PAUTA TAREA 4

1] $$y(t,x) = y_m \sin(kx - \omega t - \phi)$$

solución de $$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = y_m \cos(kx - \omega t - \phi)\, k$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -y_m k^2 \sin(kx - \omega t - \phi)$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = y_m \cos(kx - \omega t - \phi)(-\omega)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -y_m \sin(kx - \omega t - \phi)\,\omega^2$$

$$\Rightarrow \quad -y_m k^2 \sin(\cdots) - \frac{1}{v^2}\left[-y_m \sin(\cdots)\,\omega^2\right] =$$

$$-y_m \sin(\cdots)\left[k^2 - \frac{1}{v^2}\omega^2\right] = 0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{v^2 = \frac{\omega^2}{k^2}}$$

7] $$y(t,x) = 15[cm] \cos(0.157x - 50.3t)$$

$x_A = 0$

$x_B = ?$ desfase $= 60°$ respecto de A.

$$y_A = 15[cm] \cos(-50.3 t_1)$$
$$y_B = 15[cm] \cos(0.157 x_B - 50.3 t_1)$$

$$\Delta\phi = 0.157 x_B = 60° = \frac{\pi}{3}$$

$$x_B = \frac{\pi}{3 \times 0.157} = 6.67 \text{ cm.}$$

8] $f = 493 Hz$, $v = 353$ m/s $\longrightarrow \lambda = \frac{v}{f} \longrightarrow k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi f}{v}$

$$y(t,x) = y_m \cos\left(\frac{2\pi f}{v} x - 2\pi f t - \phi\right)$$

Para t fijo 2 ptos que difieren en fase 55°

$$y_1(t,x_1) = y_m \cos\left(\frac{2\pi f}{v} x_1 - 2\pi f t_1 - \phi\right)$$

$$y_2(t,x_2) = y_m \cos\left(\frac{2\pi f}{v} x_2 - 2\pi f t_1 - \phi\right)$$

$$\Delta\phi_x = \frac{2\pi f}{v}(x_2 - x_1) = 55° \Rightarrow |x_2 - x_1| = \frac{v}{2\pi f} \times 0.96 \text{ rad.}$$

$$\Delta\phi_t = 2\pi f (t_2 - t_1) = 1.12 \times 10^{-3}[s] \times 2\pi f$$

$$\Delta\phi_t = 3.47 [rad]$$

$$|x_2 - x_1| = \frac{353}{2\pi \times 493} \times 0.96 = 0.11 [m]$$

9] $v = 82.6\ cm/s$

$x_1 = 9.6\ cm.$ $\rightarrow y(t, x_1) = 5.12 \sin(1.16 - 4.08t)$

$\rho = 3.86\ g/cm.$

$\rightarrow$ frecuencia $2\pi f = 4.08\ rad/s.$

$$f = \frac{4.08}{2\pi} = 0.65\ [Hz]$$

$$\rightarrow y(t,x) = 5.12 \sin\left(\frac{1.16}{9.6}x - 4.08t\right) = 5.12\sin(0.12x - 4.08t)$$

$$\rightarrow |\vec{T}| = \rho v^2 = 0.00386 \frac{kg}{cm} \times \left(82.6 \frac{cm}{s}\right)^2$$

$$= 0.00386 \frac{kg}{cm} \frac{100\ cm}{1\ m} \left(0.826 \frac{m}{s}\right)^2$$

$$= 0.386 \times 0.826^2\ [N]$$

$$= 0.26\ [N]$$

10] $l = 20m$

$m = 0.06\ kg$

$|\vec{T}| = 50\ N$

$f = 200\ Hz$

$y_m = 0.01\ m$

$E_{MEC_\lambda} = \frac{1}{2} \rho \lambda y_m^2 \omega^2$: energía mecánica promedio en 1 long. de onda.

$\bar{P} = \frac{1}{2} \rho v y_m^2 v^2$

$$v = \sqrt{\frac{|\vec{T}|}{\rho}} = \sqrt{\frac{|\vec{T}| l}{m}}$$

$v = 129.1\ m/s$

$\lambda = \frac{v}{f} = 0.64\ m.$

$f^{-1} = T = 0.005[s]$

$$E_{MEC\lambda} = \frac{1}{2} \times \frac{0.06}{20} \times 0.64 \times 0.01^2 \times (129.1)^2$$

$$E_{MEC\lambda} = 0.0016\ [J]$$

$$\bar{P} = \frac{E_{MEC\lambda}}{T} = 0.32\ [W]$$

11]

$f = 50\ Hz$ $\quad v = 1\ m/s$ $\quad \rightarrow \lambda = \frac{v}{f} = 0.02\ m$

$y_m = 20\ cm$ $\quad \Delta\phi = \pi/3$

$$y = 2y_m \cos\frac{\Delta\phi}{2} \sin(kx - \omega t - \phi')$$

$$y = 2 \times 20\ cm \cos\frac{\pi}{6} \sin\left(314.16x - 314.16t - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$y(t, \ ) = 34.64\ [cm] \sin\left(314.16x - 314.16t - \pi/6\right). \quad \text{EC. ONDA.}$$

$$y(t, 0.20\ m) = 34.64 \sin(62.83 - 314.16t - \pi/6)$$

$$v_y(t, 0.20\ m) = -0.35 \times 314.16 \cos(62.83 - 314.16t - \pi/6)$$

$$v_y = -109.96\ [m/s] \cos(62.83 - 314.16t - \pi/6)$$

$$a_y = -34\,543.8\ [m/s^2] \sin(62.83 - 314.16t - \pi/6).$$

2] $m = 2\,kg \quad k = 20\ N/m \quad \rightarrow \omega^2 = 10\ rad/s$

$F = 3\,[N] \sin 2\pi t \quad \omega_e^2 = 4\pi^2 = 39.48\ rad/s$

la solución de estado estacionario para $\eta = 0$ es:

$$x(t) = \frac{-F_0/m}{(\omega^2 - \omega_e^2)^2}\left[\omega_e^2 - \omega^2\right]\sin(\omega_e t)$$

$$x(t) = \underbrace{\frac{F_0/m}{\omega^2 - \omega_e^2}}_{\text{amplitud}} \sin(\omega_e t)$$

frecuencia angular.

De la fuerza externa notamos que $\omega_e = 2\pi$ rad/s y $F_0 = 3$ N, luego:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = 1\ Hz \qquad A = \frac{3/2}{10 - 4\pi^2} = -0.051\ m$$

3] $x(t) = \underbrace{x_m e^{-\eta t/2}}_{\text{amplitud.}} \cos(\omega' t + \phi) \qquad \omega' = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\eta^2}{4}}$

la amplitud disminuye de 0.3 a 0.1 m entre $t=0$ y $t=5s$

$t=0 \rightarrow x_m = 0.3 \qquad (\phi = 0)$

$t=5 \rightarrow 0.3\, e^{-\eta 5/2} = 0.1$

$$e^{-(5/2)\eta} = 0.33. \quad / \ln(\,)$$

$$-\frac{5}{2}\eta = -1.099$$

$$\Rightarrow \eta = 0.44\ [s^{-1}]$$

4] Al igual que en el problema 2,

$$x(t) = \frac{F_0/m}{w^2 - w_e^2} \sin w_e t$$

$m = 0.150$ kg
$k = 6.30$ N/m
$F_0 = 1.7$ N
w_e ?

$$\frac{F_0/m}{w^2 - w_e^2} = 0.44 \text{ m}$$

$$w^2 - w_e^2 = \frac{F_0/m}{0.44}$$

$$w_e^2 = w^2 - \frac{F_0/m}{0.44} = \frac{6.3}{0.15} - \frac{1.7/0.15}{0.44}.$$

$$w_e^2 = 42 - 25.76 \longrightarrow w_e = 4.03 \ \frac{\text{rad}}{s}$$

5]

$$w' = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\eta^2}{4}} = \sqrt{\frac{85}{0.25} - \frac{0.7^2}{4}} = \sqrt{340 - 0.12} = 18.4 \ \frac{\text{rad}}{s}$$

$$x(t) = x_m e^{-\eta t/2} \cos(w' t + \cancel{\phi}^{0})$$

La frecuencia angular de las osilaciones es 18.4 rad/s

la masa alcanza a oscilar antes de detenerse, de hecho, dado que $w' \approx w$ podemos decir que la amortiguación es pequeña.

$$x_m e^{-\eta t/2} \rightarrow \frac{1}{4} x_m$$

$$e^{-\eta t/2} = 0.25 \ / \ln$$

$$-\eta t/2 = -1.39$$

$$t = \frac{2 \times 1.39}{0.7} = 3.97 [s].$$

la amplitud disminuye a 1/4 después de 3.97 [s].

6] $m = 1000\ kg$

$k = 10000\ N/m$

$b = 1100\ Ns/m$

$A = 0.1\ m$

$\lambda = 20\ m$

Podemos pensar que la masa se distribuye uniformemente en los 4 resortes, luego:

$$\vec{F_e} + \vec{F_v} + \vec{P} + \vec{F_E} = \frac{m}{4}\bar{a}$$

$$-kx - b\frac{dx}{dt} + \frac{m}{4}g + F_E = \frac{m}{4}\frac{d^2x}{dt^2}$$

Hemos visto que la solución de estado estacionario es:

$$X(t) = \frac{4F_0/m}{G}\sin(w_e t - \phi)$$

donde $X(t)$ es una redefinición de la posición

$$X = x - \frac{mg}{4k}$$

$$G = \sqrt{(w_e^2 - \omega^2)^2 + \eta^2 w_e^2}$$

$$\phi = \cos^{-1}\left(\frac{\eta w_e}{G}\right) \qquad b = \frac{m}{4}\eta.$$

donde $\omega = \sqrt{\frac{4k}{m}}$ y w_e es la frecuencia externa.

→ la amplitud máxima se alcanza cuando G es mínimo

$$\Rightarrow \quad w_{e\,max} = \sqrt{\omega^2 - \frac{\eta^2}{2}} = \sqrt{\frac{k4}{m} - \frac{4^2 b^2}{2m^2}} = 5.5\ \frac{rad}{s}$$

$$\Rightarrow f_{max} = 0.88\ Hz$$

la frecuencia externa está relacionada con la presencia de calamina,

$$w_e = \frac{2\pi}{T_e} = \frac{2\pi v}{\lambda_e}$$

donde v es la rapidez del automóvil relacionada con la frecuencia a la cual aparecen los valles de la sinusoide.

$$\Rightarrow v = \frac{\lambda_e w_e}{2\pi} = 17.5\ \frac{m}{s}$$

A $17.5\ \frac{m}{s}$ el automóvil experimenta la máxima amplitud de vibración