

FÍSICA MECÁNICA

DINO E. RISSO

CARLOS K. RÍOS

DEPARTAMENTO DE FÍSICA



UNIVERSIDAD DEL BÍO-BÍO

[HTTP://MAXWELL.CIENCIAS.UBIOBIO.CL/~DRISSO/WIKI/](http://maxwell.ciencias.ubiobio.cl/~drisso/wiki/)

ANALISIS DIMENSIONAL

Es una técnica para analizar las expresiones matemáticas de un problema físico y que tiene en cuenta la consistencia dimensional entre términos de una misma expresión.

Permite chequear la posible **validez física** de la expresión matemática para un resultado.

Adecuadamente usado el análisis dimensional permite “obtener” expresiones matemáticas válidas para un **problema físico**.

EJEMPLO

Consideremos una *longitud* d , un intervalo de *tiempo* t y la expresión:

$$d = \frac{1}{2}at^2$$

que permite obtener la *distancia* d recorrida al cabo de un cierto tiempo t en el caso de *aceleración constante* a .

d distancia, (en unidades de **metro** (abreviado [**m**]))

$t = 10$ [s] tiempo (en unidades de **segundos**, abreviado [**s**])

$a = 2$ [m/s²] aceleración (unidades [metros/segundo²]=[m/s²])

$$d = \frac{1}{2}at^2 = 0.5 * 2.0 \text{ [m/s}^2\text{]} * (10 \text{ [s}^2\text{]}) = 100 \text{ [m]}$$

DIMENSIONES Y UNIDADES

DIMENSIÓN	UNIDAD
Longitud	Metro
Tiempo	Segundo
Masa	Kilogramo

Los términos de una expresión física deben tener las mismas dimensiones (y en consecuencia las mismas unidades).

Ejemplo: la rapidez v asociada a un vehículo es una cantidad que tiene unidades de $[m/s]$

Si d denota distancia y t denota tiempo, entonces la siguiente combinación $d = vt$ es una expresión dimensionalmente válida:

$$d = vt$$

$$[\text{Longitud}] = \left[\frac{\text{Longitud}}{\text{Tiempo}} \text{Tiempo} \right] = [\text{Longitud}]$$

Es posible sumar la distancia d con el producto $v t$ ya que tienen las mismas dimensiones

$d + vt$ ← ¡Es una expresión dimensionalmente válida!

$d + vt^2$ ← ¡No se pueden sumar pues las dimensiones de cada término son diferentes.

d Tiene dimensiones de **Longitud** ... pero ...

vt^2 Tiene dimensiones de **Longitud Tiempo**

PORQUÉ?

EJEMPLO: En cierto desarrollo para determinar una cantidad d un estudiante de liceo encuentra que la expresión para d está dada por:

$$d = x + x^2$$

en que x corresponde 1 [Km].

De acuerdo a su resultado la expresión para d resulta tener el valor:

$$d = 1 + 1^2 = 2$$

luego el afirma que su respuesta es 2 [Km]

Otro alumno decide verificar esta expresión usando que 1 [Km]
equivale a 1000 [m]:

$$d = 1000 + 1000^2 = 1000 + 1000000 = 1001000 = 1001[\text{Km}]$$

¡NO HAY CONSISTENCIA!:

1001 [Km] no es lo mismo que 2 [km]

¿QUÉ OCURRIÓ?

ALGUNAS COMBINACIONES DE DIMENSIONES USADAS EN ESTE CURSO

DIMENSION	CANTIDADES
Longitud	Posición, distancia, recorrido
$\frac{\text{Longitud}}{\text{Tiempo}}$	Rapidez, velocidad
$\frac{\text{Longitud}}{\text{Tiempo}^2}$	Aceleración, aceleración normal, aceleración tangencial
Tiempo	Instante que indica el reloj, periodo de tiempo entre dos sucesos
$\frac{1}{\text{Tiempo}}$	frecuencia, frecuencia angular
$\frac{\text{Masa Longitud}}{\text{Tiempo}^2}$	Fuerza
$\frac{\text{Masa Longitud}}{\text{Tiempo}}$	Momentum lineal

EJEMPLO

Ley de Gravitación Universal de Newton

Masa del sol

Masa del planeta

Fuerza que siente el planeta

$$F = G \frac{m_1 m_2}{d^2}$$

Constante de gravitación universal

Distancia entre planeta y sol

The diagram illustrates Newton's Law of Universal Gravitation. It features the equation $F = G \frac{m_1 m_2}{d^2}$ centered on the page. Five labels with arrows point to specific parts of the equation: 'Masa del sol' points to m_1 , 'Masa del planeta' points to m_2 , 'Fuerza que siente el planeta' points to F , 'Constante de gravitación universal' points to G , and 'Distancia entre planeta y sol' points to d^2 .

¿Qué dimensiones tiene la constante de gravitación universal G ?

Consideramos: $[F] = [G \frac{m_1 m_2}{d^2}]$

Con dimensiones: $\frac{M \cdot L}{T^2} = [G] \frac{M \cdot M}{L^2}$

Cancelando y simplificando aquí y allá

Se deduce: $[G] = \frac{L^3}{M \cdot T^2}$

EJEMPLO

- Si:
- x denota posición (dimensión de Longitud)
 - v_0 rapidez inicial (dimensión de Longitud/Tiempo)
 - v rapidez final (dimensión de Longitud/Tiempo)
 - a aceleración (dimensión de Longitud/Tiempo²)

¿Son correctas dimensionalmente las siguientes expresiones?

¿Cuales de ellas son correctas?

$$v = v_0 + ax$$

$$v^2 = v_0^2 + ax$$

$$v = v_0 + at$$

EJEMPLO

Se plantea que la **aceleración de gravedad** g

$$g = 9.8 \text{ [m/s}^2\text{]}$$

descubierta por Galileo Galilei para describir la **caída de objetos** y el **movimiento de proyectiles** muy cerca de la superficie de la Tierra, está dada por una combinación de las constantes:

M_T : Masa Terrestre

R_T : Radio Terrestre

G : Constante de Gravitación universal

Encuentre una posible expresión para g que sea una combinación de estas constantes

SOLUCIÓN

Plantearemos que la expresión buscada es una combinación multiplicativa de estas constantes.

Notar que las dimensiones de estas constantes son:

$$\dim[g] = \frac{L}{T^2} \quad \dim[R_T] = L \quad \dim[M_T] = M \quad \dim[G] = \frac{L^3}{MT^2}$$

por lo que teniendo en cuenta que la dimensión TIEMPO sólo aparece en la expresión para G y aparece precisamente como inverso del cuadrado del tiempo, entonces g debe ser proporcional a G

$$g = \text{Cte} \times G$$

$$g = \text{Cte} \times G$$

$$\begin{array}{ccc} \uparrow & & \uparrow \\ L & & L^3 \\ \hline T^2 & & MT^2 \end{array}$$

Por otro lado G hace aparecer la dimension de masa M en el denominador al lado derecho. Pero a la izquierda g no depende de esta dimension. La única forma de eliminar la dimension M al lado derecho es que g también sea proporcional a la masa de la Tierra (de manera que las dimensiones de masa se cancelen)

$$g = \text{Cte} \times M_T G$$

$$\begin{array}{ccc} \uparrow & & \uparrow \\ L & & L^3 \\ \hline T^2 & & T^2 \end{array}$$

$$g = \text{Cte} \times M_T G$$



$$\frac{L}{T^2}$$



$$\frac{L^3}{T^2}$$

Ahora sobra L^2 en el numerador, dimensiones que se podrían cancelar --al lado derecho-- dividiendo por R_T^2

$$g = \text{Cte} \times \frac{M_T G}{R_T^2}$$



$$\frac{L}{T^2}$$



$$\frac{L}{T^2}$$

Cantidad adimensional

VALORES:

$$G = 6.67 \times 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{Kg s}^2}$$

$$M_T = 5.98 \times 10^{24} [\text{kg}]$$

$$R_T = 6.37 \times 10^6 [\text{m}]$$

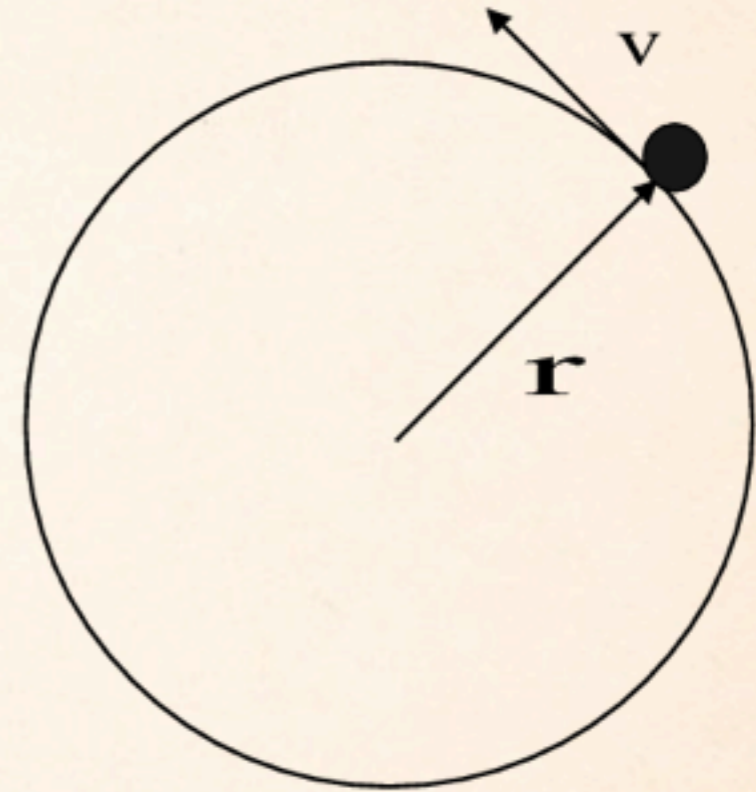
$$\text{Cte} = 1$$

Resultado: $\frac{GM_T}{R_T^2} = 9.8 \quad [\text{m/s}^2]$

¡el mismo valor que midió Galileo!

OTRO EJEMPLO

Se plantea que un objeto al rotar haciendo círculos de radio r , con rapidez v experimenta una aceleración a que depende de v y r elevados a alguna potencia



¿n?

¿m?

$$a = v^n r^m$$

$$a = v^n r^m$$

$$\begin{array}{c} \uparrow \\ \frac{L}{T^2} \end{array} = \begin{array}{c} \uparrow \quad \uparrow \\ \left(\frac{L}{T}\right)^n L^m \end{array} = \frac{L^{n+m}}{T^n}$$

Segue que: $n + m = 1$ Luego: $m = 1 - n = -1$
 $n = 2$

Finalmente:

$$a = v^2 r^{-1} = \frac{v^2}{r}$$

EJERCICIO: LEY DE KEPLER

El período de la órbita de un planeta en torno del Sol es una cantidad que puede depender de:

La constante de gravitación G

La distancia planeta-Sol R_{TS}

La masa del Sol M_S

Determine mediante análisis dimensional, una expresión para el período de la forma:

$$T = k (G)^m (R_{TS})^n (M_S)^p$$

en que m , n y p son números reales y k una constante adimensional.

RESULTA:

$$m = -1/2$$

$$n = 3/2$$

$$p = -1/2$$

$$T = k G^{-1/2} R_{TS}^{3/2} M_S^{-1/2} = k \sqrt{\frac{R_{TS}^3}{GM_S}}$$

O sea: $\frac{T^2}{R_{TS}^3} = \frac{k^2}{GM_S} = \text{Cte}$ 3ra Ley de Kepler

$$G = 6.67 \times 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{Kg s}^2}$$

$$M_S = 1.99 \times 10^{30} [\text{kg}]$$

$$T = 365 \text{ dias} = 3.15 \times 10^7 [\text{s}]$$

$$R_{TS} = 1.496 \times 10^{11} [\text{m}]$$

También se determina la constante k:

$$k^2 = \frac{GM_S T^2}{R_{TS}^3} = 39.43$$