FÍSICA MECÁNICA

Dino E. Risso
Carlos K. Ríos
Departamento de Física

UNIVERSIDAD DEL BÍO-BÍO

ANALISIS DIMENSIONAL

Es una técnica para analizar las expresiones matemáticas de un problema físico y que tiene en cuenta la consistencia dimensional entre términos de una misma expresión.

Permite chequear la posible validez física de la expresión matemática para un resultado.

Adecuadamente usado el analisis dimensional permite "obtener" expresiones matemáticas válidas para un problema físico.

EJEMPLO

Consideremos una *longitud* d, un intervalo de *tiempo* t y la expresión:

$$d = \frac{1}{2}at^2$$

que permite obtener la distancia d recorrida al cabo de un cierto tiempo t en el caso de *aceleración constante* a.

d distancia, (en unidades de metro (abreviado [m])
t = 10[s] tiempo (en unidades de segundos, abreviado [s])
a = 2[$\mathrm{m/s^2}$] aceleración (unidades [metros/segundo^2]=[m/s^2]

$d = \frac{1}{2}at^2$ = 0.5 * 2.0 [$\mathrm{m/s^2}$]* (10 [s^2]) = 100 [m]

DIMENSIONES Y UNIDADES

DIMENSIÓN	UNIDAD
Longitud	Metro
Tiempo	Segundo
Masa	Kilogramo

Los términos de una expresión física deben tener las mismas dimensiones (y en consecuencia las mismas unidades).

Ejemplo: la rapidez *v* asociada asociada a un vehículo es una cantidad que tiene unidades de [m/s]

Si *d* denota distancia y *t* denota tiempo, entonces la siguiente combinación $d = vt$ es una expresión dimensionalmente válida:

$$d = vt$$

$$[\mathbf{Longitud}] = [\frac{\mathbf{Longitud}}{\mathbf{Tiempo}}\,\mathbf{Tiempo}] = [\mathbf{Longitud}]$$

Es posible sumar la distancia d con el producto $v\,t$ ya que tienen las mismas dimensiones

$$d + vt$$

¡Es una expresión dimensionalmente válida!

$$d + vt^2$$

¡No se pueden sumar pues las dimensiones de cada término son diferentes.

d Tiene dimensiones de **Longitud** ... pero ...

vt^2 Tiene dimensiones de **Longitud Tiempo**

PORQUÉ?

EJEMPLO: En cierto desarrollo para determinar una cantidad d un estudiante de liceo encuentra que la expresión para d está dada por:

$$d = x + x^2$$

en que x corresponde 1 [Km].

De acuerdo a su resultado la expresión para d resulta tener el valor:

$$d = 1 + 1^2 = 2$$

luego el afirma que su respuesta es 2 [Km]

Otro alumno decide verificar esta expresión usando que 1 [Km] equivale a 1000 [m]:

$$d = 1000 + 1000^2 = 1000 + 1000000 = 1001000 = 1001[\mathrm{Km}]$$

¡NO HAY CONSISTENCIA!:

1001 [Km] no es lo mismo que 2 [km]

¿QUÉ OCURRIÓ?

ALGUNAS COMBINACIONES DE DIMENSIONES USADAS EN ESTE CURSO

DIMENSION	CANTIDADES
Longitud	Posición, distancia, recorrido
$\frac{\text{Longitud}}{\text{Tiempo}}$	Rapidez, velocidad
$\frac{\text{Longitud}}{\text{Tiempo}^2}$	Aceleración, aceleración normal, aceleración tangencial
Tiempo	Instante que indica el reloj, periodo de tiempo entre dos sucesos
$\frac{1}{\text{Tiempo}}$	frecuencia, frecuencia angular
$\frac{\text{Masa Longitud}}{\text{Tiempo}^2}$	Fuerza
$\frac{\text{Masa Longitud}}{\text{Tiempo}}$	Momentum lineal

EJEMPLO

Ley de Gravitación Universal de Newton

Masa del sol

Masa del planeta

Fuerza que siente el planeta

$$F = G\frac{m_1\, m_2}{d^2}$$

Constante de gravitación universal

Distancia entre planeta y sol

¿Qué dimensiones tiene la constante de gravitación universal G?

Consideramos: $$[F] = [G\frac{m_1\, m_2}{d^2}]$$

Con dimensiones: $$\frac{\mathrm{M}\cdot\mathrm{L}}{\mathrm{T}^2} = [G]\frac{\mathrm{M}\cdot\mathrm{M}}{\mathrm{L}^2}$$

Cancelando y simplificando aquí y allá

Se deduce: $$[G] = \frac{\mathrm{L}^3}{\mathrm{M}\cdot\mathrm{T}^2}$$

EJEMPLO

Si: x denota posición (dimensión de Longitud)

v_0 rapidez inicial (dimensión de Longitud/Tiempo)

v rapidez final (dimensión de Longitud/Tiempo)

a aceleración (dimensión de Longitud/Tiempo^2)

¿Son correctas dimensionalmente las siguientes expresiones?

¿Cuales de ellas son correctas?

$$v = v_0 + ax$$

$$v^2 = v_0^2 + ax$$

$$v = v_0 + at$$

EJEMPLO

Se plantea que la **aceleración de gravedad** g

$$g = 9.8\,[\mathrm{m/s^2}]$$

descubierta por Galileo Galilei para describir la **caída de objetos** y el **movimiento de proyectiles** muy cerca de la superfície de la Tierra, está dada por una combinación de las constantes:

M_T : Masa Terrestre
R_T : Radio Terrestre
G : Constante de Gravitación universal

Encuentre una posible expresión para ***g*** que sea una combinación de estas constantes

SOLUCIÓN

Plantearemos que la expresión buscada es una combinación multiplicativa de estas constantes.

Notar que las dimensiones de estas constantes son:

$$\dim[g] = \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{T}^2} \qquad \dim[R_T] = \mathrm{L} \qquad \dim[M_T] = \mathrm{M} \qquad \dim[G] = \frac{\mathrm{L}^3}{\mathrm{M\,T}^2}$$

por lo que teniendo en cuenta que la dimensión TIEMPO sólo aparece en la expresión para G y aparece precisamente como inverso del cuadrado del tiempo, entonces g debe ser proporcional a G

$$\mathrm{g} = \mathrm{Cte} \times \mathrm{G}$$

$$\mathrm{g} = \mathrm{Cte} \times \mathrm{G}$$

$$\frac{L}{T^2} \qquad\qquad \frac{L^3}{MT^2}$$

Por otro lado *G* hace aparecer la dimension de masa M en el denominador al lado derecho. Pero a la izquierda g no depende de esta dimensión. La única forma de eliminar la dimension M al lado derecho es que *g* también sea proporcional a la masa de la Tierra (de manera que las dimensiones de masa se cancelen)

$$g = \mathrm{Cte} \times M_T G$$

$$\frac{L}{T^2} \qquad\qquad \frac{L^3}{T^2}$$

$$g = \mathrm{Cte} \times M_T G$$

$$\frac{L}{T^2} \qquad\qquad \frac{L^3}{T^2}$$

Ahora sobra L^2 en el numerador, dimensiones que se podrían cancelar --al lado derecho-- dividiendo por R_T^2

$$g = \mathrm{Cte} \times \frac{M_T G}{R_T^2}$$

$$\frac{L}{T^2} \qquad\qquad \frac{L}{T^2}$$

Cantidad adimensional

VALORES:

$$G = 6.67 \times 10^{-11} \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{Kg\ s}^2}$$

$$M_T = 5.98 \times 10^{14} [\mathrm{kg}]$$

$$R_T = 6.37 \times 10^{6} [\mathrm{m}]$$

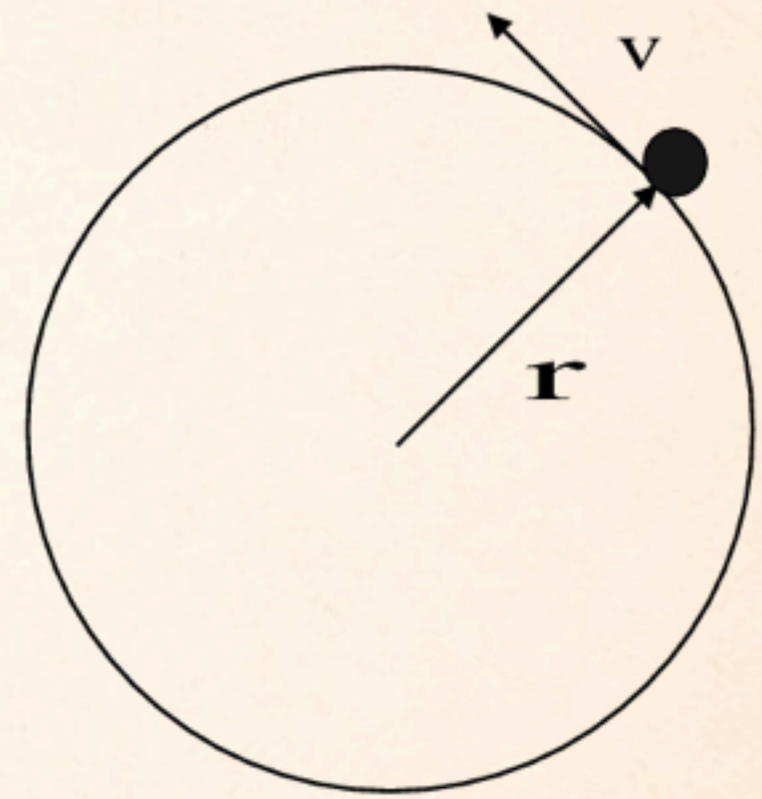
$$\mathrm{Cte} = 1$$

Resulta: $\dfrac{G M_T}{R_T^2} = 9.8 \quad [\mathrm{m/s}^2]$

¡el mismo valor que midió Galileo!

OTRO EJEMPLO

Se plantea que un objeto al rotar haciendo círculos de radio *r*, con rápidez *v* experimenta una aceleración a que
depende de *v* y *r* elevados a alguna potencia



¿n?

¿m?

$$a = v^n r^m$$

$$a = v^n r^m$$

$$\frac{L}{T^2} = \left(\frac{L}{T}\right)^n L^m = \frac{L^{n+m}}{T^n}$$

Sigue que: $n + m = 1$

$n = 2$

Luego: $m = 1 - n = -1$

Finalmente: $\boxed{a = v^2 r^{-1} = \frac{v^2}{r}}$

EJERCICIO: LEY DE KEPLER

El período de la órbita de un planeta en torno del Sol es una cantidad que puede depender de:

La constante de gravitación G
La distancia planeta-Sol R_{TS}
La masa del Sol M_S

Determine mediante análsis dimensional, una expresión para el período de la forma:

$$T = k\,(G)^m\,(R_{TS})^n\,(M_S)^p$$

en que m, n y p son números reales y k una constante adimensional.

RESULTA:

m=-1/2

n=3/2

p=-1/2

$$T = k\,G^{-1/2} R_{TS}^{3/2} M_S^{-1/2} = k\sqrt{\frac{R_{TS}^3}{GM_S}}$$

O sea: $$\frac{T^2}{R_{TS}^3} = \frac{k^2}{GM_S} = \mathrm{Cte}$$ 3ra Ley de Kepler

$$G = 6.67 \times 10^{-11}\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{Kg\ s}^2}$$

$$M_S = 1.99 \times 10^{30}\,[\mathrm{kg}]$$

$$T = 365\,\mathrm{dias} = 3.15 \times 10^{7}\,[\mathrm{s}]$$

$$R_{TS} = 1.496 \times 10^{11}\,[\mathrm{m}]$$

También se determina la constante k:

$$k^2 = \frac{GM_sT^2}{R_{TS}^3} = 39.43$$