UNIVERSIDAD DEL BIO-BIO

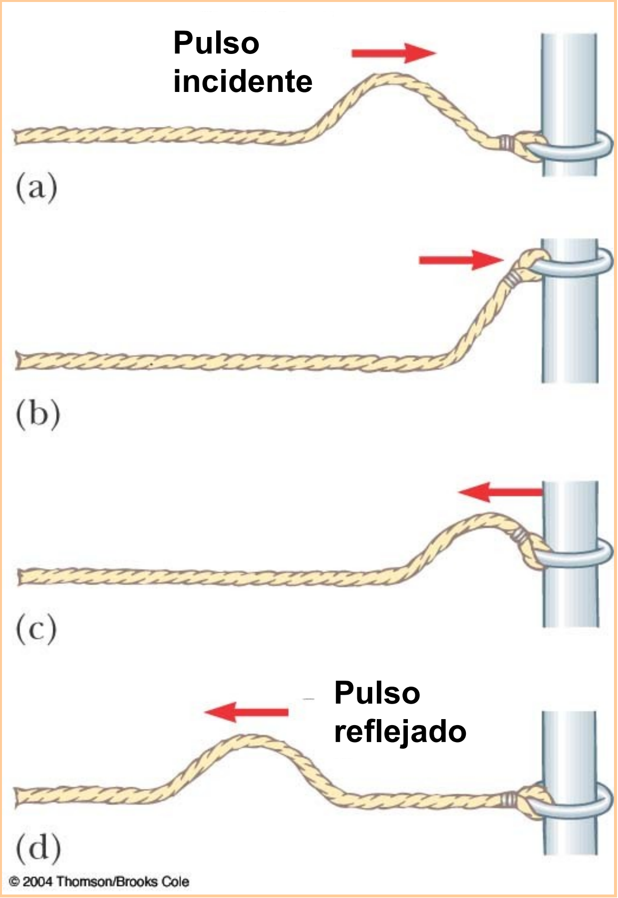
Física III (sección 1)
(230006-230010)
Ondas, Óptica y Física Moderna

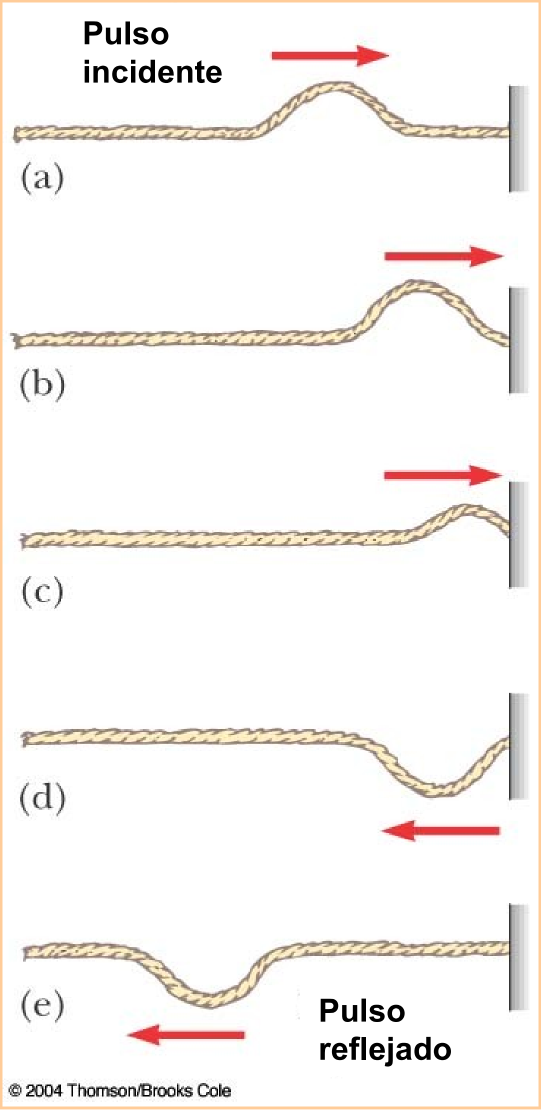
Profesor: M. Antonella Cid
Departamento de Física, Facultad de Ciencias
Universidad del Bío-Bío

Carreras: Ingeniería Civil Civil, Ingeniería Civil Mecánica, Ingeniería Civil Industrial

Reflexión

¿Qué ocurre si el medio no es uniforme?

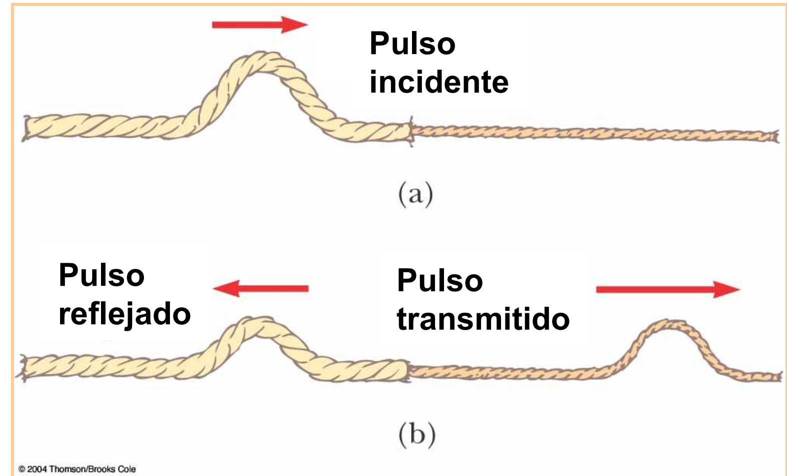




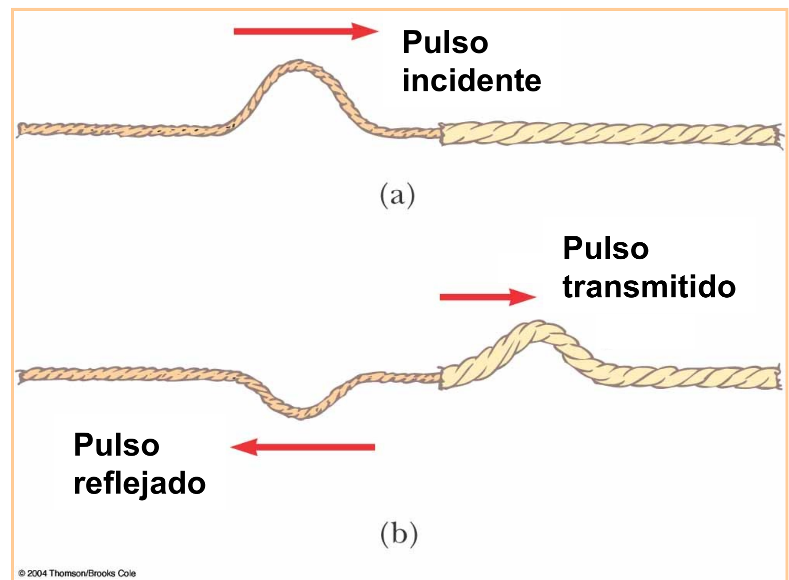
Transmisión

¿Qué ocurre si el medio no es uniforme?

Cuando una onda o un pulso viaja desde un medio A a un medio B y $v_A < v_B$ (el medio A es más denso que B), la onda no se invierte bajo reflexión.



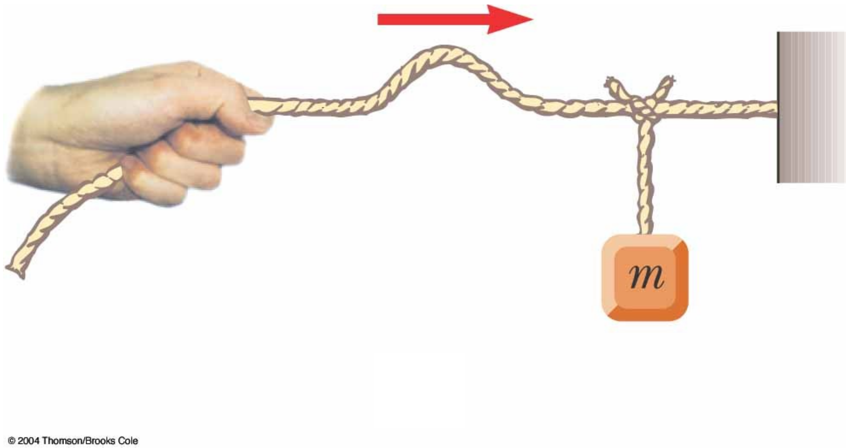
Cuando una onda viaja desde un medio A a un medio B y $v_A > v_B$ (el medio B es más denso que A), la onda se invierte bajo reflexión.

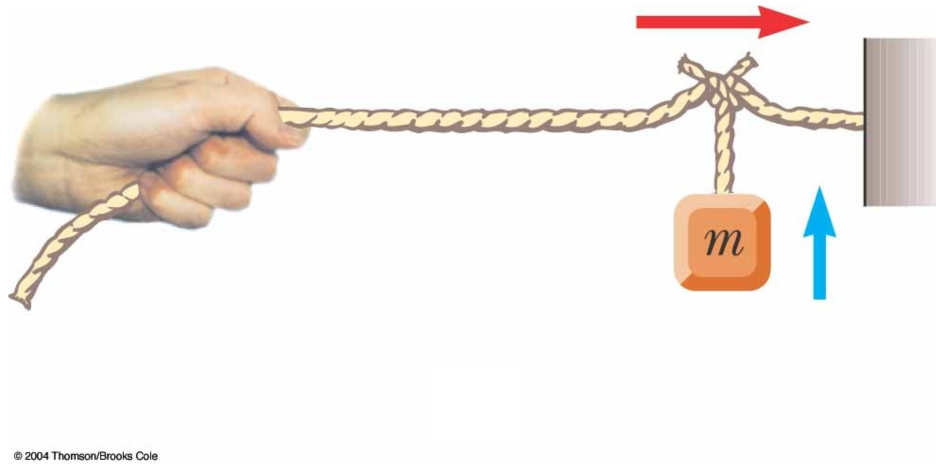


Cuando una onda cambia de medio debe mantener su frecuencia, luego:

$$f_A = f_B \qquad \Rightarrow \qquad \frac{v_A}{\lambda_A} = \frac{v_B}{\lambda_B}$$

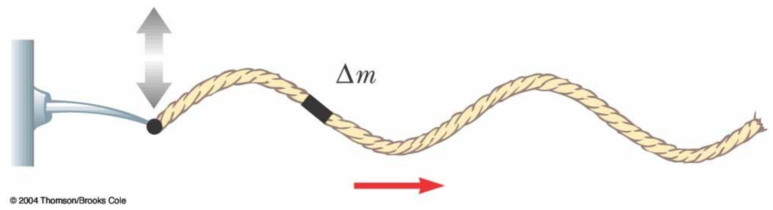
Energía en una onda





Energía en una onda

Consideramos un "elemento de medio" de masa Δm y longitud Δx .



La energía cinética asociada a este elemento de medio es $\Delta K = \frac{1}{2}\Delta m v_y^2$

Si escribimos la masa en términos de la densidad y los Δ como diferenciales:

$$dK = \frac{1}{2}\rho dx v_y^2 \Rightarrow \boxed{dK = \frac{1}{2}\rho\omega^2 y_m^2 \cos^2(kx - \omega t)\, dx}$$

$$\boxed{y(t,x) = y_m \sin(kx - \omega t - \phi)}$$

$$v_y = \left(\frac{dy}{dt}\right)_{x=cte} = \frac{\partial y}{\partial t} = -\omega y_m \cos(kx - \omega t - \phi)$$

Energía cinética en una onda

- Para una foto de la onda en $t = 0$ (puede ser cualquier instante t):

$$dK = \frac{1}{2}\rho\omega^2 y_m^2 \cos^2(kx)dx$$

- Integrando entre 0 y λ (o entre x y $x+\lambda$):

$$K_\lambda = \int_0^\lambda dK = \frac{1}{2}\rho\omega^2 y_m^2 \int_0^\lambda \cos^2(kx)dx = \frac{1}{4}\rho\omega^2 y_m^2 \lambda$$

Energía potencial en una onda

- Para la energía potencial en $t = 0$ consideramos como nivel de referencia el estado de equilibrio de la cuerda, donde $y = 0$

- Energía potencial gravitatoria

$$\boxed{y(t, x) = y_m \sin(kx - \omega t - \phi)}$$

$$dU_g = \Delta m g y(0, x) = \rho g y(0, x) dx = \rho g y_m \sin(kx) dx$$

$$U_{g\lambda} = \rho g y_m \int_0^\lambda \sin(kx) dx = 0$$

- Energía potencial del M.A.S.

$$dU_{M.A.S.} = -\int F_c dy = -\int \Delta m a_y dy = \int \Delta m \omega^2 y dy = \frac{1}{2} \Delta m \omega^2 y^2(0, x)$$

$$U_{M.A.S.\lambda} = \frac{1}{2} \rho \omega^2 y_m^2 \int_0^\lambda \sin^2(kx) dx = \frac{1}{4} \rho \omega^2 y_m^2 \lambda$$

Energía mecánica en una onda

- La energía mecánica en una longitud de onda es dada por:

$$E_\lambda = K_\lambda + U_\lambda = \frac{1}{2}\rho\omega^2 y_m^2 \lambda$$

Potencia promedio en una onda

- Como la onda se mueve por la cuerda, esta energía pasa por un punto dado de la cuerda en un intervalo de tiempo de un período de oscilación.
- La potencia promedio, o tasa de transferencia de energía asociada a la onda es dada por:

$$\bar{\mathcal{P}} = \frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{E_\lambda}{T} = \frac{1}{2}\rho\omega^2 y_m^2 \frac{\lambda}{T} = \frac{1}{2}\rho\omega^2 y_m^2 v$$

- La tasa de transferencia de energía en cualquier onda sinusoidal es proporcional al cuadrado de la frecuencia y al cuadrado de la amplitud de la onda

Potencia instantánea en una onda

- La potencia instantánea se define como: $\mathcal{P} \equiv \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$

- Nos concentramos en un elemento de medio, para el cual la fuerza que actúa es paralela a la velocidad

$\boxed{y(t,x) = y_m \sin(kx - \omega t - \phi)}$

$$\mathcal{P} = F_y v_y = \left(|\vec{T}| \frac{\partial y}{\partial x} \right) \frac{\partial y}{\partial t}$$

$$\mathcal{P} = \rho \omega^2 y_m^2 v \cos^2(kx - \omega t - \phi)$$

$$\bar{\mathcal{P}} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \mathcal{P} dt = \frac{1}{2} \rho \omega^2 y_m^2 v$$

UNIVERSIDAD DEL BIO-BIO

Ejemplo

- Una cuerda tensa con densidad $\rho = 5 \times 10^{-2}[kg/m]$ se somete a una tensión de $80[N]$ ¿Cuánta potencia debe suministrarse a la cuerda para generar ondas sinusoidales a una frecuencia de $60[Hz]$ y una amplitud de $6[cm]$?

- Si la cuerda debe transferir energía a una tasa de *1000 [W]* ¿cuál debe ser la amplitud necesaria si todos los otros parámetros permanecen iguales?

- La función de onda para una onda en una cuerda tensa es:

$$y(t,x) = 0.35[m]\sin(10\pi t - 3\pi x + \pi/4)$$

donde x está en metros y t en segundos.

- ¿Cuál es la tasa promedio a la cual se transmite energía en la cuerda si su densidad lineal de masa es *75 [g/m]*?
- ¿Cuál es la energía en cada ciclo de la onda?

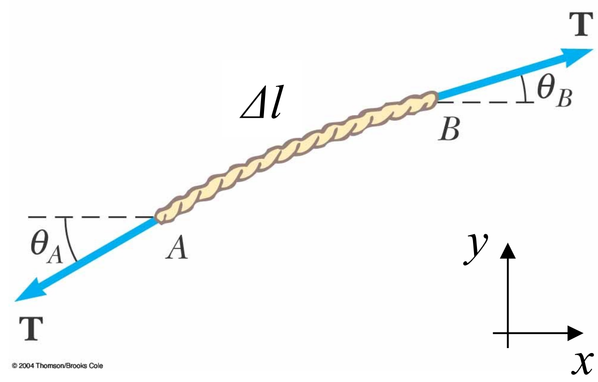
UNIVERSIDAD DEL BIO-BIO

Ecuación de la onda

Todas las funciones de onda $y(t,x)$ son soluciones de la ecuación de onda lineal

Derivamos esta ecuación para ondas en una cuerda

Consideramos un elemento de medio de largo Δl y las fuerzas que actúan sobre él



$$|\sum \vec{F}| = |\sum \vec{F}_y| = |\vec{T}|\sin\theta_B - |\vec{T}|\sin\theta_A$$

Con la aproximación de ángulos pequeños y para un determinado instante de tiempo tenemos:

$$\sin\theta_A \approx \tan\theta_A = \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_A \quad \text{y} \quad \sin\theta_B \approx \tan\theta_B = \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_B$$

UNIVERSIDAD DEL BIO-BIO

UNIVERSIDAD DEL BIO-BIO

Ecuación de la onda

$$|\sum \vec{F}| = |\vec{T}|\left[\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_B - \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_A\right] = m\, a_y = \rho\, \Delta x \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$$\frac{\rho}{|\vec{T}|}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_B - \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_A}{\Delta x}\right] = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}} \qquad \boxed{v = \sqrt{\frac{|\vec{T}|}{\rho}}}$$

Solución General:

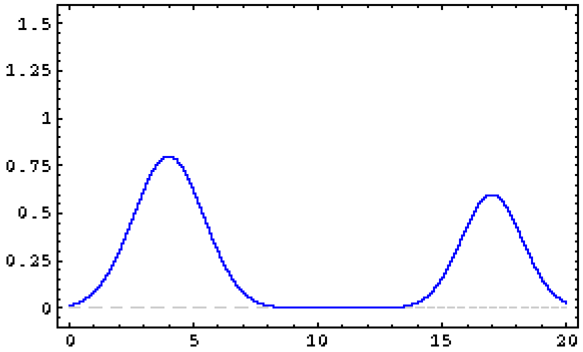
$$y(t,x) = y_m \sin\left[a(x \pm vt) + \phi\right]$$

La periodicidad de las funciones sinusoidales fija la constante a como $2\pi/\lambda$

Principio de Superposición

Cuando varias ondas se combinan en un punto, el desplazamiento de cualquier elemento de medio en un tiempo dado es la suma vectorial de los desplazamientos que produciría cada onda individual que actúe por sí sola, esto se denomina ***Principio de Superposición***

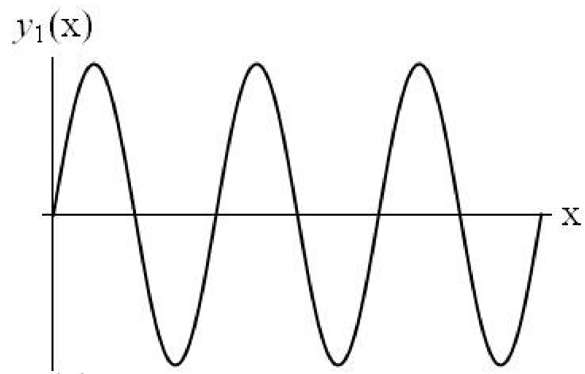
Para ondas mecánicas en medios elásticos ***el principio de superposición es válido cuando*** la fuerza de restitución varía linealmente con el desplazamiento. Para ondas electromagnéticas es siempre válido.

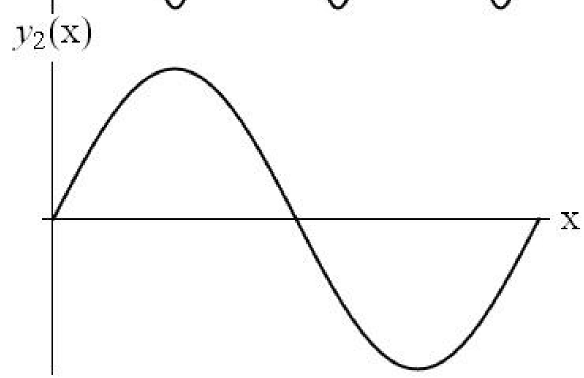


$$y(t,x) = y_1(t,x) + y_2(t,x)$$

Patrones de onda complicados

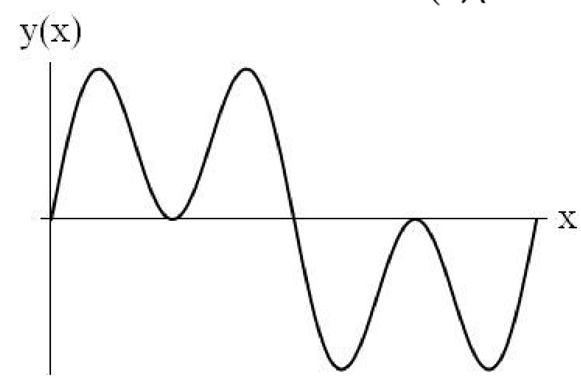
Cuando dos o mas ondas diferentes (que pueden tener diferente amplitud y longitud de onda) se hallan presentes simultáneamente en un medio, podemos aplicar el principio de superposición en cada punto y obtener un patrón de onda más complicado que no se parece a las ondas componentes pero sin embargo constituye una forma de onda viajera aceptable





$$y_1(t,x) = \sin\left(\frac{2\pi}{3\lambda}(x - vt)\right)$$

$$y_2(t,x) = \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}(x - vt)\right)$$



$$y(t,x) = y_1(t,x) + y_2(t,x)$$

UNIVERSIDAD DEL BIO-BIO

Series de Fourier

Cuando el principio de superposición es válido permite analizar un movimiento ondulatorio complicado con una combinación de ondas sencillas.

A principios del s.XIX Jean Baptiste J. Fourier mostró que para construir la forma más general de una onda periódica, sólo necesitamos ondas armónicas simples.

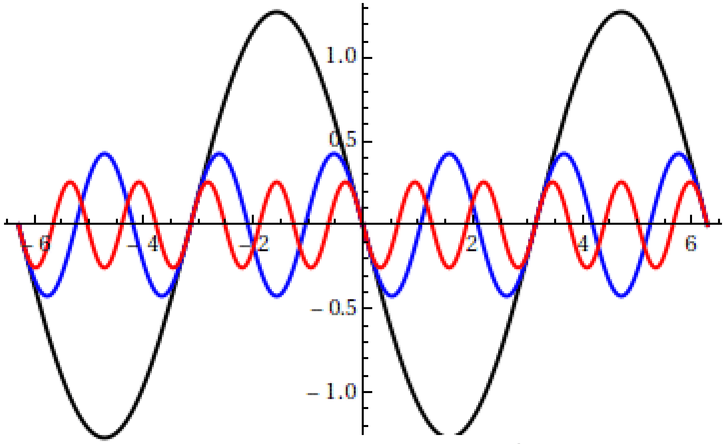
Serie de Fourier

$$y(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n x)+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n x)$$

Si el movimiento no es periódico, la suma se reemplaza por una integral.

Los coeficientes $A_0, A_1, \ldots, B_1, B_2, \ldots$ deben escogerse adecuadamente para la onda que se quiere representar, el procedimiento se denomina ***análisis de Fourier***

Series de Fourier



$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx$$

$$y_n(x) = y_m \frac{4}{\pi}\frac{1}{2n-1}\sin[(2n-1)kx+\pi]$$