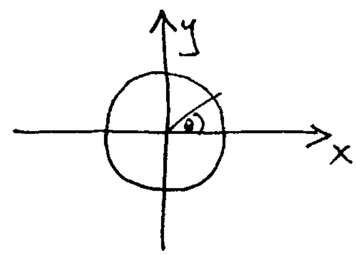
# PAUTA TAREA 2.

1. Mostrar que la velocidad (módulo) y la aceleración (módulo) en un movimiento circular uniforme son constantes.

Hemos visto que un movimiento circular uniforme puede describirse en términos de 2 movimientos armónicos simples:

$x(t) = R\cos\omega t$

$y(t) = R\,\mathrm{sen}\,\omega t$




de modo que $x^2 + y^2 = R^2$ (una circunferencia de radio R)

X describe la posición respecto del eje x e y la posición respecto del eje y, luego el vector posición está dado por: $\vec{r}(t) = x(t)\,\hat{\imath} + y(t)\,\hat{\jmath}$

entonces, la velocidad será $\vec{v} = \dfrac{dx}{dt}\hat{\imath} + \dfrac{dy}{dt}\hat{\jmath}$

mientras que la aceleración pueda $\vec{a} = \dfrac{d^2x}{dt^2}\hat{\imath} + \dfrac{d^2y}{dt^2}\hat{\jmath}$

$\dfrac{dx}{dt} = -R\omega \sin\omega t \longrightarrow \dfrac{d^2x}{dt^2} = -R\omega^2\cos\omega t$

$\dfrac{dy}{dt} = R\omega\cos\omega t \longrightarrow \dfrac{d^2y}{dt^2} = -R\omega^2\sin\omega t.$

Ahora calculamos los módulos:

$|\vec{v}| = \sqrt{(dx/dt)^2 + (dy/dt)^2} = R\omega\,(\sin^2\omega t + \cos^2\omega t) = R\omega$

$|\vec{a}| = \sqrt{(d^2x/dt^2)^2 + (d^2y/dt^2)^2} = R\omega^2\,(\sin^2\omega t + \cos^2\omega t) = R\omega^2$

$\Rightarrow$ Ambas son constantes.

2. Chequear que la función: $x(t) = x_m e^{-\eta t/2} \cos(\omega' t + \phi)$

es solución de la Ec. Dif. Lin. $\dfrac{d^2x}{dt^2} + \eta \dfrac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0$

$$\frac{dx}{dt} = x_m \left[ -\frac{\eta}{2} e^{-\eta t/2} \cos(\omega' t + \phi) - e^{-\eta t/2} \sin(\omega' t + \phi)\, \omega' \right]$$

$$= x_m e^{-\eta t/2} \left[ -\eta/2 \cos(\omega' t + \phi) - \omega' \sin(\omega' t + \phi) \right]$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = x_m \left(-\frac{\eta}{2}\right) e^{-\eta t/2} \left[ -\eta/2 \cos(\omega' t + \phi) - \omega' \sin(\omega' t + \phi) \right]$$

$$+ x_m e^{-\eta t/2} \left[ +\frac{\eta}{2} \sin(\omega' t + \phi)\, \omega' - \omega' \omega' \cos(\omega' t + \phi) \right]$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \eta \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = \underline{x_m e^{-\eta t/2}} \left(-\frac{\eta}{2}\right) \left( -\frac{\eta}{2} \cos(\omega' t + \phi) - \omega' \sin(\omega' t + \phi) \right)$$

$$+ \underline{x_m e^{-\eta t/2}} \left[ \frac{\eta}{2} \sin(\omega' t + \phi)\omega' - \omega' \omega' \cos(\omega' t + \phi) \right]$$

$$+ \eta \underline{x_m e^{-\eta t/2}} \left[ -\eta/2 \cos(\omega' t + \phi) - \omega' \sin(\omega' t + \phi) \right]$$

$$+ \omega^2 \underline{x_m e^{-\eta t/2}} \cos(\omega' t + \phi) = \cdot$$

$$= x_m e^{-\eta t/2} \left[ \frac{\eta^2}{4} \cos(\omega' t + \phi) + \frac{\eta}{2} \omega' \sin(\cdots) + \frac{\eta}{2} \omega' \sin(\cdots) - \omega' \omega' \cos(\cdots) \right.$$

$$\left. - \frac{\eta^2}{2} \cos(\cdots) - \eta \omega' \sin(\cdots) + \omega^2 \cos(\cdots) \right]$$

$$\frac{\eta^2}{4} - \omega' \omega' - \frac{\eta^2}{2} + \omega^2 = 0 \qquad \omega' = \sqrt{\omega^2 - \frac{\eta^2}{4}}$$

$$\frac{\eta}{2} \omega' + \frac{\eta}{2} \omega' - \eta \omega' = 0 \quad \checkmark\checkmark$$

3. Mostrar que: $x(t) = \frac{F_0/m}{G} \sin(w_e t - \phi)$

es solución de la Ec. Dif. Lin: $m\left(\frac{d^2x}{dt^2} + \eta \frac{dx}{dt} + \omega^2 x\right) = F_0 \cos(w_e t)$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{F_0/m}{G} w_e \cos(w_e t - \phi)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{F_0/m}{G} w_e^2 \sin(w_e t - \phi)$$

$$m\left(-\frac{F_0/m}{G} w_e^2 \overbrace{\sin(w_e t - \phi)}^{\sin w_e t \cos\phi - \cos w_e t \sin\phi} + \eta \frac{F_0/m}{G} w_e \overbrace{\cos(w_e t - \phi)}^{\cos w_e t \cos\phi + \sin w_e t \sin\phi} + \omega^2 \frac{F_0/m}{G} \underbrace{\sin(w_e t - \phi)}_{\sin w_e t \cos\phi - \cos w_e t \sin\phi}\right) = F_0 \cos(w_e t)$$

$$\Rightarrow -\cancel{m} \frac{\cancel{F_0/m}}{\cancel{G}} w_e^2 \cos\phi + \eta \cancel{m} \frac{\cancel{F_0/m}}{\cancel{G}} w_e \sin\phi + \cancel{m} \omega^2 \frac{\cancel{F_0/m}}{\cancel{G}} \cos\phi = 0.$$

$$\cancel{m} \frac{\cancel{F_0/m}}{G} w_e^2 \sin\phi + \eta \frac{\cancel{F_0/m}}{G} \cancel{m} w_e \cos\phi - \omega^2 m \frac{\cancel{F_0/m}}{G} \sin\phi = \cancel{F_0}$$

$$w_e^2 \sin\phi + \eta w_e \cos\phi - \omega^2 \sin\phi = G$$

$$-w_e^2 \cos\phi + \eta w_e \sin\phi + \omega^2 \cos\phi = 0$$

$$\hookrightarrow \sin\phi = \frac{(w_e^2 - \omega^2)\cos\phi}{\eta w_e}$$

$$\cos\phi \left\{ \frac{w_e^2 (w_e^2 - \omega^2)}{\eta w_e} + \eta w_e - \frac{\omega^2 (w_e^2 - \omega^2)}{\eta w_e} \right\} = G$$

$$\left[(w_e^2 - \omega^2)^2 + \eta^2 w_e^2\right] \times \frac{\cos\phi}{\eta w_e} = G$$

$$\Rightarrow \boxed{\cos\phi = \eta w_e / G}$$

$$G = \sqrt{(w_e^2 - \omega^2)^2 + \eta^2 w_e^2}$$