} = (\frac{1}{\sqrt{4}}, \frac{1}{\sqrt{8}}, \frac{1}{\sqrt{16}}, \frac{1}{\sqrt{32}}, \frac{1}{\sqrt{64}}, \ldots)$

Calcular: $\vec{X} \cdot \vec{X}^*$

¿Qué podría representar matemáticamente este resultado?

Probabilidades

Certeza

$$\vec{X} \cdot \vec{X}^* = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \dots = 1$$

Consideremos la siguiente matriz diagonalizada:

$$A = \begin{bmatrix} 3.75 & 0 & 0 \\ 0 & 2.24 & 0 \\ 0 & 0 & 1.38 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{Observable}} \text{Energía}$$

Consideremos: $\vec{X} = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$

Calcule: $\vec{X} \cdot \vec{X}^T =< X|X >$ Notación de Dirac

Calcule: $< X|A|X >=$

Interptrete su resultado

Consideremos la siguiente matriz diagonalizada:

$$A = \begin{bmatrix} 3.75 & 0 & 0 \\ 0 & 2.24 & 0 \\ 0 & 0 & 1.38 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{Observable}} \text{Energía}$$

Consideremos: $\vec{X} = (1, 2, 3)$

Calcule: $\vec{X} \cdot \vec{X}^T = < X|X >$

Calcule: $< X|A|X > =$

Interptrete su resultado