

Mecánica Clásica

M. Antonella Cid

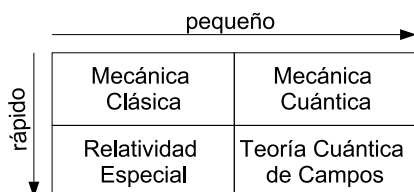
Departamento de Física - Facultad de Ciencias
Universidad del Bío-Bío

29 de mayo de 2012

Introducción

El físico ruso George Gamow establece que fue el pueblo griego el que dio origen a la Física como ciencia. En su libro “Biografía de la Física” menciona, *es interesante notar que mientras las culturas más antiguas como Babilonia y Egipto contribuyeron en gran medida al desarrollo de las matemáticas y la astronomía fueron completamente estériles en el desarrollo de la física. La explicación posible de esta deficiencia, en comparación con la ciencia griega, es que los dioses de Babilonia y Egipto vivían arriba, entre las estrellas, mientras que los dioses de los antiguos griegos vivían a unos 10000 pies (3000 m) de altura en el monte Olimpo.*

La mecánica es una rama de la Física que analiza el movimiento de los cuerpos. La mecánica clásica es una formulación de la mecánica que describe el movimiento de cuerpos que se mueven a velocidades pequeñas comparadas con la velocidad de la luz. Otros campos de estudio de la mecánica son la mecánica cuántica (descripción de partículas subatómicas) y la mecánica relativista (descripción de partículas que se mueven a velocidades cercanas a la de la luz).



Gamow menciona a Arquímedes (287-212 a.C) como el padre de la mecánica. Arquímedes fue un matemático, físico, ingeniero, inventor y astrónomo nacido en Siracusa capital de Sicilia, entre los avances de Arquímedes en física se encuentran estudios en hidrostática (principio de flotación de Arquímedes), estática (principio de la palanca, centro de gravedad), entre otros.

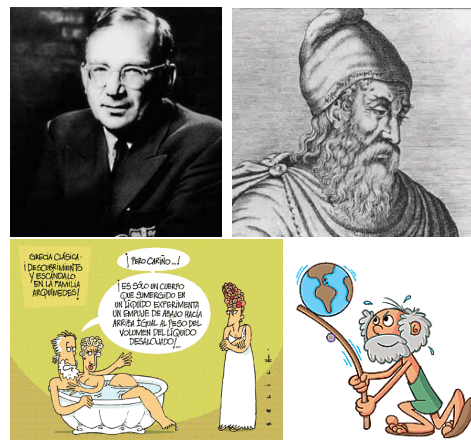


Figura 1: Arriba: de izquierda a derecha, el físico ruso George Gamow (1904-1968) y el matemático, físico, astrónomo e ingeniero griego Arquímedes. Abajo: caricatura del principio de flotación y caricatura del principio de palanca.

La mecánica clásica considera la aplicación de las leyes de Newton para explicar y predecir el movimiento dinámico de partículas puntuales y medios continuos. Como tal, se refiere al comportamiento de objetos macroscópi-



cos familiares como satélites (naturales y artificiales), la atmósfera, los océanos, sólidos y la Tierra misma. Además, el estudio de la mecánica clásica es básico para derivar la descripción cuántica de la materia subatómica.

laboratorio o trabajo teórico) por cuatro datos obtenidos a partir de mediciones:

$$(\vec{r}, t) = \{x_i, t\}_{i=1}^3$$

Conceptos Básicos

Sistema coordinado (SC)

Un sistema coordinado es una construcción puramente matemática para la presentación de relaciones matemáticas. Los valores medidos de las cantidades físicas son independientes de la elección del sistema coordinado.

Ejemplo

Cuando calculamos el perímetro de una circunferencia podemos usar un sistema de coordenadas polares o un sistema de coordenadas cartesianas, el resultado será siempre dos π veces el radio de la circunferencia. Este valor coincide con el valor medido por una huincha calibrada.

Sistema de referencia (SR)

Son físicamente reales y corresponden a un conjunto de instrumentos de medida diseñados para la determinación de cantidades físicas. En el caso más simple, las medidas pueden ser realizadas con la ayuda de tres varillas métricas y un reloj. En general, nos referimos a un **observador** cuando hablamos de un sistema de referencia particular.

Suceso

Cualquier cosa que ocurre en un punto del espacio en un instante dado.

Posición

La posición de un suceso queda operacionalmente definida (por medio de trabajo de

Movimiento

El movimiento de un cuerpo (o partícula) es definido como un continuo de sucesos definidos con respecto a un **sistema de referencia inercial (SRI)**.

Sistema de referencia inercial

Newton lo definió como un sistema de referencia que se encuentra en reposo respecto de las estrellas fijas.

Cinemática de la partícula

Su función es describir el movimiento de una **partícula newtoniana** en función de su velocidad y aceleración. Su objetivo es encontrar la ecuación del movimiento que permita determinar la posición y la velocidad de la partícula en cualquier instante de tiempo.

Dinámica de la partícula

Su función es describir el movimiento de una **partícula newtoniana** en función de la fuerza, la masa y la aceleración. Si \vec{r} es el vector de posición de una partícula y \vec{v} es la velocidad de la partícula, entonces:

$$\vec{v} \equiv \frac{d\vec{r}}{dt} \quad \text{y} \quad \vec{a} \equiv \frac{d\vec{v}}{dt}$$

es la aceleración.

Primera ley de Newton

En un sistema de referencia inercial, los cuerpos permanecen en reposo o se mueven con velocidad constante a menos que una fuerza neta actúe sobre ellos.

Segunda ley de Newton

La mecánica de la partícula está contenida en la segunda ley del movimiento de Newton, la cual establece que existen sistemas de referencia (inerciales) en los cuales el movimiento se describe por la ecuación diferencial:

$$\sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} \quad (1)$$

donde $\vec{p} \equiv m\vec{v}$ es el momentum lineal y $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ es la aceleración. La segunda igualdad en (1) es válida sólo para masas constantes.

La segunda ley de Newton expresa que la suma de todas las fuerzas (externas e internas) actuando sobre el cuerpo es proporcional a la aceleración que experimenta el cuerpo:

$$\sum \vec{F}_i = \sum \vec{F}_i^{(\text{ext})} + \sum \vec{F}_i^{(\text{int})} = m\vec{a} \quad (2)$$

Tercera ley de Newton

A cada acción se corresponde una reacción igual y opuesta. Esto es, si \vec{F}_{21} es la fuerza que ejerce la partícula 1 sobre la partícula 2, entonces:

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$$

donde \vec{F}_{12} es la fuerza que ejerce la partícula 2 sobre la partícula 1 y las fuerzas actúan a lo largo de la línea que separa las partículas.

Relatividad de Galileo

Cualquier SR moviéndose con velocidad constante en relación a un SRI es inercial. De esta manera, dos observadores que se mueven entre ellos con velocidad constante inferirán las mismas leyes del movimiento.

Si \vec{r} y \vec{r}' son las coordenadas del objeto vistas desde dos sistemas de referencia que se mueven con velocidad constante \vec{V} uno respecto del otro (ver Fig. 2) tendremos que $\vec{r}' = \vec{r} - \vec{V}t$ (dado que el tiempo es absoluto en la mecánica newtoniana, es decir, todos los observadores miden el mismo tiempo) de

manera que $\vec{v}' = \vec{v} - \vec{V}$ y $\vec{a}' = \vec{a}$, luego naturalmente $\vec{F}' = \vec{F}$ debido a la segunda ley de Newton.

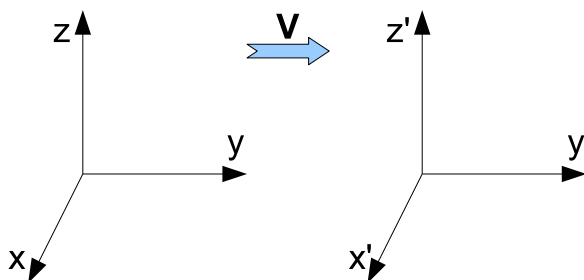


Figura 2: Principio de relatividad de Galileo

Teoremas de conservación

Momentum lineal

Si la suma de todas las fuerzas es cero, entonces el momentum lineal se conserva. La derivación es directa a partir de la Eq.(1).

$$\sum \vec{F} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{p} \text{ es constante}$$

Momentum angular

El momentum angular se define como:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m\vec{r} \times \vec{v}$$

Si ahora calculamos la tasa de cambio del momentum angular para m constante tenemos:

$$\dot{\vec{L}} = \frac{d\vec{L}}{dt} = m\dot{\vec{r}} \times \vec{v} + m\vec{r} \times \dot{\vec{v}} = \sum \vec{r} \times \vec{F}$$

donde en la última igualdad hemos usado la segunda ley de Newton y el hecho de que $\dot{\vec{r}} = \vec{v}$, además $\vec{v} \times \vec{v} = 0$.

El producto $\vec{r} \times \vec{F}$ se denomina **torque**, luego podemos ver que existe una ley de conservación que establece que si la suma de todos los torques es cero, entonces el momentum angular se conserva.

TAREA: A diferencia del momentum lineal \vec{p} , el momentum angular \vec{L} depende de la elección del sistema coordenado.

Trabajo y energía

Sea \vec{F} una fuerza estática aplicada sobre una partícula durante un intervalo de tiempo dt , en el cual ésta experimenta un desplazamiento $d\vec{r}$. Se llama trabajo de una fuerza \vec{F} a la magnitud física escalar dW definida por:

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Consecuentemente, el trabajo hecho para mover la partícula de prueba una distancia finita desde el punto 1 al punto 2 a lo largo de algún camino será:

$$W_{1 \rightarrow 2} = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Reescribiendo convenientemente tenemos:

$$W_{1 \rightarrow 2} = \int_1^2 m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} dt = m \int_1^2 \vec{v} \cdot d\vec{v}$$

$$W_{1 \rightarrow 2} = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2$$

lo cual es independiente del camino escogido.

El término $K = \frac{1}{2} m v^2$ se denomina **energía cinética**, luego podemos decir que, el trabajo hecho al mover la partícula desde el punto 1 al punto 2 es precisamente el incremento de energía cinética.

Fuerzas conservativas

Si el trabajo de una fuerza a lo largo de un camino cerrado es cero, entonces la fuerza se denomina conservativa:

$$W = \oint_c \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

Esto significa que el trabajo hecho por una fuerza conservativa no depende del camino.

Teorema

Si \vec{F} es un **campo** de fuerzas conservativas, entonces existe un **campo** escalar $U(\vec{r})$ tal que:

$$\vec{F} = -\nabla U(\vec{r})$$

$U(\vec{r})$ se denomina **campo** potencial y las superficies $U(\vec{r}) = \text{constante}$ se llaman superficies equipotenciales.

Verificación

Sabemos que si una fuerza es conservativa, entonces:

$$W = \oint_c \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

Del teorema de Stokes deducimos que si:

$$\oint_c \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 \quad \text{entonces} \quad \oint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} = 0$$

dado que la superficie S es arbitraria tenemos que $\nabla \times \vec{F} = 0$. Por otra parte, de un conocido resultado del cálculo diferencial sabemos que $\nabla \times (\nabla U) = 0$, luego si $\nabla \times \vec{F} = 0$ entonces debe existir una función escalar U tal que $\vec{F} = -\nabla U$.

Como consecuencia, para fuerzas conservativas, tenemos la ley de conservación de la energía mecánica:

$$\Delta K = -\Delta U \quad \text{ó} \quad K_i + U_i = K_f + U_f$$

donde los subíndices i y f denotan valores inicial y final respectivamente.

TAREA: Escriba tres propiedades que debe satisfacer una fuerza conservativa.

Sistemas de Partículas

Consideremos un sistema de N partículas en el cual las masas individuales $\{m_i\}$ son constantes en el tiempo y para el cual las leyes de Newton son válidas, las posiciones de las partículas son dadas por los vectores $\{\vec{r}_i\}$ en un SRI.

Definimos el vector centro de masa \vec{R} mediante:

$$\sum m_i \vec{r}_i = \sum m_i \vec{R} \quad \text{ó} \quad \vec{R} = M^{-1} \sum_i m_i \vec{r}_i \quad (3)$$

donde $M \equiv \sum_{i=1}^N m_i$ es la masa total del sistema.

TAREA: Considere un sistema de 3 partículas idénticas (de masa 1) que se sitúan en un plano cartesiano (x,y) formando un



triángulo equilátero en el primer cuadrante. Dos partículas se encuentran en las posiciones $(0,0)$ y $(3,0)$. Encuentre la ubicación de la tercera partícula y la ubicación del centro de masa.

Movimiento del centro de masa

Es conveniente separar la fuerza que actúa sobre la i -ésima partícula \vec{F}_i en una contribución externa y una contribución interna, $\vec{F}_i^{(e)}$ y \vec{F}_{ij} para $i \neq j$ respectivamente, de modo que:

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{(e)} + \sum_j \vec{F}_{ij} \quad \text{para } i \neq j$$

Por ejemplo, para un sistema de 3 partículas, la fuerza que actúa sobre la partícula 1 debido a la acción de una fuerza externa y la acción de las partículas 2 y 3 será: $\vec{F}_1 = \vec{F}_1^{(e)} + \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13}$. \vec{F}_{ii} es cero puesto que un cuerpo no puede ejercer una fuerza sobre sí mismo.

Momentum Lineal

La segunda ley de Newton para la i -ésima partícula queda entonces:

$$\frac{d\vec{p}_i}{dt} = \vec{F}_i = \vec{F}_i^{(e)} + \sum_j \vec{F}_{ij} \quad \text{para } i \neq j$$

Evidentemente el sistema experimentará un movimiento complicado debido a la acción de todas las fuerzas presentes. Aún así, existen ciertas cantidades conservadas que ayudan a simplificar la descripción. En particular, consideremos la aceleración del centro de masa derivando la Eq.(3):

$$M\ddot{\vec{R}} = \sum m_i \ddot{\vec{r}}_i = \sum \dot{\vec{p}}_i = \sum \vec{F}_i^{(e)} + \sum_{ij} \vec{F}_{ij}$$

Ahora, notamos que debido a la tercera ley de Newton $\sum_{ij} \vec{F}_{ij} = 0$ para $i \neq j$. Podemos ver esto fácilmente para un sistema de 3 partículas,

$$\sum_{ij} \vec{F}_{ij} = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \vec{F}_{21} + \vec{F}_{23} + \vec{F}_{31} + \vec{F}_{32}$$

lo cual se anula debido a que $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$ por la tercera ley de Newton.

Luego tenemos que:

$$M\ddot{\vec{R}} = M\dot{\vec{V}} = \sum \vec{F}_i^{(e)} \equiv \vec{F}^{(e)}, \quad (4)$$

es decir, el centro de masa \vec{R} se mueve como si la fuerza externa total $\vec{F}^{(e)}$ actuara en la masa total M concentrada en la posición \vec{R} . Como consecuencia, el momentum total del sistema:

$$\vec{P} = \sum \vec{p}_i = \sum m_i \dot{\vec{r}}_i = \sum m_i \vec{v}_i = M\dot{\vec{R}} = M\vec{V}$$

es un vector constante si $\vec{F}^{(e)}$ es nulo.

Momentum angular

El momentum angular total para un sistema de partículas se define como:

$$\vec{L} = \sum \vec{r}_i \times \vec{p}_i,$$

luego su derivada temporal queda:

$$\dot{\vec{L}} = \sum \dot{\vec{r}}_i \times \vec{p}_i + \sum \vec{r}_i \times \dot{\vec{p}}_i = \sum \vec{r}_i \times \dot{\vec{p}}_i$$

donde el primer término se anula porque los vectores \vec{r}_i y \vec{p}_i son paralelos, luego tenemos:

$$\dot{\vec{L}} = \sum \vec{r}_i \times (\vec{F}_i^{(e)} + \sum_j \vec{F}_{ij}) \quad \text{para } i \neq j$$

donde podemos hacer la siguiente descomposición:

$$\begin{aligned} \sum_{ij} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} &= \frac{1}{2} \sum_{ij} (\vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} + \vec{r}_j \times \vec{F}_{ji}) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{ij} (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}_{ij} = 0 \end{aligned}$$

el último término se anula puesto que el vector $\vec{r}_i - \vec{r}_j$ es paralelo al vector \vec{F}_{ij} .

Finalmente tenemos:

$$\dot{\vec{L}} = \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(e)}$$

lo cual indica que si el producto de la derecha es cero (el torque externo total) entonces el momentum angular será una constante. Note que los cambios en \vec{L} sólo se deben a las acción de fuerzas externas.

TAREA: Revisar los capítulos 1-3 del libro "Mechanics" del autor Symon.



Energía

La energía cinética total se define como la suma de las contribuciones individuales,

$$K = \frac{1}{2} \sum m_i v_i^2 \quad (5)$$

Podemos separar esta expresión considerando la energía asociada al movimiento del centro de masa y la energía asociada al movimiento interno en relación al centro de masa \vec{R} ,

$$K = K_{cm} + K' \quad (6)$$

donde $K_{cm} = \frac{1}{2}MV^2$ y $K' = \frac{1}{2} \sum m_i v_i'^2$, donde v_i' es la velocidad de la i -ésima partícula del sistema medida en relación al centro de masa.

TAREA: Obtenga la Ec.(6) a partir de la Ec.(5) cambiando el sistema de referencia, desde uno general a uno que tiene su origen en el centro de masa.

Ahora, cuando consideramos fuerzas conservativas podemos tener dos contribuciones:

$$\begin{aligned} \vec{F}_i &= \vec{F}_i^{(e)} + \sum_j \vec{F}_{ij} \quad \text{para} \\ \vec{F}_i^{(e)} &= -\nabla_i U^{(e)}(\vec{r}_i) \\ \vec{F}_{ij} &= -\nabla_{ij} U(\vec{r}_{ij}) \end{aligned}$$

donde ∇_{ij} denota el gradiente respecto de la dirección $\vec{r}_{ij} = \vec{r}_i - \vec{r}_j$. Recuerde que \vec{F}_{ij} es la fuerza que siente la partícula i debido a la acción de la partícula j .

Supongamos que el sistema cambia de alguna manera pasando de la configuración 1 a la configuración 2, moviendo cada partícula a través de una trayectoria establecida. El trabajo hecho por el sistema en este caso será:

$$\begin{aligned} W_{1 \rightarrow 2} &= \sum \int_1^2 \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i \\ &= \sum \int_1^2 \vec{F}_i^{(e)} \cdot d\vec{r}_i + \sum_{ij} \int_1^2 \vec{F}_{ij} \cdot d\vec{r}_i \end{aligned}$$

No es difícil notar que:

$$\begin{aligned} \sum_{ij} \int_1^2 \vec{F}_{ij} \cdot d\vec{r}_i &= \frac{1}{2} \sum_{ij} \int_1^2 \vec{F}_{ij} \cdot (d\vec{r}_i - d\vec{r}_j) \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{ij} \int_1^2 \nabla_{ij} U(\vec{r}_{ij}) \cdot (d\vec{r}_i - d\vec{r}_j) \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{ij} [U(\vec{r}_{ij})]_1^2 \end{aligned}$$

Al calcular el trabajo hecho por las fuerzas externas notamos que, al igual que en caso de una partícula, encontramos la forma de una ley de conservación:

$$K + \sum U^{(e)}(\vec{r}_i) + \frac{1}{2} \sum_{ij} U(\vec{r}_{ij}) = K + U = \text{constante} \quad (7)$$

TAREA: Utilizando un procedimiento análogo al que se utiliza en el caso de una partícula, muestre que es posible escribir una ley de conservación de la energía para un sistema de partículas (en términos de la energía cinética total y la energía potencial total), tal como se plantea en la Ec.(7).

Movimientos generados por fuerzas centrales

Para estudiar movimientos generados por fuerzas centrales es conveniente usar coordenadas polares.

Coordenadas polares

El sistema de coordenadas polares es un sistema de coordenadas bidimensional en el cual cada punto en el plano está determinado por la distancia a un punto fijo y un ángulo respecto de una dirección fija (ver Fig. 3).

Vectores unitarios

Podemos relacionar los vectores unitarios en coordenadas cartesianas, \hat{i} y \hat{j} , con los vectores unitarios en coordenadas polares, \hat{r} y $\hat{\theta}$,

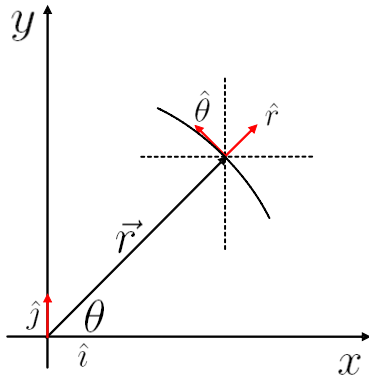


Figura 3: Los vectores denotados con un gorro son vectores unitarios (vectores de módulo 1). El vector \vec{r} es el vector posición de un cuerpo en el plano coordenado xy . Notamos que $\vec{r} = r\hat{r}$ donde $r = |\vec{r}|$ denota el módulo del vector \vec{r} y \hat{r} es la dirección radial.

a partir de la geometría de la Fig. 3 de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\hat{r} &= |\hat{r}| \cos \theta \hat{i} + |\hat{r}| \sin \theta \hat{j} = \cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j} \\ \hat{\theta} &= |\hat{\theta}| \cos(90 - \theta)(-\hat{i}) + |\hat{\theta}| \sin(90 - \theta) \hat{j} \\ &= -\sin \theta \hat{i} + \cos \theta \hat{j}\end{aligned}$$

Note que dado que los vectores unitarios \hat{r} y $\hat{\theta}$ cambian de dirección mientras transcurre el tiempo.

Velocidad

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d(r\hat{r})}{dt} = \frac{dr}{dt}\hat{r} + r\frac{d\hat{r}}{dt} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\hat{r}} \\ &= \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}\end{aligned}\quad (8)$$

TAREA: Mostrar que $\dot{\hat{r}} = \dot{\theta}\hat{\theta}$.

Aceleración

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d}{dt}(\dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}) \\ &= \ddot{r}\hat{r} + \dot{r}\dot{\hat{r}} + \dot{r}\dot{\theta}\hat{\theta} + r\ddot{\theta}\hat{\theta} + r\dot{\theta}\dot{\hat{\theta}} \\ &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{\theta}\end{aligned}$$

TAREA: Mostrar que $\dot{\hat{\theta}} = -\dot{\theta}\hat{r}$.

Rapidez Areolar

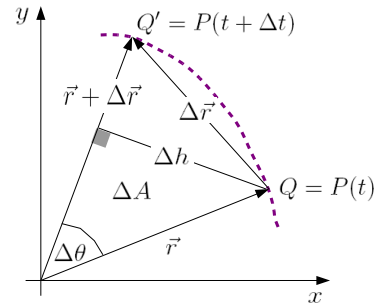


Figura 4: Esquema rapidez areolar

En la Fig. 4 consideremos dos posiciones de una partícula, en el instante t y en el instante $t + \Delta t$. ΔA es el área que barre el vector posición cuando se mueve desde la posición Q hasta la posición Q' .

La rapidez areolar se define como:

$$v_A = \frac{dA}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta A}{\Delta t}$$

Calculamos ΔA a partir de la Fig. 4 como:

$$\begin{aligned}\Delta A &= \frac{1}{2}(r + \Delta r)\Delta h = \frac{1}{2}(r + \Delta r)r \sin \Delta \theta \\ &= \frac{1}{2}(r^2 \sin \Delta \theta + r\Delta r \sin \Delta \theta)\end{aligned}$$

Dado que nos interesa la situación cuando Δt es muy pequeño (en ese caso $\Delta \theta$ también es pequeño) utilizamos la **aproximación de ángulos pequeños**, la cual indica que $\sin \theta \approx \theta$, luego:

$$\Delta A = \frac{1}{2}(r^2 \Delta \theta + r\Delta r \Delta \theta)$$

Dado que Δr y $\Delta \theta$ son pequeños, el término $\Delta r \Delta \theta$ es mucho más pequeño que los términos por separado, por lo cual es considerado un término de segundo orden y es despreciado en el análisis. Finalmente, tenemos que:

$$\begin{aligned}v_A &= \frac{dA}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta A}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{r^2 \Delta \theta}{2\Delta t} \right) = \frac{1}{2}r^2 \frac{d\theta}{dt} \\ &= \frac{1}{2}r^2 \dot{\theta}\end{aligned}$$



Fuerza central

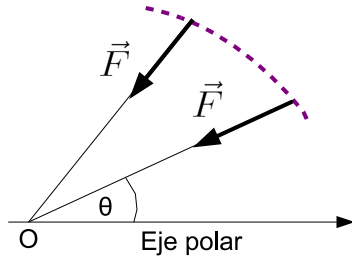


Figura 5: Esquema de una fuerza central en coordenadas polares

Una fuerza central es un tipo de fuerza cuya dirección pasa siempre por un punto fijo O y cuya magnitud es función únicamente de la distancia r al punto O (ver Fig. 5):

$$\vec{F} = f(r)\hat{r}$$

Físicamente, tal fuerza representa una atracción si $f(r) < 0$ o una repulsión si $f(r) > 0$.

Teorema

Las fuerzas centrales son conservativas.

TAREA: Demuestre que si $\vec{F} = f(r)\hat{r}$ entonces $\nabla \times \vec{F} = 0$, luego es posible escribir $\vec{F} = -\nabla U$ y \vec{F} sería una fuerza conservativa.

Teorema

En un movimiento central la energía mecánica se conserva, es decir,

$$K + U = \text{constante}$$

TAREA: Mostrar que la energía se conserva en un movimiento central.

Teorema

Un movimiento central es un movimiento que ocurre en un plano.

Verificación

Sea \vec{L}_0 el momentum angular con respecto a un eje que pasa por O (ver Fig. 5), entonces, $\vec{\tau}_0 = \frac{d\vec{L}_0}{dt}$ es el torque respecto a este eje que pasa por O . Dado que $\vec{\tau}_0 = \vec{r} \times \vec{F} = r\hat{r} \times f(r)\hat{r} = rf(r)(\hat{r} \times \hat{r}) = 0$ entonces, $\frac{d\vec{L}_0}{dt} = 0$, es decir, \vec{L}_0 es una constante.

Por otra parte, dado que $\vec{L}_0 = \vec{r} \times \vec{p} = m\vec{r} \times \vec{v}$ tenemos que \vec{L}_0 es perpendicular al plano generado por \vec{r} y \vec{v} luego, para \vec{L}_0 constante el movimiento siempre ocurrirá en el plano definido por \vec{r} y \vec{v} , por lo tanto, un movimiento central ocurre en un plano.

Ecuación de Binet

En un movimiento central la fuerza tiene sólo una componente radial, por consiguiente, la aceleración también tiene sólo una componente radial, es decir,

$$\vec{a} = a_r\hat{r} \quad \text{y} \quad \vec{a}_\theta = a_\theta\hat{\theta} = 0$$

luego,

$$\begin{aligned} a_\theta &= 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = \frac{1}{r} \frac{d}{dt} (r^2\dot{\theta}) = \frac{2}{r} \frac{d}{dt} \left(\frac{r^2\dot{\theta}}{2} \right) = 0 \\ &= \frac{2}{r} \frac{dv_A}{dt} = 0 \end{aligned}$$

Lo cual muestra que en un movimiento central la rapidez areolar v_A es constante. Luego es válido postular que $\dot{\theta} = \frac{C}{r^2}$ donde C es una constante arbitraria.

Por otra parte, dado que $r(\theta)$ es la trayectoria del movimiento tenemos que:

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \dot{\theta} \\ &= \frac{dr}{d\theta} \frac{C}{r^2} = -C \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{r} \right) \\ \ddot{r} &= \frac{d\dot{r}}{dt} = \frac{d\dot{r}}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} \frac{d\dot{r}}{d\theta} \\ &= -C\dot{\theta} \frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{C^2}{r^2} \frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} \right) \end{aligned} \tag{9}$$



Ahora, la ecuación de Binet, la cual determina la aceleración radial de un objeto bajo la acción de una fuerza central queda:

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{C^2}{r^2} \left[\frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} \right]$$

Por otra parte, para el momentum angular constante \vec{L}_0 tenemos: $L_0 = m|\vec{r} \times \vec{v}| = |mr\hat{r} \times (\dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta})| = mr^2\dot{\theta}|\hat{r} \times \hat{\theta}|$ de donde podemos ver que $C = r^2\dot{\theta} = \frac{L_0}{m}$, finalmente:

$$a_r = -\frac{L_0^2}{(mr)^2} \left[\frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} \right]$$

Puesto que $\vec{F} = f(r)\hat{r} = ma_r\hat{r}$, tenemos:

$$f(r) = -\frac{L_0^2}{mr^2} \left[\frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} \right] \quad (10)$$

EJERCICIO: Muestre que la fuerza necesaria para que una masa m se mueva en la trayectoria mostrada en la Fig. 6, con el centro de fuerzas ubicado en el origen del sistema coordenado xy , es dada por $f(r) \propto \frac{1}{r^5}$

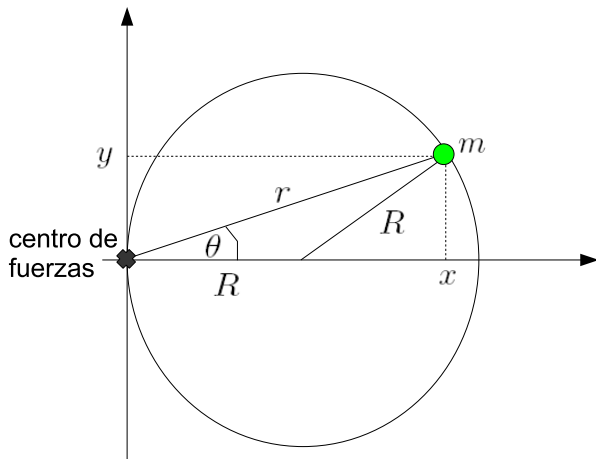


Figura 6: Ejercicio fuerzas centrales

Gravitación Universal

En 1609 Kepler publica sus dos primeras leyes basadas en el análisis del trabajo del astrónomo danés Tycho Brahe. La tercera ley fue publicada en 1619. El trabajo de Kepler

fue revolucionario puesto que va contra el pensamiento de la época que establecía que las órbitas planetarias deberían ser círculos perfectos con el Sol en el centro.

Las leyes de Kepler establecen que:

- La órbita de cada planeta es una elipse, con el Sol en uno de los focos
- El radio vector que une un planeta y el Sol barre áreas iguales en tiempos iguales o, la velocidad areolar es constante
- El cuadrado del período orbital de un planeta es directamente proporcional al cubo de la longitud del semieje mayor

En 1687 Newton publicó los “Philosophiae Naturalis Principia Mathematica” donde se plantea por primera vez la Ley de Gravitación Universal. Esta ley establece que la fuerza atractiva entre dos masas, debido a la acción de la gravedad, es proporcional a las masas (m_1 y m_2) e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia (r) que separa estas masas:

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

La constante de gravitación universal G es una constante fundamental, su valor fue estimado por primera vez un siglo después del trabajo de Newton. El valor actual de la constante G es:

$$G = (6,67428 \pm 0,00067) \times 10^{-11} [\text{Nm}^2\text{kg}^2]$$

En la Ley de Gravitación Universal las masas son consideradas puntuales. Por otra parte, esta ley es válida únicamente cuando las masas son suficientemente pequeñas (o el campo gravitacional no es muy intenso). En el caso más general se debe utilizar la Relatividad General, postulada por Einstein en 1915.

La Ley de Gravitación Universal tiene la misma forma que la ley de Coulomb, la cual establece el valor de la fuerza eléctrica entre dos partículas cargadas eléctricamente, ambas fuerzas decaen con el cuadrado de la distancia. La diferencia parece ser que la fuerza eléctrica puede ser atractiva o repulsiva,



mientras que la fuerza de gravedad es sólo atractiva.



Figura 7: Tycho Brahe. Johannes Kepler. Isaac Newton

Esta sección busca mostrar que es posible deducir las leyes de Kepler (empíricas) a partir de las leyes de Newton (teóricas) y el análisis de fuerzas centrales que hemos desarrollado hasta ahora.

Las leyes de Kepler

Estudiamos el movimiento de un objeto sometido a la acción de una fuerza central atractiva dependiente del inverso del cuadrado de la distancia. De acuerdo a la Ley de Gravitación Universal esta fuerza es dada por:

$$\vec{F} = -\frac{k}{r^2}\hat{r}$$

donde k es una constante positiva. Dada la forma simple que toma la fuerza es conveniente usar la ecuación de Binet en la forma de la Ec.(10):

$$f(r) = -\frac{L_0^2}{mr^2} \left[\frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} \right] = -\frac{k}{r^2}$$

de donde obtenemos la siguiente ecuación diferencial lineal ordinaria con coeficientes constantes:

$$\frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} = \frac{km}{L_0^2}$$

Por conveniencia, para resolver la ecuación diferencial, utilizamos el cambio de variables $\frac{1}{r} \rightarrow u$:

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{km}{L_0^2}$$

Sabemos que la solución más general de esta **ecuación diferencial** es de la forma $u = u_h + u_p$ donde u_h denota la solución homogénea y u_p la solución particular. Es fácil notar que la solución homogénea corresponde a un oscilador armónico simple, mientras que una solución particular sería $u_p = \frac{km}{L_0^2}$ (constante), luego la solución queda:

$$u = A \cos(\theta - \theta_0) + \frac{km}{L_0^2}$$

Volviendo a la variable original r , obtenemos:

$$r = \frac{\frac{L_0^2}{km}}{1 + \frac{AL_0^2}{km} \cos(\theta - \theta_0)}$$

Finalmente, definiendo $p = \frac{L_0^2}{km}$, $\epsilon = \frac{AL_0^2}{km}$ y eligiendo $\theta_0 = 0$ queda:

$$r = \frac{p}{1 + \epsilon \cos \theta} \quad (11)$$

Esta forma para r es conocida en la literatura, representa las denominadas secciones cónicas, las cuales dependen del valor del parámetro ϵ , que en este contexto se denomina excentricidad.

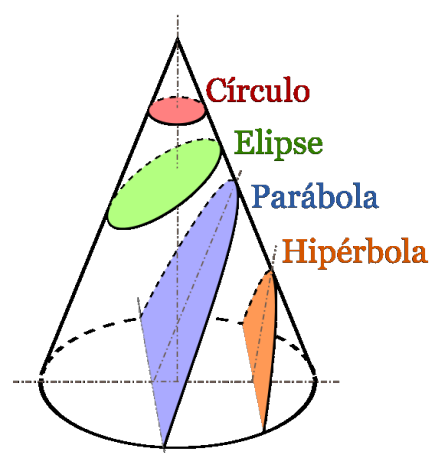


Figura 8: Secciones cónicas

Ahora buscamos relacionar la excentricidad con las diferentes constantes de movimiento del sistema para ver qué tipo de sección cónica nos entregan diferentes condiciones.

Recordamos que en un movimiento central la energía total se conserva (al igual que el momentum angular):

$$E = K + U = \text{constante}$$

Para la energía cinética tenemos:

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\vec{v} \cdot \vec{v}) = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)$$

donde hemos usado la Ec.(8). Usando la Ec.(9) y dado que $L_0 = mr^2\dot{\theta}$ tenemos: !!

$$K = \frac{1}{2} \frac{L_0^2}{m^2} \left(\left[\frac{du}{d\theta} \right]^2 + u^2 \right)$$

Por otra parte, podemos obtener la energía potencial integrando la fuerza de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} U &= \int -\vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int f(r)dr(\hat{r} \cdot \hat{r}) \\ &= - \int -\frac{k}{r^2}dr = -\frac{k}{r} \end{aligned}$$

luego, $U = -ku$. Sumando K y U , además de utilizar el hecho de que $\frac{L_0^2}{mp^2} = \frac{k}{p} = \frac{mk^2}{L_0^2}$: !!

$$\begin{aligned} E &= K + U = \frac{1}{2} \frac{L_0^2}{m^2} \left(\left[\frac{du}{d\theta} \right]^2 + u^2 \right) - ku \\ &= \frac{mk^2}{L_0^2} \left(\frac{1}{2}(1 + \epsilon^2 + 2\epsilon \cos \theta) - 1 - \epsilon \cos \theta \right) \\ &= \frac{mk^2}{2L_0^2} (\epsilon^2 - 1) \end{aligned}$$

de donde obtenemos:

$$\epsilon = \sqrt{\frac{2L_0^2 E}{mk^2} + 1} \quad (12)$$

Entonces, el movimiento de una partícula sometida a la acción de una fuerza central dependiente del inverso del cuadrado es descrito por la Ec.(11) donde la excentricidad queda definida por la Ec.(12).

TAREA: Derive la tercera ley de Kepler utilizando el análisis anterior.

ϵ	Trayectoria	Energía
$\epsilon = 1$	parábola	$E = 0$
$\epsilon > 1$	hiperbola	$E > 0$
$\epsilon < 1$	elipse	$E < 0$
$\epsilon = 0$	circunferencia	$E = -\frac{mk^2}{2L_0^2}$

Cuadro 1: Clasificación de las trayectorias (en secciones cónicas) en relación a la energía

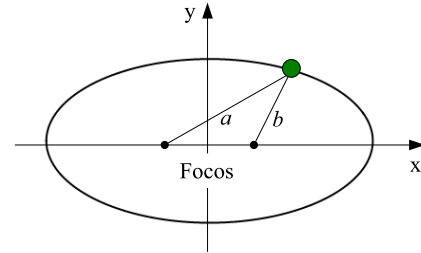


Figura 9: Elipse. La suma $a + b$ se mantiene constante.

Ecuaciones paramétricas de la trayectoria

Hasta ahora sabemos que las ecuaciones:

$$a_r = \frac{f(r)}{m} \quad \text{y} \quad a_\theta = 0$$

describen el movimiento de un cuerpo sometido a la acción de una fuerza central. Estas ecuaciones pueden reescribirse de la siguiente manera:

$$L_0 = mr^2\dot{\theta} \quad (13)$$

$$E = \frac{1}{2}mr\dot{r}^2 + \frac{L_0^2}{2mr^2} + U(r) \quad (14)$$

Para conocer la fenomenología involucrada cuando un sistema es sometido a una fuerza central debemos resolver las ecuaciones anteriores. En principio, integrando la Ec.(13) podemos conocer el ángulo θ :

$$\theta(t) = \theta_0 + \frac{L_0}{m} \int_0^t \frac{dt}{r(t)^2} \quad (15)$$

y considerando la Ec.(14) obtenemos:

$$t = \int_{r_0}^r \sqrt{\frac{2}{m}(E - U(r)) - \frac{L_0^2}{m^2 r^2}} dr \quad (16)$$



A partir de las Ecs.(15)-(16) podemos, en principio, obtener $r(t)$ y $r(\theta)$.

Problema unidimensional equivalente

Aunque en la práctica el problema queda resuelto, las integrales (15) y (16) no son fáciles de manejar. Generalmente, en un caso concreto resulta más sencillo realizar la integración de otra manera. Estudiemos el caso general sin hacer uso de una determinada ley de fuerza.

Consideremos un movimiento unidimensional a lo largo del eje x debido a la acción de una fuerza $\vec{F} = \vec{F}(x)$. Si \vec{F} es conservativa, entonces:

$$\dot{x} = \sqrt{\frac{2}{m}(E - U)}$$

de donde vemos que:

$$t = \int_{x_0}^x \sqrt{\frac{2}{m}(E - U)} dx \quad (17)$$

Comparando las Ecs.(16) y (17) notamos la gran similitud entre el problema de fuerzas centrales y el problema unidimensional. Esta similitud motiva la siguiente definición de un potencial efectivo U_{ef} como:

$$U_{ef} = U(r) + \frac{L_0^2}{2mr^2}$$

de modo que ahora tenemos:

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + U_{ef} \quad (18)$$

El término $U_c = \frac{L_0^2}{2mr^2}$ es parte de la energía cinética y no es potencial en el sentido usual, pero podemos asociarlo a una energía potencial debido a que es un término que no depende de la velocidad (L_0 es constante en un movimiento central). El término U_c es la energía potencial asociada a la fuerza centrífuga (fuerza aparente que percibe un observador en un sistema de referencia no inercial) y se denomina potencial centrífugo. Notamos que la fuerza asociada a este potencial es de la forma $F_c = mr\dot{\theta}^2$!!.

Límites de la región de movimiento

Los límites de la región de movimiento son los valores de r para los cuales se cumple que:

$$E = U_{ef} \quad \text{ó} \quad \dot{r} = 0$$

$\dot{r} = 0$ define un punto de retorno de la trayectoria. Si existe un valor mínimo de r tal que $r > r_{min}$ entonces el movimiento es infinito, es decir, la trayectoria comienza y termina en el infinito.

Si existe r_{min} y r_{max} , entonces el movimiento es finito, lo cual no necesariamente significa que la trayectoria sea cerrada.

Ejercicio: Muestre que la rapidez de una partícula en cualquier punto de una trayectoria parabólica es $\sqrt{2}$ veces la rapidez en alguna órbita circular que pasa por el mismo punto.

Método del potencial efectivo

Examinemos el caso de una fuerza del tipo $f(r) = -\frac{k}{r^2}$ (el potencial correspondiente será $U = -\frac{k}{r}$). El análisis cualitativo se lleva a cabo en un gráfico U_{ef} versus r .

La barrera centrífuga impide que la partícula caiga al centro de fuerzas, cualquiera que sea la energía que ella tenga. Esta barrera es repulsiva siempre que $L_0 \neq 0$.

La región permitida para el movimiento queda delimitada por la condición $E > U_{ef}$, la cual proviene de la Eq.(18).

Estudiemos las diferentes situaciones que se presentan cuando estudiamos un potencial efectivo del tipo:

$$U_{ef} = -\frac{k}{r} + \frac{L_0^2}{2mr^2}$$

- Caso $k = 0$ y $L_0 \neq 0$: corresponde al caso 1 en la Fig. 10, en el cual el potencial efectivo coincide con el potencial centrífugo. Sólo se presenta cuando $L_0 \neq 0$. Una partícula se acerca al origen desde el infinito y se encuentra con una barrera en $r = r_3$, de modo que $r > r_3$. En este caso la partícula se mueve en línea recta puesto que no hay una fuerza neta. Recuerde

que el momentum angular depende de la elección de sistema coordenado.

- Caso $k < 0$ y $L_0 = 0$: corresponde al caso 2 en la Fig. 10. La partícula proveniente del infinito se encuentra con una barrera en $r = r_5$ debido a un potencial repulsivo.
- Caso $k > 0$ y $L_0 = 0$: corresponde al caso 3 en la Fig. 10. En este caso la partícula está confinada a moverse en una región donde $r < r_5$. Se trata de órbitas acotadas en un potencial atractivo.
- Caso $k > 0$ y $L_0 \neq 0$: corresponde al caso 4 en la Fig. 10. En este caso existen tres posibilidades:
 - Órbitas abiertas con energías del tipo E_1 , donde se presenta una barrera para un valor de r .
 - Órbitas acotadas con energías del tipo E_2 donde el objeto puede moverse en la región $r_1 < r < r_4$. Note que en este caso particular las órbitas son cerradas pero en general podrían ser sólo acotadas y no cerradas.
 - Órbitas con r constante (círculos) para la energía E_3 .

Los puntos de retorno de la trayectoria corresponden a puntos donde $\dot{r} = 0$, es decir, puntos donde $E = U_{ef}$ o los puntos de intersección entre las líneas horizontales representando las energías y las curvas representando el potencial efectivo.

Movimiento de dos cuerpos en un potencial central

Hasta ahora hemos asumido que una partícula de masa m se mueve debido a la presencia de un potencial central. Sin embargo, este tipo de movimiento generalmente involucra dos masas, m_1 y m_2 , que interactúan mutuamente en ausencia de fuerzas externas.

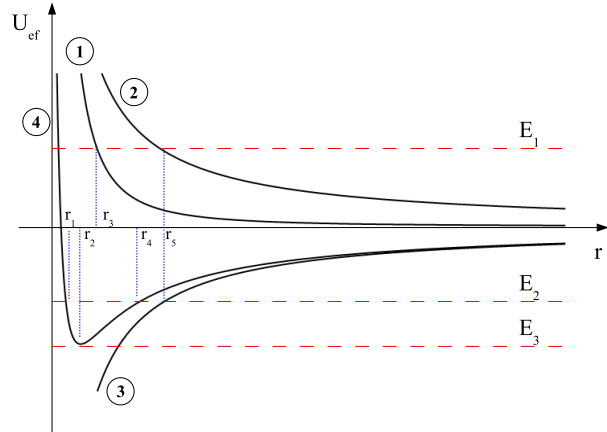


Figura 10: Método del potencial efectivo

Para analizar la dinámica de este sistema de partículas estudiamos las relaciones entre los vectores definidos en la Fig. 11.

Respecto de un SR O el vector centro de masa es dado por \vec{R} (Fig. 11), mientras que los vectores \vec{r}_1 y \vec{r}_2 se relacionan mediante: $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$.

De la definición de centro de masa (Eq.(3)) podemos fácilmente notar que:

$$\vec{r}_1 = \vec{R} + \frac{m_2 \vec{r}}{M} \quad \text{y} \quad \vec{r}_2 = \vec{R} - \frac{m_1 \vec{r}}{M}$$

donde $M = m_1 + m_2$.

Por otra parte, para un sistema de partículas la aceleración del sistema se debe únicamente a la presencia de fuerzas externas, si estas no están presentes $\ddot{\vec{R}} = 0$, Eq.(4). Además, en ausencia de fuerzas externas:

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = -\nabla_1 U(r) = -\frac{dU}{dr} \left(\frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{r} \right)$$

$$m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = -\nabla_2 U(r) = -\frac{dU}{dr} \left(\frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{r} \right)$$

Combinando las relaciones anteriores finalmente obtenemos:

$$\mu \ddot{\vec{r}} = -\frac{dU}{dr} \hat{r}$$

donde $\mu = \frac{m_1 m_2}{M}$. Esta última ecuación reduce la dinámica del sistema de dos partículas a un sistema de una partícula equivalente, pero

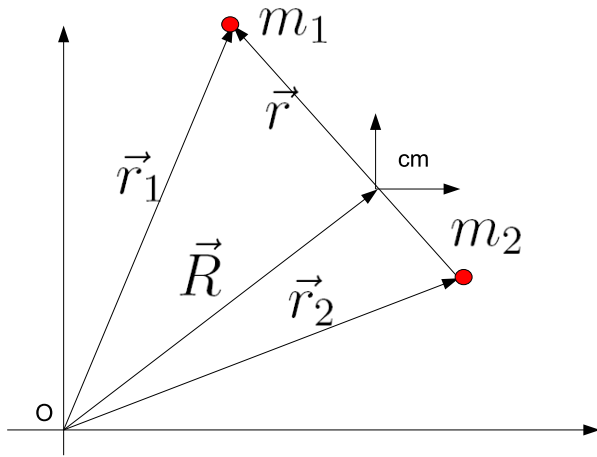


Figura 11: Movimiento de dos cuerpos en un potencial central

reemplazando la masa de la partícula por la masa reducida μ del sistema .

La energía cinética en torno al centro de masa K' en la Eq.(6) será:

$$K' = \frac{1}{2}m_1\dot{r}_1'^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{r}_2'^2$$

donde prima denota una cantidad medida en un SR que tiene su origen en el centro de masa (cm). Dado que:

$$\vec{r}'_1 = \vec{r}_1 - \vec{R} \quad \text{y} \quad \vec{r}'_2 = \vec{r}_2 - \vec{R}$$

tenemos:

$$\begin{aligned} \vec{r}'_1 &= \vec{r}_1 - \frac{m_1\vec{r}_1}{m_1 + m_2} - \frac{m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2} \\ &= \frac{m_2(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{m_1 + m_2} = \frac{\mu\vec{r}}{m_1} \end{aligned}$$

y $\vec{r}'_2 = -\frac{\mu\vec{r}}{m_2}$. Finalmente obtenemos,

$$K' = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2$$

Scattering

Consideremos órbitas abiertas donde la energía es positiva, en particular, órbitas hiperbólicas. Una hipérbola se define matemáticamente como la figura geométrica que cumple con $d' - d = \pm 2a$ (ver Fig. 12), donde

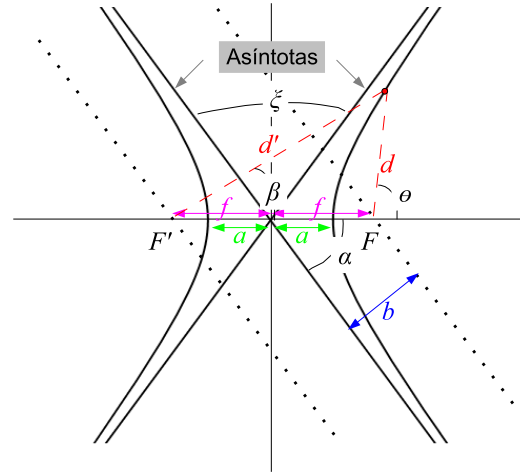


Figura 12: Trayectorias hiperbólicas

el signo positivo es para la rama derecha en la figura y el signo negativo es para la rama izquierda. Las distancias d' y d son las distancias entre un punto en la hipérbola y cada uno de los focos F y F' en la figura. La suma de estas distancias debe ser igual a la separación mínima entre las dos ramas de la hipérbola.

De la geometría de la Fig. 12 notamos que:

$$\begin{aligned} d \sin \theta &= d' \sin \beta \\ d \cos \theta &= d' \cos \beta - 2f \end{aligned}$$

Ejercicio: Combinando estas relaciones encontramos que:

$$f^2 + rf \cos \theta = ar + a^2$$

donde hemos escogido un SR centrado en F , luego $r = d$.

Por otra parte, geoméricamente, para las secciones cónicas tenemos que la excentricidad ϵ se define a partir de la relación $f = a\epsilon$. Luego, en términos de la excentricidad, la relación que define la elipse queda:

$$r = \frac{a(\epsilon^2 - 1)}{1 - \epsilon \cos \theta}$$

Reduerde que el caso de una hipérbola corresponde a $\epsilon > 1$. Comparando esta última expresión con la que habíamos obtenido para el caso de una sección cónica en general (Eq.(11)) tenemos que $a(\epsilon^2 - 1) = p = \frac{L_0^2}{k\mu}$.

De esta relación notamos que, dado que $\epsilon > 1$, $k > 0$ (potenciales atractivos) corresponden a la rama derecha de la hipérbola, mientras que $k < 0$ (potenciales repulsivos) corresponden a la rama izquierda de la hipérbola.

Para calcular la energía asociada al sistema (constante), podemos considerar el caso particular de la energía asociada a una partícula que se encuentra en infinito !!:

$$\begin{aligned}
 E &= \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{L_0^2}{2\mu r^2} - \frac{k}{r} \approx \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 \\
 &= \frac{1}{2}\mu \left(\frac{p\epsilon \sin\theta}{(1-\epsilon \cos\theta)^2} \frac{L_0}{\mu r^2} \right)^2 \\
 &= \frac{1}{2}\mu \left(\frac{\epsilon \sin\theta L_0}{p\mu} \right)^2 = \frac{\epsilon^2 \sin^2\theta k^2 \mu}{2L_0^2} \\
 &= \dots = \frac{k^2 \mu}{2L_0^2} (\epsilon^2 - 1)
 \end{aligned}$$

De aquí notamos que es posible escribir la excentricidad en términos de la energía como:

$$\epsilon = \left(1 + \frac{2L_0^2 E}{k^2 \mu} \right)^{1/2}$$

Además, considerando que la energía en el infinito y el momentum angular en el infinito son dados por: $E = \frac{1}{2}\mu v_\infty^2$ y $L_0 = \mu v_\infty b$ respectivamente **TAREA**, encontramos que:

$$\epsilon = \sqrt{1 + \left(\frac{\mu v_\infty^2 b}{k} \right)^2}$$

Por otra parte, la mínima distancia de acercamiento es dada por:

$$r_{min} = f - a = (\epsilon - 1)a = \sqrt{\frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 1}} b$$

Entonces, de acuerdo a los esperado, r_{min} se incrementa cuando v_∞ se incrementa, esto es, los objetos que se mueven más rápido se deflectan menos.

Para algunas aplicaciones es muy importante poder determinar el ángulo de deflexión ξ en la Fig. 12, el cual corresponde a la diferencia angular entre la dirección inicial y la dirección final.

De la Fig. 12 notamos que $\xi = \pi - 2\alpha$, luego tenemos:

$$\cot \frac{\xi}{2} = \tan \alpha = \sqrt{\epsilon^2 - 1} \quad (19)$$

donde hemos usado: $\cos \alpha = \frac{1}{\epsilon}$, **TAREA**.

Notamos que:

- $v_\infty^2 b \rightarrow \infty$ indica $\xi \rightarrow 0$
- $v_\infty^2 b \rightarrow 0$ indica $\xi \rightarrow \pi$

Sección eficaz de scattering

El análisis anterior es válido para un potencial gravitacional, es decir, para el comportamiento de objetos macroscópicos. Es interesante notar que en el mundo microscópico los mismos conceptos son válidos para partículas deflectadas por un potencial.

En el caso microscópico, generalmente tenemos un haz de partículas incidente. Caracterizamos este haz con el flujo F el cual corresponde al número de partículas que atraviesa una área transversal unitaria en una unidad de tiempo.

La cantidad experimental realmente importante es el número de eventos por unidad de tiempo que se describe mejor mediante la sección eficaz diferencial $d\sigma$,

$$\frac{N^\circ \text{ partículas}}{dt} = F d\sigma$$

Consideremos como ejemplo la deflexión elástica de un flujo de partículas que atraviesa el área que se muestra tachada a la izquierda en la Fig. 13. El número de partículas por unidad de tiempo que pasa a través del área transversal asociada $2\pi b db$ es $2\pi b db F$. La simetría axial indica que todas las partículas deflectadas atravesarán la región que se muestra tachada del lado derecho. Note que b y θ están relacionados por una función del tipo de la Ec.(19).

La sección eficaz de scattering es por definición:

$$F 2\pi b db = F d\sigma$$

El área de la porción de esfera a la derecha es dada por $dA = 2\pi R^2 \sin \theta d\theta$. El ángulo sólido correspondiente en el cual las partículas son defectadas será:

$$d\Omega = \frac{dA}{R^2} = 2\pi \sin \theta d\theta$$

Notamos que:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{b}{\sin \theta} \left| \frac{db}{d\theta} \right|$$

la cual se conoce como sección eficaz de scattering diferencial. La sección eficaz de scattering total se obtiene integrando:

$$\sigma_T = \int d\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega}$$

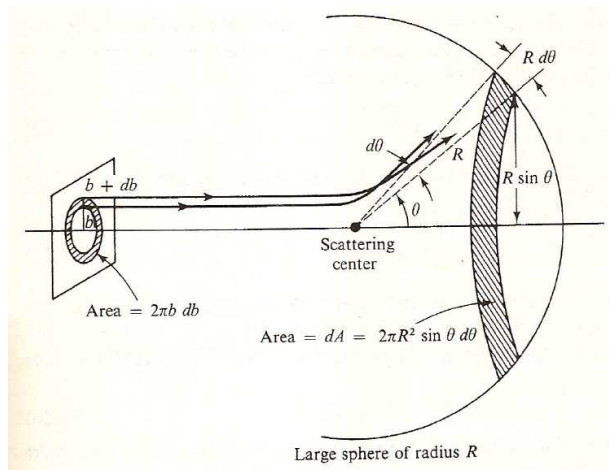


Figura 13: Sección eficaz de scattering

Finalmente note que σ tiene unidades de área y Ω es adimensional, mide ángulos bidimensionales en espacios tridimensionales. Sus unidades en el SI son estereorradian.

Sistemas de coordenadas aceleradas

El análisis de dos partículas interactuantes se vuelve particularmente simple para un observador que se mueve con el centro de masa, debido a que en ese sistema de referencia

(SR) el movimiento se reduce al movimiento equivalente de un cuerpo.

En otros SR la descripción es más complicada, aunque a veces es preferible trabajar en el SR del observador. Por ejemplo, al estudiar algún fenómeno donde la rotación de la Tierra no puede ser despreciada.

Coordenadas rotantes

Considere dos sistemas coordenados (SC) ortonormales, $\{\hat{e}_i^0\}$ y $\{\hat{e}_i\}$, con origen común rotando uno respecto del otro. Un observador en el SC $\{\hat{e}_i^0\}$ ve que los vectores \hat{e}_i^0 son fijos, mientras que los vectores \hat{e}_i se mueven. Del mismo modo, un observador en el SC $\{\hat{e}_i\}$ ve que los vectores \hat{e}_i son fijos mientras que los vectores \hat{e}_i^0 se mueven. Note que los vectores $\{\hat{e}_i\}$ y $\{\hat{e}_i^0\}$ denotan dos triadas de vectores, unitarios y ortogonales entre sí. Ambos conjuntos de vectores ortonormales definen una base para expandir vectores.

Escojamos el SC $\{\hat{e}_i^0\}$ como un SC inercial (SCI), luego $\{\hat{e}_i\}$ describirá un SC no inercial (SCNI), puesto que rota respecto del primero.

Un vector general \vec{X} puede describirse mediante sus componentes en cada uno de los sistemas coordenados,

$$\vec{X} = \sum_{i=1}^3 X_i^0 \hat{e}_i^0 \quad \text{donde} \quad X_i^0 = \vec{X} \cdot \hat{e}_i^0$$

$$\vec{X} = \sum_{i=1}^3 X_i \hat{e}_i \quad \text{donde} \quad X_i = \vec{X} \cdot \hat{e}_i$$

Al considerar la tasa de cambio temporal de este vector en uno u otro sistema coordenado se debe tener en cuenta que un vector constante en el tiempo en un SC girará en el otro sistema coordenado. Como consecuencia, la derivada temporal de un vector dado será diferente en los dos sistemas. Suponga que un observador en el SCI ve cómo \vec{X} cam-



bia en el tiempo:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\vec{X}}{dt}\right)_{SCI} &= \sum_{i=1}^3 \frac{dX_i^0}{dt} \hat{e}_i^0 \\ \left(\frac{d\vec{X}}{dt}\right)_{SCI} &= \sum_{i=1}^3 \frac{dX_i}{dt} \hat{e}_i + \sum_{i=1}^3 X_i \frac{d\hat{e}_i}{dt} \end{aligned}$$

Las expresiones anteriores dejan de manifiesto el hecho de que el observador inercial ve que los vectores \hat{e}_i^0 son fijos, mientras que los vectores \hat{e}_i varían en el tiempo. Note que el término $\sum_{i=1}^3 \frac{dX_i}{dt} \hat{e}_i$ es lo que mediría, para el cambio en el tiempo del vector \vec{X} , un observador que se mueve con el SCNI, luego:

$$\left(\frac{d\vec{X}}{dt}\right)_{SCI} = \left(\frac{d\vec{X}}{dt}\right)_{SCNI} + \sum_{i=1}^3 X_i \frac{d\hat{e}_i}{dt} \quad (20)$$

Rotaciones infinitesimales

Para analizar con más detalle el término $\frac{d\hat{e}_i}{dt}$ en la Ec.(20) evaluamos lo que ocurre con una rotación cuando consideramos intervalos de tiempo infinitesimales:

$$\hat{e}_i(t + dt) = \hat{e}_i(t) + d\hat{e}_i$$

Dado que los vectores \hat{e}_i son vectores ortonormales tenemos que $\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = \delta_{ij}$, donde δ_{ij} es la función delta de Kronecker. Luego, podemos notar que :

$$\hat{e}_i \cdot d\hat{e}_i = 0 \quad (21)$$

$$d\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = d\hat{e}_j \cdot \hat{e}_i \quad (22)$$

Por otra parte, dado que $\{\hat{e}_i\}$ constituye una base para expandir vectores tenemos:

$$d\hat{e}_i = \sum_{j=1}^3 d\Omega_{ij} \hat{e}_j$$

donde $d\Omega_{ij}$ son coeficientes infinitesimales.

De las Eqs.(21) y (22) notamos que: $d\Omega_{ii} = 0$ y $d\Omega_{ij} = -d\Omega_{ji}$ luego podemos redefinir los coeficientes $d\Omega_{ij}$ de la siguiente manera:

$$d\Omega_1 = d\Omega_{23} = -d\Omega_{32}$$

$$d\Omega_2 = d\Omega_{31} = -d\Omega_{13}$$

$$d\Omega_3 = d\Omega_{12} = -d\Omega_{21}$$

Con esta nueva notación es posible escribir $d\hat{e}_i$ de manera más compacta como:

$$d\hat{e}_i = d\vec{\Omega} \times \hat{e}_i$$

El vector $d\vec{\Omega} = \sum_i d\vec{\Omega}_i = \sum_i d\Omega_i \hat{e}_i$ se interpreta como una rotación infinitesimal obtenida combinando rotaciones infinitesimales $d\vec{\Omega}_i = d\Omega_i \hat{e}_i$ en torno a cada uno de los 3 ejes.

A estas rotaciones infinitesimales puede asignárseles una dirección a lo largo del eje de rotación y una magnitud igual a la cantidad infinitesimal de rotación en torno a ese eje.

Ejemplo: Consideremos una rotación en torno al eje definido por el vector \hat{e}_1 , $d\vec{\Omega} = d\vec{\Omega}_1 \hat{e}_1$ (Fig. 14). En este caso tenemos:

$$d\hat{e}_1 = d\vec{\Omega}_1 \times \hat{e}_1 = 0$$

$$d\hat{e}_2 = d\vec{\Omega}_1 \times \hat{e}_2 = d\Omega_1 \hat{e}_3$$

$$d\hat{e}_3 = d\vec{\Omega}_1 \times \hat{e}_3 = -d\Omega_1 \hat{e}_2$$

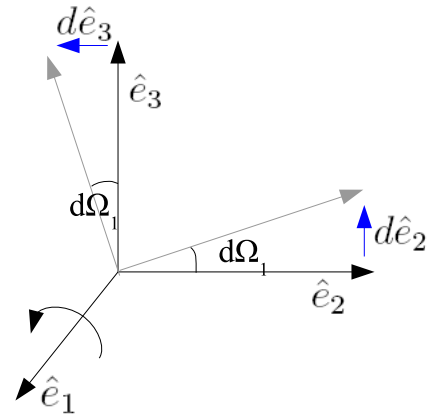


Figura 14: Rotaciones infinitesimales

Dado que $d\hat{e}_i = d\vec{\Omega} \times \hat{e}_i$, en un elemento de tiempo dt el cambio en \hat{e}_i es dado por:

$$d\hat{e}_i = \frac{d\hat{e}_i}{dt} dt = \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \times \hat{e}_i dt = (\vec{\omega} \times \hat{e}_i) dt$$

donde $\vec{\omega} = \frac{d\vec{\Omega}}{dt}$ es el vector velocidad angular instantánea del SCNI (rotante) vista desde el SCI. La dirección de este vector es a lo largo del eje de rotación $d\vec{\Omega}$ y su magnitud es la rapidez angular.

Finalmente, la Ec.(20), que relaciona la variación temporal de un vector \vec{X} en ambos sistemas coordenados, queda:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\vec{X}}{dt}\right)_{SCI} &= \left(\frac{d\vec{X}}{dt}\right)_{SCNI} + \sum_{i=1}^3 X_i (\vec{\omega} \times \hat{e}_i) \\ \left(\frac{d\vec{X}}{dt}\right)_{SCI} &= \left(\frac{d\vec{X}}{dt}\right)_{SCNI} + \vec{\omega} \times \vec{X} \end{aligned} \quad (23)$$

Dado que la ecuación (23) es válida para cualquier vector, podemos aplicarla para determinar la variación temporal del vector ω , para lo cual obtenemos:

$$\left(\frac{d\vec{\omega}}{dt}\right)_{SCI} = \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt}\right)_{SCNI}$$

luego, dos observadores, uno fijo en el SCI y el otro en el SCNI coinciden al determinar la variación temporal de ω .

Aceleración

Al considerar la variación temporal del vector posición en ambos sistemas coordenados tenemos:

$$\vec{v}_{SCI} = \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{SCI} = \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{SCNI} + \vec{\omega} \times \vec{r} \quad (24)$$

Si derivamos la ecuación anterior respecto del tiempo obtenemos la relación entre las aceleraciones de ambos sistemas,

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right)_{SCI} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{SCI} = \left(\frac{d\vec{v}_{SCI}}{dt}\right)_{SCI} \\ &= \left[\left(\frac{d}{dt}\right)_{SCNI} + \vec{\omega} \times\right] \vec{v}_{SCI} \\ &= \left(\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right)_{SCNI} + 2\vec{\omega} \times \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{SCNI} \\ &\quad + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \end{aligned} \quad (25)$$

Traslaciones

Hasta ahora hemos considerado dos sistemas coordenados con el origen común, generalicemos la descripción para incluir traslaciones del origen. Consideremos un SCI con

ejes (x_0, y_0, z_0) y un sistema de coordenadas móviles (en general rotante) con ejes (x, y, z) y el origen de este sistema ubicado en el punto \vec{A} , ver Fig.(15). La aceleración traslacional de los ejes móviles queda:

donde $\vec{r}_0 = \vec{r} + \vec{A}$. El primer término de la derecha en la expresión anterior corresponde al término calculado en la sección anterior, esto es, el cambio en el vector \vec{r} observado en el SCI y en el SCNI difiere sólo debido a la rotación del SCNI, aún cuando este punto esté acelerando.

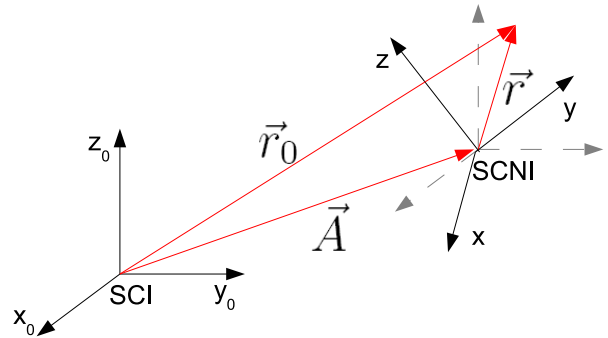


Figura 15: Traslación y rotación de dos SC.

$\vec{\omega}$ es el vector velocidad instantánea del SCNI respecto del sistema coordenado con origen en \vec{A} y cuyos ejes son paralelos a los ejes del SCI, (x_0, y_0, z_0) .

Leyes de Newton

Sabemos que la segunda ley de Newton es válida en sistemas de referencia inerciales, esto es:

$$m \left(\frac{d^2\vec{r}_0}{dt^2}\right)_{SCI} = \vec{F}^{(e)}$$



luego al comparar ambos sistemas coordenados tenemos:

$$\begin{aligned} m \left(\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \right)_{SCNI} &= \vec{F}^{(e)} - m \left(\frac{d^2 \vec{a}}{dt^2} \right)_{SCI} \\ -2m\vec{\omega} \times \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)_{SCNI} \\ -m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) - m \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} \end{aligned}$$

Ejemplo: Consideremos una partícula que se mueve en una trayectoria circular. Describamos el movimiento de esta partícula con dos sistemas coordenados con origen común, uno cartesiano y uno polar. El sistema de coordenadas polar está fijo a la partícula que rota de modo que, en este sistema el valor del radio de la partícula es fijo, así como su posición angular.

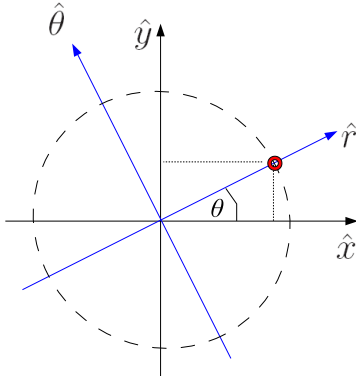


Figura 16: Ejemplo

Hemos visto que las relaciones entre los vectores unitarios son dadas por:

$$\begin{aligned} \hat{r} &= \cos \theta \hat{x} + \sin \theta \hat{y} \\ \hat{\theta} &= -\sin \theta \hat{x} + \cos \theta \hat{y} \end{aligned}$$

luego es fácil notar que en un sistema de referencia inercial el vector posición es dado por:

$$\begin{aligned} \vec{r} &= r \cos \theta \hat{x} + r \sin \theta \hat{y} = r \hat{r} \\ \vec{v} &= (-r \sin \theta \hat{x} + r \cos \theta \hat{y}) \dot{\theta} = r \omega \hat{\theta} \\ \vec{a} &= -r(\cos \theta \hat{x} + \sin \theta \hat{y}) \ddot{\theta} \\ &\quad -r(\sin \theta \hat{x} - \cos \theta \hat{y}) \dot{\theta}^2 \\ &= -r \omega^2 \hat{r} + r \dot{\omega} \hat{\theta} \end{aligned}$$

En el SCNI (que rota con la partícula con la misma rapidez angular $\omega = \dot{\theta}$) la posición de la partícula es fija y los vectores unitarios \hat{r} y $\hat{\theta}$ también, luego en ese sistema, la velocidad y aceleración son nulas.

Al comparar estas relaciones con las Eqs.(24) y (25) notamos que hay consistencia entre ellas puesto que $\left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)_{SCNI} = 0$ y $\left(\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \right)_{SCNI} = 0$ donde $\vec{\omega}$ es un vector con módulo ω y que apunta hacia afuera del plano si el sentido de giro es contrario al de las agujas del reloj y hacia adentro del plano si el sentido de giro es en el sentido de las agujas del reloj.

Movimiento en la superficie de la Tierra

El movimiento de la Tierra tiene dos componentes principales, la rotación en torno a su eje y la traslación en torno al Sol. Consideramos que estos movimientos tienen un período aproximadamente constante y determinamos su rapidez angular como:

$$\begin{aligned} \omega_r &= \frac{2\pi}{1 \text{ día}} \approx 7,27 \times 10^{-5} \text{ [s]}^{-1} \\ \omega_t &= \frac{2\pi}{1 \text{ año}} \approx 1,99 \times 10^{-7} \text{ [s]}^{-1} \end{aligned}$$

Consideremos un SCI fijo en el centro del Sol y un SCNI fijo en el centro de la Tierra, luego tenemos:

$$\begin{aligned} m \left(\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \right)_{SCNI} &= \vec{F}^{(e)} - m \left(\frac{d^2 \vec{A}}{dt^2} \right)_{SCI} \\ -2m\vec{\omega} \times \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)_{SCNI} &\quad - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \end{aligned}$$

donde \vec{A} es el radio de la trayectoria *aproximadamente circular* que sigue el Sol en torno a la Tierra y $\vec{\omega} = \vec{\omega}_t + \vec{\omega}_r$ es la velocidad angular asociada al SC fijo a la Tierra (asumida constante). La fuerza $\vec{F}^{(e)}$ incluye la fuerza gravitacional que ejerce el Sol, la fuerza gravitacional que ejerce la Tierra y en general, cualquier otra fuerza externa involucrada.

El campo gravitacional del Sol es mucho menos intenso que el campo gravitacional de la Tierra sobre la superficie de la Tierra (por un factor del orden de 10^3). Por otra parte, la aceleración del centro de la Tierra respecto del centro del Sol ($\frac{d^2\vec{A}}{dt^2}$) es aproximadamente igual a la fuerza gravitacional que ejerce el Sol sobre la Tierra, luego estos términos se cancelan entre sí. Por otra parte, la contribución a la rapidez angular del término ω_r es aproximadamente 10^3 veces mayor que ω_t . Finalmente, la ecuación aproximada para describir el movimiento de una partícula sobre la superficie de la Tierra respecto de un SCNI ubicado en el centro de la Tierra será:

$$m \left(\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \right)_T = \vec{F}_g + \vec{F}' - 2m\vec{\omega} \times \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)_T - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \quad (26)$$

donde hemos separado las contribuciones de las fuerzas externas en la fuerza de gravedad \vec{F}_g y otras contribuciones \vec{F}' . Recuerde que el vector \vec{r} es medido respecto del centro de la Tierra, ver Fig. 15. Note que hemos cambiado el subíndice *SCNI* por *T* para denotar el SCNI fijo al centro de la Tierra.

Partícula estacionaria en la superficie de la Tierra

En este caso la Ec.(26) queda:

$$\begin{aligned} \vec{F}_g + \vec{F}' - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) &= 0 \\ \vec{F}' + m\vec{g} &= 0 \end{aligned}$$

donde hemos definido una aceleración de gravedad corregida \vec{g} :

$$\vec{g} = -\frac{GM_T}{r^2}\hat{r} - \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{r}$$

Notamos que en general, \vec{g} no se dirige exactamente al centro de la Tierra, esto sólo ocurre en los polos (donde el vector $\vec{\omega}$ es paralelo al vector \vec{r}).

En el ecuador, donde $\vec{\omega}$ es perpendicular a \vec{r} tenemos: $\vec{g} = (-g_0 + \omega^2 R_e)\hat{r}$

Note que hemos asumido que la Tierra tiene una forma esférica y que su órbita en torno al Sol es aproximadamente circular. Estas suposiciones no son del todo ciertas, luego los cálculos aquí desarrollados constituyen aproximaciones a la descripción real.

Tarea: Encuentre una expresión para el término $\vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{r}$. Utilice la relación que existe entre los vectores unitarios en coordenadas cartesianas y coordenadas esféricas.

Caída libre

Consideremos una partícula que cae libremente sobre la superficie de la Tierra con velocidad \vec{v} :

$$m\dot{\vec{v}} = -2m\vec{\omega} \times \vec{v} + m\vec{g} \quad (27)$$

donde $\vec{F}' = 0$ porque sólo actúa la gravedad para una partícula que cae libremente. Si la Tierra fuera estacionaria la partícula caería directamente hacia abajo (si despreciamos las correcciones presentes en \vec{g}). Debido a la fuerza de Coriolis, el punto donde termina la partícula está desplazado por una cantidad proporcional a ω . Note que sólo estamos considerando términos que son lineales en ω .

Dado que la Ec.(27) sólo contiene términos \dot{r} y \ddot{r} podemos cambiarnos a un sistema con origen sobre la superficie de la Tierra. Escogemos un sistema \hat{x} , \hat{y} , \hat{z} donde estos ejes apuntan al sur, al este y verticalmente hacia arriba, respectivamente.

Supongamos que la partícula es soltada desde una altura $\vec{r}(0) = h\hat{z} \ll R_T\hat{z}$ con velocidad inicial cero, $\vec{v}_0 = 0$. Es conveniente utilizar un análisis perturbativo,

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0(t) + \vec{r}_1(t)$$

donde $\vec{r}_0(t)$ describe la trayectoria en una Tierra que no rota y \vec{r}_1 incorpora pequeñas correcciones proporcionales a ω . Considerando esto en la Ec.(27) obtenemos que:

$$\ddot{\vec{r}}_0 + \ddot{\vec{r}}_1 = \vec{g} - 2\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}_0$$

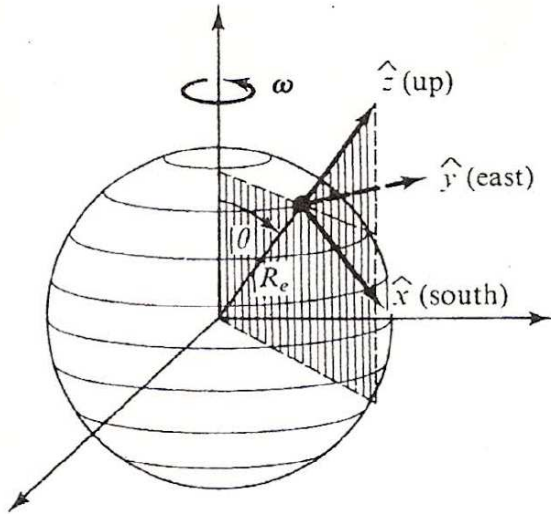


Figura 17: Cambio a un SR sobre la superficie

de donde notamos que $\ddot{\vec{r}}_1 = -2\vec{\omega} \times \vec{g}t$, dado que $\ddot{\vec{r}}_0 = \vec{g}$.

Finalmente tenemos **Tarea:**

$$\begin{aligned}\vec{r}_1(t) &= \frac{1}{3}\vec{\omega}gt^3 \sin \theta \hat{y} \\ \vec{r}(t) &= \left(h - \frac{1}{2}gt^2\right)\hat{z} + \frac{1}{3}\vec{\omega}gt^3 \sin \theta \hat{y}\end{aligned}$$

De este resultado notamos que,

- El movimiento vertical es independiente de $\vec{\omega}$ a primer orden
- La partícula se deflecta hacia el este
- El efecto es el mismo en el hemisferio norte y en el hemisferio sur
- El efecto es nulo en los polos.
- **Tarea:** Discuta cómo se compara esta desviación con el sentido de rotación de la Tierra

Movimiento horizontal

Al considerar una partícula con el ángulo θ fijo (Fig. 17) que se mueve con una velocidad horizontal \vec{v} dirigida en un ángulo ϕ en el sentido positivo desde la dirección sur, tenemos:

$$\begin{aligned}\vec{\omega} &= \omega \cos \theta \hat{z} - \sin \theta \hat{x} \\ \vec{v} &= v(\cos \phi \hat{x} + \sin \phi \hat{y})\end{aligned}$$

Luego, al calcular la contribución de la fuerza de Coriolis tenemos:

$$\begin{aligned}\vec{F}_{Cor} &= -2m\vec{\omega} \times \vec{v} \\ &= 2m\omega v(\cos \theta(\sin \phi \hat{x} - \cos \phi \hat{y}) + \sin \theta \sin \phi \hat{z})\end{aligned}$$

Para una partícula en el hemisferio norte ($\cos \theta > 0$) tenemos los siguientes resultados:

- Para una partícula que se mueve al norte ($\phi = \pi$) entonces la fuerza $\vec{F}_{Cor} = F_{Cor}\hat{y}$
- Para una partícula que se mueve al sur ($\phi = 0$) entonces la fuerza $\vec{F}_{Cor} = -F_{Cor}\hat{y}$

Luego, de acuerdo con la Fig. 17, en el hemisferio norte, una partícula que se mueve al norte se desvía al este mientras que una partícula que se mueve al sur se desvía la oeste.

Dado que en el hemisferio sur ($\cos \theta < 0$) los efectos se revierten.

Péndulo de Foucault

Una de las demostraciones más interesantes de la rotación de la Tierra es lo que le ocurre al péndulo de Foucault. El plano de oscilación del péndulo rota lentamente con un período comparable a un día. **Tarea:** Mostrar matemáticamente que el plano de oscilación del péndulo de Foucault cambia en el tiempo debido a la rotación de la Tierra.

Dinámica Lagrangiana

El objetivo de esta sección es suministrar una técnica alternativa a las ecuaciones de Newton para resolver problemas de mecánica.

En muchos casos, el movimiento de una partícula está restringido por uno o más *vínculos* que reducen el número de *grados de libertad* del movimiento. Los vínculos ejercen fuerzas sobre la partícula para mantener su movimiento restringido. Estas *fuerzas vinculadas* pueden ser complicadas debido a que dependen de la trayectoria de la partícula. Es



útil formular la mecánica clásica eliminando las fuerzas vinculares completamente.

Definiciones

Ligaduras y fuerzas vinculares

Las *ligaduras* o *vínculos* son modelos (líneas y superficies) que representan cualquier objeto que restringe o limita el movimiento de un sistema bajo estudio.

Las *fuerzas vinculares* son fuerzas que reemplazan al vínculo con su mismo efecto, por ejemplo, la fuerza normal.

Ejemplos:

- Péndulo simple: la partícula es un sistema vinculado por los objetos cuerda y plano. Ambos restringen el movimiento, luego son vínculos para el sistema.
- Las moléculas de un gas en un depósito rígido es un sistema vinculado. El recipiente obliga a las moléculas de gas a moverse en el interior, luego el recipiente es un vínculo.

Clasificación de vínculos

1. Vínculos holónomos: son vínculos susceptibles a expresarse de la forma $f(x_1, x_2, x_3, t) = c$.
2. Vínculos anholónomos: son vínculos NO susceptibles a expresarse de la forma $f(x_1, x_2, x_3, t) = c$.
3. Vínculos esclerónomos: son vínculos que no dependen del tiempo
4. Vínculos reónomos: son vínculos que dependen explícitamente del tiempo.

Ejemplo:

Un vínculo holónimo y esclerónimo estaría presente para una partícula que se mueve en una circunferencia de radio L : $x^2 + y^2 = L^2$.

Grados de libertad

Los grados de libertad corresponden al número de coordenadas independientes.

Ejemplos:

- Para una partícula libre, no vinculada o sin restricciones en su movimiento existen 3 grados de libertad asociados.
- En el caso de una partícula que se mueve sobre una superficie tenemos 2 grados de libertad y 1 vínculo.
- Si tenemos una partícula confinada a moverse en la intersección de dos planos, tendremos 1 grado de libertad y 2 vínculos.

Consideremos un sistema de N partículas sometida a m vínculos holónomos descritos por $f(\vec{x}_i) = 0$. Para definir la configuración del sistema necesitamos en principio $3N$ coordenadas (3 por cada partícula). Por otra parte, tenemos vínculos holónomos expresados por m ecuaciones, las cuales pueden ser utilizadas para eliminar m de las $3N$ coordenadas, esto es, quedarán $3N - m$ coordenadas independientes. En este caso podemos decir que el sistema tiene $3N - m$ grados de libertad, es decir, de las $3N$ coordenadas existen $3N - m$ que son independientes.

Ejemplo:

Una partícula que se mueve en un plano $Ax + By + Cz + D = 0$ puede moverse libremente en y y z puesto que $x = \frac{-By - Cz - D}{A}$. Esto es, la partícula tiene dos grados de libertad.

Ejemplo:

Un sólido rígido siempre tiene 6 grados de libertad asociados (3 para traslación y 3 para rotación), independiente del número de partículas que compongan el sólido.

Fuerzas activas

Son fuerzas externas conocidas, es decir, se sabe quien las ejerce.



Desplazamientos virtuales

La posición de una partícula en mecánica de Newton está definida con respecto a un sistema de referencia inercial de 4 variables, 3 coordenadas espaciales, x_1, x_2, x_3 , y el tiempo t .

Los mecanicistas encontraron conveniente imaginar, y por tanto definir desplazamientos puramente geométricos que se producen fuera del tiempo y son conocidos como *desplazamientos virtuales*.

La notación que utilizaremos será: $d\vec{x}$ para desplazamientos reales y $\delta\vec{x}$ para desplazamientos virtuales.

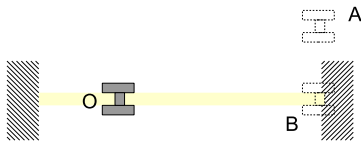


Figura 18: Ejemplo de desplazamientos virtuales

Ejemplo:

En la Fig. 18 el tornillo está en equilibrio, es decir, no tiene *grados de libertad*. Esto implica que no puede tener ningún desplazamiento físico $d\vec{x}$.

Nada me impide “imaginar” que el tornillo se puede mover, por ejemplo, a las posiciones A ó B . Estos desplazamientos, $\delta\vec{x}(O \rightarrow A)$ ó $\delta\vec{x}(O \rightarrow B)$ son ejemplos de desplazamientos virtuales.

Los desplazamientos virtuales siempre son infinitesimales e instantáneos.

En la Fig. 19 supongamos que el objeto A está en reposo sobre la mesa H . Imaginemos dos desplazamientos virtuales para el objeto A según la dirección de la recta L , sean ellos $\delta\vec{x}(A \rightarrow B)$ y $\delta\vec{x}(A \rightarrow C)$. Estos desplazamientos virtuales pueden también ser imaginados en el sentido inverso: $\delta\vec{x}(B \rightarrow A)$ y $\delta\vec{x}(C \rightarrow A)$.

Además de estos desplazamientos podemos imaginar otros, por ejemplo el desplazamiento virtual $\delta\vec{x}(A \rightarrow P)$, el cual eleva el objeto A por encima de la mesa o el desplazamiento

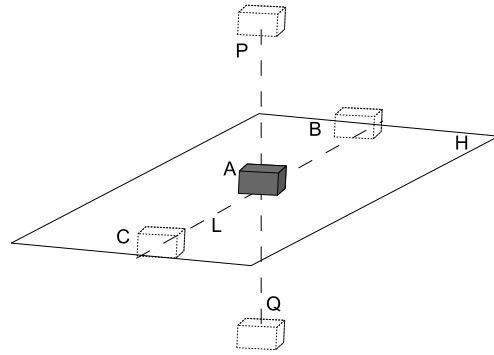


Figura 19: Ejemplo de desplazamientos virtuales

$\delta\vec{x}(A \rightarrow Q)$ que baja el objeto por debajo de la mesa (en la práctica deberíamos destruir la mesa).

Clasificación

- Desplazamientos virtuales compatibles con los vínculos: son aquellos que respetan la condición de vínculo. Por ej: $\delta\vec{x}(A \rightarrow B)$ y $\delta\vec{x}(A \rightarrow C)$.
- Desplazamientos virtuales incompatibles con los vínculos: son aquellos que no respetan la condición de vínculo. Por ej: $\delta\vec{x}(A \rightarrow P)$ y $\delta\vec{x}(A \rightarrow Q)$.
- Desplazamientos virtuales invertibles: son aquellos que se pueden realizar en uno u otro sentido y son compatibles con los vínculos.
- Desplazamientos virtuales no invertibles.

Matemáticamente el elemento δ opera igual que un diferencial, por ejemplo:

$$\delta \sin x = \cos x \delta x$$

Trabajo Virtual

Sabemos que el trabajo realizado por una fuerza \vec{F} en un desplazamiento $d\vec{x}$ es dado por $dW = \vec{F} \cdot d\vec{x}$. Análogamente, el trabajo virtual δW realizado por una fuerza \vec{F} en un desplazamiento virtual $\delta\vec{x}$ sería:

$$\delta W = \vec{F} \cdot \delta\vec{x}$$

Partícula libre en equilibrio

Consideremos una partícula libre en equilibrio, luego se tiene $\vec{F} = 0$, donde \vec{F} es la fuerza neta sobre la partícula. Si $\delta\vec{x}$ es un desplazamiento virtual de la partícula, entonces, $\delta W = \vec{F} \cdot \delta\vec{x} = 0$.

El trabajo virtual de las fuerzas externas aplicadas sobre una partícula libre (*no vinculada*) en equilibrio es cero, cualquiera sea el desplazamiento virtual de la partícula.

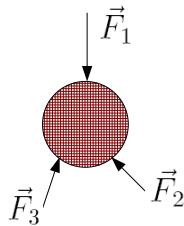


Figura 20: Partícula libre en equilibrio

Partícula vinculada en equilibrio

En la Fig. 21 hemos reemplazado los vínculos (σ_i) por sus *reacciones vinculares*, $\vec{\phi}_i$.

Consideremos una partícula en equilibrio, sometida a la acción de N fuerzas *activas* \vec{F}_a y M reacciones vinculares $\vec{\phi}_p$, en ausencia de roce.

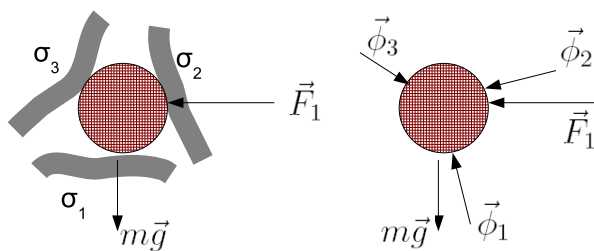


Figura 21: Partícula vinculada en equilibrio

De la segunda ley de Newton aplicada al equilibrio tenemos: $\vec{F}_a + \vec{\phi}_p = 0$ (donde \vec{F}_a es la suma de las fuerzas activas y $\vec{\phi}_p$ la suma de las reacciones vinculares). Si aplicamos a la partícula un desplazamiento virtual $\delta\vec{x}$ entonces el trabajo virtual será:

$$\delta W = (\vec{F}_a + \vec{\phi}_p) \cdot \delta\vec{x} = 0$$

Si definimos:

$$\delta W^{(a)} = \vec{F}_a \cdot \delta\vec{x}$$

$$\delta W^{(\phi)} = \vec{\phi}_p \cdot \delta\vec{x}$$

donde $\delta W^{(a)}$ es el trabajo virtual realizado por las fuerzas activas y $\delta W^{(\phi)}$ es el trabajo virtual realizado por las reacciones vinculares, tenemos:

$$\delta W = \delta W^{(a)} + \delta W^{(\phi)} = 0$$

$$\Rightarrow \delta W^{(a)} = -\delta W^{(\phi)}$$

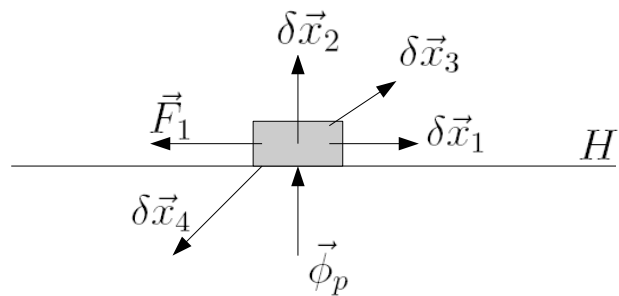


Figura 22: Ejemplo

Consideremos como ejemplo, el caso en el que el trabajo virtual realizado por las reacciones vinculares se hace cero. En la Fig. (22) tenemos que $\vec{\phi}_p = \vec{N}$, donde \vec{N} representa la fuerza normal. Notamos que:

- $\delta\vec{x}_1$: es compatible con el vínculo H
- $\delta\vec{x}_2$: es incompatible con el vínculo H
- $\delta\vec{x}_3$: es incompatible con el vínculo H
- $\delta\vec{x}_4$: es incompatible con el vínculo H

Luego, el trabajo virtual debido a cada uno de estos desplazamientos queda:

$$\delta\vec{x}_1: \delta W = \vec{\phi}_p \cdot \delta\vec{x}_1 = 0$$

$$\delta\vec{x}_2: \delta W = \vec{\phi}_p \cdot \delta\vec{x}_2 > 0$$

$$\delta\vec{x}_3: \delta W = \vec{\phi}_p \cdot \delta\vec{x}_3 > 0$$

$$\delta\vec{x}_4: \delta W = \vec{\phi}_p \cdot \delta\vec{x}_4 < 0$$

Por lo tanto, el trabajo virtual realizado por las reacciones vinculares, en ausencia de roce, puede ser positivo, negativo o nulo.

También podemos observar que el trabajo virtual es diferente de cero cuando los desplazamientos virtuales son incompatibles con los vínculos, mientras que, el trabajo virtual de las reacciones vinculares, en ausencia de roce, es cero para desplazamientos virtuales compatibles con los vínculos.

Así, para desplazamientos virtuales compatibles con los vínculos tenemos:

$$\delta W^{(\phi)} = -\delta W^{(a)} = 0$$

Principio de trabajos virtuales

El trabajo virtual de las fuerzas activas aplicadas a una partícula vinculada es igual a cero, para desplazamientos virtuales compatibles con los vínculos y en ausencia de roce.

En adelante nos restringiremos al estudio de sistemas para los cuales el trabajo realizado por las reacciones vinculares es nulo, esto es, nos restringiremos al caso de desplazamientos virtuales compatibles con los vínculos.

En muchos casos las reacciones vinculares son perpendiculares a la dirección de movimiento. Sin embargo, existen ejemplos donde las reacciones vinculares individuales realizan trabajo, mientras que la suma de todos los trabajos virtuales en el sistema es nula.

El *principio de trabajos virtuales* establece que un sistema está en equilibrio si el trabajo virtual total de las fuerzas externas es nulo,

$$\delta W^{(a)} = \sum_i \vec{F}_a^i \cdot \delta \vec{x}_i = 0$$

donde el índice i cuenta las partículas presentes en el sistema.

El principio de D'Alembert establece que *el trabajo virtual total de las reacciones vinculares es nulo* bajo un desplazamiento virtual compatible con los vínculos. Esto constituye una característica fundamental de las reacciones vinculares.

$$\delta W^{(\phi)} = \sum_i \vec{\phi}_p^i \cdot \delta \vec{x}_i = 0 \quad (28)$$

Para vínculos holónomos, la reacción vincular $\vec{\phi}_p$ es siempre perpendicular a la superficie de contacto, luego $\vec{\phi}_p$ es perpendicular a desplazamientos virtuales compatibles con los vínculos, por consiguiente, el trabajo virtual de estas reacciones vinculares es siempre nulo.

El principio de trabajos virtuales constituye una técnica alternativa a las ecuaciones de Newton para resolver problemas de estática.

Ejemplo:

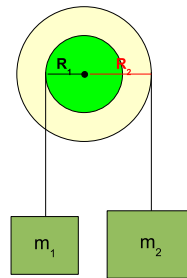


Figura 23: Aplicación del principio de D'Alembert para un sistema en equilibrio

Considere dos discos concéntricos de radios R_1 y R_2 que se encuentran en equilibrio con dos masas m_1 y m_2 suspendidas de ellos, Fig. 23.

De la mecánica sabemos que la suma de fuerzas para un sistema en equilibrio es cero, así como también la sumatoria de torques. Aplicando esto al problema en cuestión:

$$\begin{aligned} T_i &= m_i g \\ R_1 T_1 &= R_2 T_2 \end{aligned}$$

obtenemos como condición para que exista equilibrio: $m_1 R_1 = m_2 R_2$, lo cual resulta ser consistente con el hecho de que si los radios de los discos son iguales, entonces las masas deberían ser iguales.

Ahora, al aplicar el principio de D'Alembert al problema en cuestión tenemos que:

$$\vec{\phi}_1 \cdot \delta \vec{r}_1 + \vec{\phi}_2 \cdot \delta \vec{r}_2 = 0$$

donde las reacciones vinculares $\vec{\phi}_i$ corresponden a las tensiones T_i en este caso, mientras

que los desplazamientos virtuales considerados $\delta\vec{r}_i$ deben ser compatibles con los vínculos, luego tenemos:

$$T_1\delta z_1 + T_2\delta z_2 = (T_1R_1 - T_2R_2)\delta\psi = 0$$

donde hemos usado el hecho que $\delta z_1 = -\delta z_2$ y además $\delta z_i = R_i\delta\psi$.

Por otra parte, el principio de trabajos virtuales indica que:

$$\vec{F}_a^1 \cdot \delta\vec{r}_1 + \vec{F}_a^2 \cdot \delta\vec{r}_2 = 0$$

donde las fuerzas activas \vec{F}_a^i corresponden en este caso a la fuerza de gravedad sobre cada partícula. Luego tenemos que:

$$m_1g\delta z_1 - m_2g\delta z_2 = (m_1R_1 - m_2R_2)g\delta\psi = 0$$

de donde obtenemos la misma condición de equilibrio que obtuvimos antes utilizando las leyes de Newton y la conservación del momento angular (la suma de torques debe ser nula).

El principio de D' Alembert

Consideremos un sistema de N partículas sometidas a **vínculos holónomos**, el cual no está en equilibrio debido a la acción de fuerzas externas \vec{F}_i .

Si el sistema no está en equilibrio, entonces éste es descrito por la segunda ley de Newton, por ejemplo, para la i -ésima partícula tenemos:

$$\vec{F}_i + \vec{\phi}_i = m_i\ddot{\vec{x}}_i \quad (29)$$

Surge naturalmente la pregunta, ¿cómo aplicar el principio de los trabajos virtuales, el cual es válido para sistemas en equilibrio, a un sistema que no está en equilibrio?. La solución a este problema fue ideada inicialmente por Bernoulli y perfeccionada después por D'Alembert. La idea radica en definir las llamadas fuerzas inerciales o fuerzas ficticias $\vec{\psi}$ como:

$$\vec{\psi}_i = -m_i\ddot{\vec{x}}_i$$

Luego, la segunda ley de Newton en (29) toma la forma:

$$\vec{F}_i + \vec{\phi}_i + \vec{\psi}_i = 0,$$

es decir, hemos cambiado el sistema de referencia, pasamos a un sistema no inercial donde la partícula i está en equilibrio. $\vec{\psi}_i$ es ahora una fuerza aplicada y el principio de trabajos virtuales es aplicable.

Si damos al sistema un desplazamiento virtual $\delta\vec{x}_i$ el trabajo virtual correspondiente a la i -ésima partícula será:

$$\delta W^{(i)} = (\vec{F}_i + \vec{\phi}_i + \vec{\psi}_i) \cdot \delta\vec{x}_i = 0$$

Mientras que para el sistema completo será válido:

$$\delta W = \sum_i (\vec{F}_i + \vec{\phi}_i + \vec{\psi}_i) \cdot \delta\vec{x}_i = 0$$

El principio de D'Alembert (28) establece que $\delta W^{(\phi)} = \delta W^{(a)} = 0$, luego:

$$\delta W^{(a)} = \sum_{i=1}^N (\vec{F}_i + \vec{\psi}_i) \cdot \delta\vec{x}_i = 0$$

Para sistemas que no están en equilibrio, el principio de D'Alembert toma la forma:

$$\sum_{i=1}^N (\vec{F}_i - m_i\ddot{\vec{x}}_i) \cdot \delta\vec{x}_i = 0 \quad (30)$$

Note que en este caso $\vec{F}_i - m_i\ddot{\vec{x}}_i \neq 0$.

Lo que resulta notable de este resultado es que ahora podemos resolver problemas de mecánica donde las reacciones vinculares ya no están presentes en las ecuaciones.

Ejemplo

Considere dos masas conectadas por una cuerda que se mueven en planos sin fricción como se muestra en la Fig. 24. Encuentre la aceleración de las masas utilizando el principio de D'Alembert.

Al aplicar las leyes de Newton para este caso,

$$\begin{aligned} T_1 - m_1g \sin \alpha &= m_1a_1 \\ m_2g \sin \beta - T_2 &= m_2a_2 \\ T_1 = T_2 &\quad \text{y} \quad a_1 = a_2 \end{aligned}$$

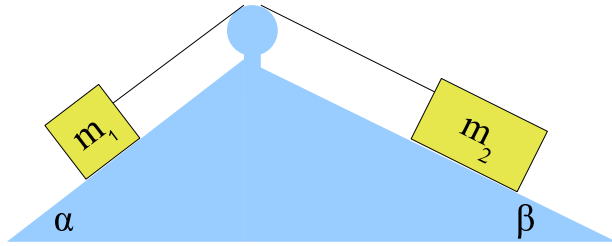


Figura 24: Aplicación del principio de D'Alembert para un sistema que no está en equilibrio

encontramos que:

$$a_2 = a_1 = \frac{m_2 g \sen \beta - m_1 g \sen \alpha}{m_1 + m_2}$$

Por otra parte, utilizando el principio de D'Alembert para un sistema de dos partículas vinculado tenemos:

$$\begin{aligned} 0 &= (F_1 - m_1 \ddot{x}_1) \delta x_1 + (F_2 - m_2 \ddot{x}_2) \delta x_2 \\ &= [m_2 (g \sen \beta - \ddot{x}_2) - m_1 (g \sen \alpha + \ddot{x}_2)] \delta x_2 \end{aligned}$$

donde hemos considerado que $x_1 + x_2 =$ largo cuerda (constante). Finalmente obtenemos:

$$a_2 = -a_1 = \frac{m_2 g \sen \beta - m_1 g \sen \alpha}{m_1 + m_2}$$

Note que en ambos casos el resultado esta relacionado con la elección del SR, por ello en el caso de las leyes de Newton $a_1 = a_2$, mientras que al utilizar el principio de D'Alembert $a_1 = -a_2$.

Coordenadas generalizadas

Si x_i ($i = 1, 2, \dots, 3N$) son las coordenadas cartesianas de N partículas, las cuales están sometidas a m vínculos holónomos ϕ_λ :

$$\phi_\lambda(x_i, t) = 0, \quad \lambda = 1, 2, \dots, m$$

entonces sólo $3N - m$ de las $3N$ coordenadas x_i son independientes. Esto implica que podemos elegir $3N - m$ funciones x_i independientes.

La eliminación de las coordenadas dependientes puede ser llevada a cabo introduciendo $f = 3N - m$ variables independientes denotadas por q_1, q_2, \dots, q_f llamadas coordenadas generalizadas, las cuales especifican completamente la configuración del sistema. Así:

$$\begin{aligned} q_j &= q_j(x_i, t), \quad j = 1, 2, \dots, f \quad (31) \\ x_i &= x_i(q_j, t) \end{aligned}$$

En otras palabras, usando (31), los vínculos ϕ_λ son obedecidos idénticamente.

Es importante notar que las coordenadas generalizadas no necesariamente corresponden a coordenadas espaciales, éstas podrían corresponder a ángulos por ejemplo.

Notamos que, debido a la definición de desplazamientos reales y virtuales tenemos respectivamente:

$$\begin{aligned} dx_i &= \frac{\partial x_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^{3N-m} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} dq_j \\ \delta x_i &= \sum_{j=1}^{3N-m} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \delta q_j \quad (32) \end{aligned}$$

para $i = 1, \dots, 3N$, aquí δq_j representa un *desplazamiento virtual generalizado*

Ejemplos: existe una coordenada generalizada para describir el movimiento del péndulo simple y una coordenada generalizada para describir el movimiento de una partícula en una trayectoria elíptica.

Ecuaciones de Lagrange

Es complicado utilizar el principio de D'Alembert (30) directamente para sistemas sometidos a vínculos puesto que no todos los desplazamientos virtuales $\delta \vec{x}_i$ son independientes. Para eliminar esta complicación es conveniente escribir el principio de D'Alembert en términos de las coordenadas generalizadas q_j .

Consideremos el movimiento de un sistema de N partículas sometidas a m vínculos holónomos. El sistema es descrito por las

ecuaciones del principio de D'Alembert:

$$\sum_{i=1}^N \sum_{s=1}^3 (F_i^s - m_i \ddot{x}_i^s) \delta x_i^s = 0$$

Esta ecuación puede reescribirse en la forma:

$$(F_k - m_k \ddot{x}_k) \delta x_k = 0 \quad (33)$$

para $k = 1, 2, \dots, 3N$ donde los índices que se repiten son considerados como una suma sobre ellos, es decir,

$$F_k \delta x_k = \sum_{k=1}^{3N} F_k \delta x_k.$$

Dado que tenemos f grados de libertad, debemos tener f coordenadas generalizadas $q_j = q_j(x_i, t)$. A partir de la Ec.(32) obtenemos para la Ec.(33):

$$F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \delta q_k - m_i \ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \delta q_k = 0$$

Por otra parte, dado que el trabajo virtual para la fuerza F_i es dado por:

$$\delta W = F_i \delta x_i = F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \delta q_k$$

podemos definir la una fuerza generalizada:

$$Q_k = F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k}$$

de modo que:

$$\delta W = Q_k \delta q_k = F_i \delta x_i$$

Consideremos ahora el término $m_i \ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \delta q_k$:

$$\ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} = \frac{d\dot{x}_i}{dt} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} = \frac{d}{dt} \left(\dot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \right) - \dot{x}_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_k} \right)$$

Por otra parte, dado que $x_i = x_i(q_k, t)$ tenemos:

$$\dot{x}_i = \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial x_i}{\partial t} \quad (34)$$

luego:

$$\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial x_i}{\partial q_k}(q_j, t)$$

Además:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_k} \right) = \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_j \partial q_k} \dot{q}_j + \frac{\partial^2 x_i}{\partial t \partial q_k}$$

Derivando la Ec.(34) respecto de la coordenada generalizada q_k obtenemos:

$$\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_k} = \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_k \partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_k \partial t}$$

luego notamos que:

$$\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_k} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_k} \right)$$

Finalmente,

$$\ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} = \frac{d}{dt} \left(\dot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \right) - \dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_k}$$

Por otra parte, tenemos las relaciones:

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} (\dot{x}_i \dot{x}_i) = 2 \dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_k}$$

$$\frac{\partial}{\partial q_k} (\dot{x}_i \dot{x}_i) = 2 \dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_k}$$

luego:

$$\begin{aligned} & m_i \ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \\ &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \left(\frac{1}{2} m_i \dot{x}_i \dot{x}_i \right) \right) - \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\frac{1}{2} m_i \dot{x}_i \dot{x}_i \right) \\ &= \frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial K}{\partial q_k} \end{aligned}$$

donde $K = \frac{1}{2} m_i \dot{x}_i \dot{x}_i$ corresponde a la energía cinética de la partícula.

La ecuación de D'Alembert en coordenadas generalizadas toma la forma:

$$Q_k \delta q_k - \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial K}{\partial q_k} \right) \delta q_k = 0$$

Finalmente tenemos:

$$Q_k = \frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial K}{\partial q_k} \quad (35)$$

ecuación que se denomina ecuación de Lagrange.

Aunque todas las relaciones han sido derivadas para un movimiento sometido a vínculos, el principio de D'Alembert (30) y las ecuaciones de Lagrange (35) son igualmente válidas para un movimiento que no está sometido a vínculos. En ese caso podemos interpretar las transformaciones anteriores como la transformación de las leyes de Newton en coordenadas cartesianas a cualquier otro conjunto de coordenadas generalizadas.

Fuerzas Conservativas

Si las fuerzas involucradas son conservativas, entonces existe una función escalar la cual hemos denominado potencial $V(x_i)$, tal que la fuerza:

$$F_i = -\frac{\partial V}{\partial x_i} \quad \text{tal que} \quad \vec{F} = -\nabla V$$

Con esto, la fuerza generalizada que hemos definido antes toma la forma:

$$Q_k = F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} = -\frac{\partial V}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} = -\frac{\partial V}{\partial q_k}$$

esto es, ahora $V = V(q_k)$ y:

$$Q_k = -\frac{\partial V}{\partial q_k}$$

Entonces, para la ecuación de D'Alembert escrita en coordenadas generalizadas o la denominada ecuación de Lagrange tenemos:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial}{\partial q_k} (K - V) = 0$$

donde hemos usado el hecho de que $\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_k} = 0$ puesto que $V = V(q_k)$.

La función lagrangiana del sistema, conocida también como potencial cinético o simplemente lagrangiano se define como:

$$\mathcal{L} = K - V$$

Finalmente, la ecuación de Lagrange, la cual describe la dinámica del sistema en coordenadas generalizadas, toma la forma:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = 0 \quad (36)$$

donde $k = 1, \dots, 3N - m$. Note que existen tantas ecuaciones independientes como coordenadas generalizadas.

Ejemplo:

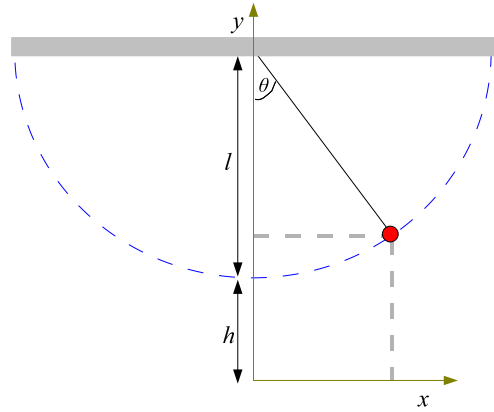


Figura 25: Ecuaciones de Lagrange para el péndulo simple

Encuentre las ecuaciones que describen la dinámica de un péndulo simple utilizando las ecuaciones de Lagrange.

Para describir el movimiento del péndulo simple utilizamos los ejes coordenados que se muestran en la Fig. 25, las coordenadas x e y son dadas por:

$$\begin{aligned} x &= l \sin \theta \\ y &= l + h - l \cos \theta \end{aligned}$$

La energía cinética en este caso queda:

$$K = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2$$

Por otra parte, para la energía potencial asociada a la fuerza gravitatoria tenemos $m\vec{g} = -\nabla V$, luego:

$$V = mgy = mg(l + h - l \cos \theta)$$

El lagrangiano para el sistema queda:

$$\mathcal{L} = K - V = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 - mg(l + h - l \cos \theta)$$

Finalmente, las ecuaciones de movimiento que describen el sistema, Ecs.(36), son dadas por:

$$m l^2 \ddot{\theta} + mgl \sin \theta = 0$$



donde reconocemos a θ como la coordenada generalizada. Note que la constante h , asociada a la elección del sistema coordenado, no aparece en las ecuaciones finales.

Tarea: Determine, utilizando las ecuaciones de Lagrange, las ecuaciones de movimiento en el caso de un péndulo planar doble.

Potenciales Generalizados

Hemos visto que las ecuaciones de Lagrange (36) son válidas para sistemas conservativos, es decir, para el caso en el cual la fuerza generalizada es dada por:

$$Q_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j}$$

Sin embargo, las ecuaciones pueden ser aplicadas a sistemas no conservativos, siempre que sea posible encontrar la función \mathcal{V} llamada potencial generalizado tal que se cumpla la condición:

$$Q_j = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial q_j} \quad (37)$$

Para un sistema no conservativo tenemos:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial K}{\partial q_j} = Q_j$$

luego, si Q_j es dado por (37) entonces será válida la ecuación de Lagrange dada en (36), donde ahora el potencial conservativo V es reemplazado por el potencial generalizado \mathcal{V} .

Ejemplo:

Considere una carga eléctrica q en presencia de un campo electromagnético. Del electromagnetismo sabemos que la fuerza a la cual está sometida la carga q se denomina *fuerza de Lorentz*,

$$\vec{F}_L = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

donde \vec{E} es el campo eléctrico, \vec{v} es la velocidad de la carga y \vec{B} es el campo magnético.

Por otra parte, el electromagnetismo puede ser resumido en cuatro ecuaciones fundamentales conocidas como las *ecuaciones de Maxwell*,

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (38)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (39)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (40)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (41)$$

Las cuales se corresponden a las ecuaciones de Gauss para el campo eléctrico y magnético, la ecuación de Faraday y la ecuación de Ampere-Maxwell, respectivamente. Las constantes ϵ_0 y μ_0 son constantes asociadas al electromagnetismo y \vec{j} es la densidad de corriente eléctrica.

Podemos escribir la fuerza de Lorentz en términos de un potencial generalizado dependiente de la velocidad.

De las propiedades de los operadores diferenciales notamos que $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ (consistente con la Ec.(39)). Considerando este resultado en la Ec.(40) obtenemos: $\vec{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$. Reescribimos la fuerza de Lorentz como:

$$\vec{F}_L = q \left(-\nabla\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{v} \times \nabla \times \vec{A} \right)$$

Por otra parte, dado que:

$$\begin{aligned} \vec{v} \times \nabla \times \vec{A} &= \nabla(\vec{v} \cdot \vec{A}) - (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{A} \\ &= \nabla(\vec{v} \cdot \vec{A}) - \frac{d\vec{A}}{dt} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \end{aligned}$$

y $\vec{A} = \nabla_v(\vec{v} \cdot \vec{A})$ junto con $\nabla_v\phi = 0$, obtenemos finalmente:

$$\begin{aligned} \vec{F} &= -\nabla\mathcal{V} + \frac{d}{dt} \nabla_v \mathcal{V} \\ F_i &= -\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x_i} + \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial v_i} \end{aligned}$$

donde $\mathcal{V} = q(\phi - \vec{v} \cdot \vec{A})$.



Las coordenadas q_i permiten determinar la configuración del sistema en un instante t . La evolución del sistema es descrita por el movimiento de un punto M en un espacio lineal f -dimensional denominado *espacio de configuración del sistema*, con ejes q_1, q_2, \dots, q_f .

La configuración instantánea del sistema está determinada por los valores de las f coordenadas generalizadas q_1, q_2, \dots, q_f y corresponde a un punto particular de un hiperespacio cartesiano en el que las q_i coordenadas forman los f ejes coordenados.

Debemos notar que no necesariamente existe alguna relación entre el espacio de configuración y el espacio físico tridimensional. Además, la trayectoria en el espacio de configuración no tiene por qué parecerse a la trayectoria espacial de una partícula real.

Momentum canónico conjugado de una coordenada generalizada

Las variables dinámicas que definen el estado del sistema son f coordenadas q_i y f “velocidades” \dot{q}_i .

Es conveniente definir el *momentum canónico conjugado* p_i para la coordenada q_i :

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}$$

Note que la denominación proviene de la siguiente relación:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = Q_i$$

válido cuando $\frac{\partial K}{\partial q_i} \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_i} = 0$, donde la fuerza generalizadas Q_i corresponde a la derivada temporal del momentum canónico conjugado, en analogía con la segunda ley de Newton.

De acuerdo con Newton, $p_i = mv_i$. Sin embargo, no es posible generalizar esto haciendo $v_i = \dot{q}_i$. En general, esto sólo es cierto cuando las coordenadas q_i corresponden a coordenadas cartesianas.

Ejemplo:

Para una partícula con una cierta energía cinética en un potencial nulo y en coordenadas polares tenemos: $\mathcal{L} = K = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)$, luego $p_\theta = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} \neq m\dot{\theta}$.

Coordenadas cíclicas

Consideremos un sistema de f grados de libertad, cuya configuración es dada por:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(q_1, q_2, \dots, q_f, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_f, t)$$

Supongamos que en la expresión calculada del lagrangiano no aparece la coordenada q_k . Cuando ocurre esta situación, la coordenada q_k se denominada *coordenada cíclica*.

Teorema: El momentum canónico conjugado p_k , asociado a la coordenada q_k , se conserva si q_k es una coordenada cíclica.

Demostración: Si q_k es una coordenada cíclica, entonces $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = 0$. Luego, de la ecuación de Lagrange tenemos que $\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} = 0$, lo cual indica que $p_k = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}$ es constante.

Hasta ahora, la obtención de las ecuaciones de Lagrange proviene de considerar un pequeño desplazamiento virtual del estado instantáneo del sistema, es decir, proviene de un principio diferencial como lo es el principio de D'Alembert.

También es posible obtener las ecuaciones de Lagrange a partir de un principio que considere el movimiento del sistema entre los tiempos t_1 y t_2 y que considere pequeñas variaciones virtuales del movimiento respecto del movimiento real. Un principio de esta naturaleza es conocido como un principio integral.

Cálculo de variaciones

Este formalismo provee una nueva formulación de las leyes de la mecánica, en la cual podremos deducir las ecuaciones de Lagrange a partir de un principio variacional.

A modo de introducción consideremos el siguiente problema. Sea x una variable independiente definida en el intervalo cerrado

$[x_1, x_2]$ y sea $y(x)$ alguna función diferenciable de x definida en este intervalo. Denotaremos $y'(x) = \frac{dy}{dx}$.

Supongamos además que conocemos la relación $\phi = \phi[y(x), y'(x), x]$, la cual nos entrega el número ϕ para valores dados de x , $y(x)$ e $y'(x)$. Esta función de una función se denomina *funcional*.

El problema básico del cálculo de variaciones es el siguiente: encontrar la función $y(x)$ tal que:

$$I = \int_{x_1}^{x_2} \phi[y, y', x] dx$$

sea un extremo (generalmente un mínimo).

Ejemplo 1: Considere dos puntos en un plano, ¿qué función $y(x)$ minimiza la distancia entre los puntos?

Un elemento diferencial de distancia es dado por:

$$ds = (dx^2 + dy^2)^{1/2} = [1 + (y')^2]^{1/2} dx$$

Luego, el funcional que define este problema toma la forma $\phi = [1 + (y')^2]^{1/2}$ donde la integral I en este caso corresponde a la distancia total entre los puntos 1 y 2, es decir $I = \int_1^2 ds$.

Ejemplo 2: El problema que dio origen al cálculo de variaciones considera una cuenta que de desliza sin fricción por un alambre (desde el punto 1 al punto 2) y se encuentra sometida a la acción de un campo gravitacional uniforme, ¿qué forma del alambre minimiza el tiempo de viaje?

Sabemos que el tiempo total es dado por:

$$t_{12} = \int_1^2 dt = \int_1^2 \frac{ds}{v} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{[1 + (y')^2]^{1/2}}{[2gy]^{1/2}} dx$$

donde en el último paso hemos utilizado la conservación de la energía para una partícula cuya velocidad inicial es nula y la forma del elemento diferencial de distancia.

Notamos que el diferencial asociado al problema queda definido como: $\phi = \frac{[1 + (y')^2]^{1/2}}{[2gy]^{1/2}}$.

La curva resultante se denomina *braquistocrona*.

Para resolver el problema básico del cálculo de variaciones consideramos dos caminos infinitesimalmente diferentes con extremos comunes. Sea $y(x)$ el camino que resuelve el problema e $Y(x)$ un camino próximo tal que,

$$Y(x) = y(x) + \epsilon \eta(x)$$

donde ϵ es una cantidad infinitesimalmente pequeña y $\eta(x)$ es una función arbitraria de x , tal que $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$ de modo que $Y(x_1) = y(x_1)$ e $Y(x_2) = y(x_2)$.

Calculemos el valor de la integral I para la función $Y(x)$:

$$I = \int_{x_1}^{x_2} \phi[Y(x), Y'(x), x] dx$$

$$I = \int_{x_1}^{x_2} \phi[y(x) + \epsilon \eta(x), y'(x) + \epsilon \eta'(x), x] dx$$

Dado que $Y(x)$ es infinitesimalmente cercana a la curva $y(x)$ la cual resuelve el problema (logra que I sea un extremo), es natural expandir el integrando anterior en una serie de Taylor en torno a $\epsilon = 0$:

$$I = \int_{x_1}^{x_2} \left(\phi[y, y', x] + \epsilon \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \eta + \frac{\partial \phi}{\partial y'} \eta' \right) \right) dx + O(\epsilon^2) \quad (42)$$

Si I es un extremo (máximo, mínimo o punto de inflexión) para la función $y(x)$, la integral puede crecer o decrecer cuando alguna otra función se suma a $y(x)$. Esta observación indica que I , considerada como una función de ϵ , debe tener una derivada nula en el punto $\epsilon = 0$:

$$\left[\frac{dI}{d\epsilon} \right]_{\epsilon=0} = 0 \quad (43)$$

Para estar seguros de que se trata de un mínimo deberíamos considerar la segunda derivada, pero ello generalmente complica el problema. En la práctica, es posible inferir a partir de la física del problema si se trata de un máximo o mínimo.

Considerando la Ec.(43) en la Ec.(42) tenemos:

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial \phi}{\partial y} \eta + \frac{\partial \phi}{\partial y'} \eta' \right] dx = 0 \quad (44)$$

Por otra parte, para el segundo término en la integral anterior tenemos:

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial \phi}{\partial y'} \eta' dx &= \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{d}{dx} \left[\frac{\partial \phi}{\partial y'} \eta \right] - \eta \frac{d}{dx} \frac{\partial \phi}{\partial y'} \right] dx \\ &= - \int_{x_1}^{x_2} \eta \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y'} \right) dx \end{aligned}$$

donde hemos considerado $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$ al evaluar el primer término de la integral en los extremos x_1 y x_2 .

Con esto, la Ec.(44) queda:

$$\int_{x_1}^{x_2} \eta \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{d}{dx} \frac{\partial \phi}{\partial y'} \right) dx = 0$$

Dado que la función η es arbitraria, esto indica que:

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{d}{dx} \frac{\partial \phi}{\partial y'} = 0 \quad (46)$$

Este resultado se conoce como la *ecuación de Euler-Lagrange* para el problema variacional. Si I es un extremo, entonces la función $y(x)$ satisface (46). Del mismo modo, si $y(x)$ satisface (46) entonces I es un extremo.

Utilizando la ecuación de Euler-Lagrange en los ejemplos anteriores para el funcional correspondiente encontramos que, en el ejemplo 1 obtenemos la ecuación $y''(x) = 0$ la cual tiene como solución una recta. Mientras que en el ejemplo 2, la ecuación diferencial correspondiente será:

$$1 + (y')^2 = \frac{1}{2gyC^2}$$

donde C es una constante arbitraria. La curva solución de esta ecuación diferencial se conoce como braquistocrona y es dada paramétricamente por:

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{4gC^2} (\theta - \sin \theta) \\ y &= \frac{1}{4gC^2} (1 - \cos \theta) \end{aligned}$$

Es útil reformular el análisis anterior en un lenguaje levemente diferente, con el cual los cálculos variacionales se vuelven más concisos.

Definamos:

$$Y(x) - y(x) = \epsilon \eta(x) = \delta y(x)$$

donde $y(x)$ es, como antes, la solución al problema variacional e $Y(x)$ es una pequeña (ϵ) variación de esta solución, luego:

$$Y'(x) - y'(x) = \epsilon \eta'(x) = \delta y'(x)$$

lo cual indica que:

$$\delta y'(x) = \frac{d \delta y}{dx}$$

Por otra parte, llamaremos $\delta \phi = \phi[Y, Y', x] - \phi[y, y', x]$ de modo que, en consistencia con (42),

$$\delta \phi = \frac{\partial \phi}{\partial y} \delta y + \frac{\partial \phi}{\partial y'} \delta y'$$

lo cual es válido a primer orden.

Además,

$$\begin{aligned} \delta I &= \int_{x_1}^{x_2} \phi[Y, Y', x] dx - \int_{x_1}^{x_2} \phi[y, y', x] dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \delta \phi dx = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \delta y + \frac{\partial \phi}{\partial y'} \delta y' \right) dx \end{aligned}$$

Ahora podemos hacer la misma integración por partes que hicimos antes (Ver Ec.(45)):

$$\begin{aligned} \delta I &= \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial \phi}{\partial y} \delta y + \frac{\partial \phi}{\partial y'} \frac{d}{dx} (\delta y) \right] dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial \phi}{\partial y} \delta y + \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y'} \delta y \right) - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y'} \right) \delta y \right] dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial \phi}{\partial y'} \right] \delta y dx \end{aligned}$$

Finalmente, para que I sea un extremo, debemos tener $\delta I = 0$. Dado que la variación δy es arbitraria, entonces:

$$\delta I = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial \phi}{\partial y'} = 0$$

Principio de Hamilton

La similitud entre las ecuaciones de Lagrange (36) y la ecuación de Euler-Lagrange (46) sugiere que la primera tiene una base variacional.

La formulación variacional de la mecánica es conocida como principio de Hamilton.

Consideremos primero el principio de Hamilton para un sistema con una única coordenada generalizada q sujeta a fuerzas conservativas, donde las ecuaciones de Lagrange pueden construirse en analogía directa con las ecuaciones de Euler-Lagrange.

Para un único grado de libertad, el principio de Hamilton toma la forma:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}[q(t), \dot{q}(t), t] dt = 0 \quad \text{para extremos fijos}$$

donde la integral temporal del lagrangiano se denomina *acción*.

El principio de Hamilton establece que de todos los caminos posibles entre los extremos fijos $q(t_1)$ y $q(t_2)$, la trayectoria dinámica real es aquella que extrema la acción.

Note que la variación considerada aquí es precisamente el desplazamiento virtual introducido antes.

La ecuación de Euler-Lagrange para el problema variacional planteado por el principio de Hamilton queda:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) = 0$$

que es la ecuación de Lagrange.

En resumen: el valor de la acción depende del camino considerado para el movimiento. El camino real es aquel que minimiza la acción, en realidad, el que hace que la acción sea un extremo.

Dado que el lagrangiano es la diferencia entre la energía cinética y potencial, el principio de Hamilton establece que la partícula toma el camino que minimiza la diferencia integrada entre estas cantidades.

Para extender este resultado a n grados de libertad arbitrarios consideramos:

$$\begin{aligned} \delta I &= \delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t) dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right) dt \\ 0 &= \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^n \delta q_i \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) dt \quad (47) \end{aligned}$$

Si las coordenadas q_i son coordenadas generalizadas apropiadas entonces los δq_i son variaciones independientes y las ecuaciones de Lagrange son válidas.

Ejercicio: Utilice el principio de Hamilton para encontrar las ecuaciones de movimiento de un sistema descrito por el lagrangiano $\mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, \ddot{q}_i, t)$. Considere que $\delta q_i(\text{extremos}) = \delta \dot{q}_i(\text{extremos}) = 0$

Fuerzas vinculares

A menudo es preferible incorporar los vínculos en el principio de Hamilton usando el *método de los multiplicadores de Lagrange*. Note que la Ec.(47) es válida incluso cuando las variaciones δq_i no son todas independientes.

Consideremos las variaciones de la ecuaciones que definen k vínculos holónomos $f_j(q_i) = c_j$,

$$\delta f_j = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial q_i} \delta q_i = 0 \quad \text{para } j = 1, \dots, k$$

Estas ecuaciones proveen k relaciones vinculares entre las variaciones δq_i . Multiplicamos cada una de estas ecuaciones por un multiplicador de Lagrange λ_j , sumamos sobre j , integramos sobre el tiempo y sumamos esto a la Ec.(47):

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^n \delta q_i \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} + \sum_{j=1}^k \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial q_i} \right) dt = 0 \quad (48)$$

Ahora tenemos $n - k$ variaciones independientes δq_i y escogemos arbitrariamente etiquetar estas variaciones con $i = 1, \dots, n - k$. Las variaciones resultantes $\delta q_{n-k+1}, \dots, \delta q_n$ no serán independientes. Sin embargo, podemos escoger k funciones independientes $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ de modo que los coeficientes de $\delta q_{n-k+1}, \dots, \delta q_n$ sean nulos idénticamente en la expresión (48). Como resultado tenemos:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = \sum_{j=1}^k \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial q_i} \quad (49)$$

$$f_j(q_1, \dots, q_n, t) = c_j \quad (50)$$

donde $i = 1, \dots, n$ y $j = 1, \dots, k$. Tenemos entonces, $n+k$ ecuaciones independientes y $n+k$ incógnitas, $q_1, \dots, q_n, \lambda_1, \dots, \lambda_n$.

Note que si escribimos las ecuaciones de Lagrange en coordenadas generalizadas tendríamos $n - k$ ecuaciones independientes. Aumentar el número a $n + k$ parece complicar el problema en lugar de simplificarlo. Sin embargo, la introducción de los multiplicadores de Lagrange nos permite determinar las reacciones vinculares, las cuales no estaban presentes en las ecuaciones de Lagrange.

Para relacionar los multiplicadores de Lagrange con las reacciones vinculares consideremos la forma original de las ecuaciones de Lagrange en (35):

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial K}{\partial q_i} = Q_i$$

donde $i = 1, \dots, n$ son grados de libertad y Q_i es la fuerza generalizada definida mediante la relación:

$$\delta W = \sum_i Q_i \delta q_i$$

Dado que $\mathcal{L} = K - V$ y $V = V(q_i, t)$, comparando (49) con (35) notamos que:

$$Q_i = -\frac{\partial V}{\partial q_i} + \sum_{j=1}^k \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial q_i} = -\frac{\partial V}{\partial q_i} + Q_i^{fv}$$

donde asociamos las funciones Q_i^{fv} con las fuerzas vinculares. Note que, en general la interpretación de Q_i^{fv} requiere considerar desplazamientos virtuales no compatibles con los vínculos.

En resumen, podemos omitir las fuerzas vinculares considerando $n - k$ coordenadas generalizadas independientes, tal como se hizo para derivar las ecuaciones de Lagrange. Pero, si deseamos encontrar las fuerzas vinculares, dejamos las coordenadas libres e incorporamos los vínculos con el método de los multiplicadores de Lagrange.

Ejemplo 1: Péndulo Simple

La energía cinética y el potencial son dados respectivamente por:

$$K = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2)$$

$$V = -mgy = -mgr \cos \theta$$

donde hemos escogido el eje y apuntando hacia abajo. El lagrangiano correspondiente es:

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) + mgr \cos \theta$$

Note que, a pesar de que sabemos que la coordenada r es constante (debido al vínculo), consideramos su derivada temporal puesto que queremos determinar la reacción vincular asociada al problema. Debemos considerar los vínculos al final, en las ecuaciones de movimiento.

Las ecuaciones de movimiento asociadas (usando el método de los multiplicadores de Lagrange) son:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} + \lambda \frac{\partial f}{\partial r} = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} + \lambda \frac{\partial f}{\partial \theta} = 0$$

Dado que el vínculo es definido por $r = l$ (donde l es el largo constante de la cuerda), tenemos $\frac{\partial f}{\partial r} = 1$ y $\frac{\partial f}{\partial \theta} = 0$.

Al reemplazar el lagrangiano y considerar los vínculos tenemos:

$$\begin{aligned} mr\ddot{\theta} + mg \cos \theta - \cancel{mr\dot{\theta}^2} + \lambda &= 0 \\ -mgr \sin \theta - mr^2 \ddot{\theta} &= 0 \end{aligned}$$

Por otra parte, el trabajo virtual es dado por: $\delta W = \sum Q_i \delta q_i = Q_r \delta r + Q_\theta \delta \theta = -T \delta r$, donde T es la tensión en la cuerda o la reacción vincular. Comparando esto con:

$$Q_j^{fv} = \sum_{i=1}^k \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial q_i}$$

donde k es el número de vínculos encontramos $\lambda = -T$.

Finalmente, las ecuaciones de movimiento quedan:

$$T = m l \dot{\theta}^2 + m g \cos \theta \quad (51)$$

$$l \ddot{\theta} = -g l \sin \theta \quad (52)$$

La ecuación de Lagrange sólo nos permite obtener la Ec.(52), la otra ecuación, la cual determina la tensión T en términos de la coordenada θ , sólo es posible obtenerla con el método de los multiplicadores de Lagrange.

Ejemplo 2: Máquina de Atwood

Sin considerar el vínculo a priori el lagrangiano correspondiente es:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2 + m_1 g x_1 + m_2 g x_2$$

donde los ejes x_1 y x_2 apuntan ambos hacia abajo.

Dado que hay sólo un vínculo para el sistema, $x_1 + x_2 = l$ (l es la longitud constante de la cuerda), existe sólo un multiplicador de Lagrange asociado. Las correspondientes ecuaciones de movimiento quedan:

$$m_1 \ddot{x}_1 - m_1 g = \lambda \quad (53)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 - m_2 g = \lambda \quad (54)$$

Considerando ahora el vínculo tenemos que: $\ddot{x}_1 = -\ddot{x}_2$. Combinando las ecs.(53) y (54) encontramos:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g \\ \lambda &= -\frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} g = -T_1 = -T_2 \end{aligned}$$