Mecánica Clásica

M. Antonella Cid
Departamento de Física - Facultad de Ciencias
Universidad del Bío-Bío

13 de abril de 2012

Introducción

El físico ruso George Gamow establece que fue el pueblo griego el que dio origen a la Física como ciencia. En su libro "Biografía de la Física" menciona, *es interesante notar que mientras las culturas más antiguas como Babilonia y Egipto contribuyeron en gran medida al desarrollo de las matemáticas y la astronomía fueron completamente estériles en el desarrollo de la física. La explicación posible de esta deficiencia, en comparación con la ciencia griega, es que los dioses de Babilonia y Egipto vivían arriba, entre las estrellas, mientras que los dioses de los antiguos griegos vivían a unos 10000 pies (3000 m) de altura en el monte Olimpo.*

La mecánica es una rama de la Física que analiza el movimiento de los cuerpos. La mecánica clásica es una formulación de la mecánica que describe el movimiento de cuerpos que se mueven a velocidades pequeñas comparadas con la velocidad de la luz. Otros campos de estudio de la mecánica son la mecánica cuántica (descripción de partículas subatómicas) y la mecánica relativista (descripción de partículas que se mueven a velocidades cercanas a la de la luz).

Gamow menciona a Arquímedes (287-212 a.C) como el padre de la mecánica. Arquímedes fue un matemático, físico, ingeniero, inventor y astrónomo nacido en Siracusa capital de Sicilia, entre los avances de Arquímedes en física se encuentran estudios en hidrostática (principio de flotación de Arquímedes), estática (principio de la palanca, centro de gravedad), entre otros.

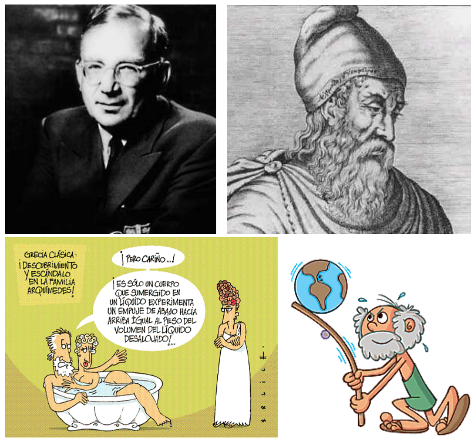

Figura 1: Arriba: de izquierda a derecha, el físico ruso George Gamow (1904-1968) y el matemático, físico, astrónomo e ingeniero griego Arquímedes. Abajo: caricatura del principio de flotación y caricatura del principio de palanca.

La mecánica clásica considera la aplicación de las leyes de Newton para explicar y predecir el movimiento dinámico de partículas puntuales y medios contínuos. Como tal, se refiere al comportamiento de objetos macroscópicos familiares como satélites (naturales y artificiales), la atmósfera, los océanos, sólidos y la Tierra misma. Además, el estudio de la mecánica clásica es básico para derivar la descripción cuántica de la materia subatómica.

Conceptos Básicos

Sistema coordenado

Un sistema coordenado es una construcción puramente matemática para la presentación de relaciones matemáticas. Los valores medidos de las cantidades físicas son independientes de la elección del sistema coordenado.

Ejemplo

Cuando calculamos el perímetro de una circunferencia podemos usar un sistema de coordenadas polares o un sistema de coordenadas cartesiano, el resultado será siempre dos π veces el radio de la circunferencia. Este valor coincide con el valor medido por una huincha calibrada.

Sistema de referencia (SR)

Son físicamente reales y corresponden a un conjunto de instrumentos de medida diseñados para la determinación de cantidades físicas. En el caso más simple, las medidas pueden ser realizadas con la ayuda de tres varillas métricas y un reloj. En general, nos referimos a un **observador** cuando hablamos de un sistema de referencia particular.

Suceso

Cualquier cosa que ocurre en un punto del espacio en un instante dado.

Posición

La posición de un suceso queda operacionalmente definida (por medio de trabajo de laboratorio o trabajo teórico) por cuatro datos obtenidos a partir de mediciones:

$$(\vec{r}, t) = \{x_i, t\}_{i=1}^{3}$$

Movimiento

El movimiento de un cuerpo (o partícula) es definido como un contínuo de sucesos definidos con respecto a un **sistema de referencia inercial (SRI)**.

Sistema de referencia inercial

Newton lo definió como un sistema de referencia que se encuentra en reposo respecto de las estrellas fijas.

Cinemática de la partícula

Su función es describir el movimiento de una **partícula newtoniana** en función de su velocidad y aceleración. Su objetivo es encontrar la ecuación del movimiento que permita determinar la posición y la velocidad de la partícula en cualquier instante de tiempo.

Dinámica de la partícula

Su función es describir el movimiento de una **partícula newtoniana** en función de la fuerza, la masa y la aceleración. Si $\vec{r}$ es el vector de posición de una partícula y $\vec{v}$ es la velocidad de la partícula, entonces:

$$\vec{v} \equiv \frac{d\vec{r}}{dt} \qquad \text{y} \qquad \vec{a} \equiv \frac{d\vec{v}}{dt}$$

es la aceleración.

Primera ley de Newton

En un sistema de referencia inercial, los cuerpos permanecen en reposo o se mueven con velocidad constante a menos que una fuerza neta actúe sobre ellos.

Segunda ley de Newton

La mecánica de la partícula está contenida en la segunda ley del movimiento de Newton, la cual establece que existen sistemas de referencia (inerciales) en los cuales el movimiento se describe por la ecuación diferencial:

$$\sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} \qquad (1)$$

donde $\vec{p} \equiv m\vec{v}$ es el momentum lineal y $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ es la aceleración. La segunda igualdad en (1) es válida sólo para masas constantes.

La segunda ley de Newton expresa que la suma de todas las fuerzas (externas e internas) actuando sobre el cuerpo es proporcional a la aceleración que experimenta el cuerpo:

$$\sum \vec{F}_i = \sum \vec{F}_i^{(\text{ext})} + \sum \vec{F}_i^{(\text{int})} = m\vec{a} \qquad (2)$$

Tercera ley de Newton

A cada acción se corresponde una reacción igual y opuesta. Esto es, si $\vec{F}_{21}$ es la fuerza que ejerce la partícula 1 sobre la partícula 2, entonces:

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$$

donde $\vec{F}_{12}$ es la fuerza que ejerce la partícula 2 sobre la partícula 1 y las fuerzas actúan a lo largo de la línea que separa las partículas.

Relatividad de Galileo

Cualquier SR moviéndose con velocidad constante en relación a un SRI es inercial. De esta manera, dos observadores que se mueven entre ellos con velocidad constante inferirán las mismas leyes del movimiento.

Si $\vec{r}$ y $\vec{r'}$ son las coordenadas del objeto vistas desde dos sistemas de referencia que se mueven con velocidad constante $\vec{V}$ uno respecto del otro (ver FIG.2) tendremos que $\vec{r'} = \vec{r} - \vec{V}t$ (dado que el tiempo es absoluto en la mecnica newtoniana, es decir, todos los observadores miden el mismo tiempo) de manera que $\vec{v'} = \vec{v} - \vec{V}$ y $\vec{a'} = \vec{a}$, luego naturalmente $\vec{F'} = \vec{F}$ debido a la segunda ley de Newton.

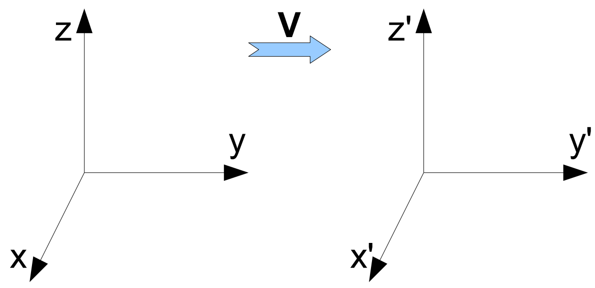

Figura 2: Principio de relatividad de Galileo

Teoremas de conservación

Momentum lineal

Si la suma de todas las fuerzas es cero, entonces el momentum lineal se conserva. La derivación es directa a partir de la Eq.(1).

$$\sum \vec{F} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \vec{p} \text{ es constante}$$

Momentum angular

El momentum angular se define como:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m\vec{r} \times \vec{v}$$

Si ahora calculamos la tasa de cambio del momentum angular para m constante tenemos:

$$\dot{\vec{L}} = \frac{d\vec{L}}{dt} = m\dot{\vec{r}} \times \vec{v} + m\vec{r} \times \dot{\vec{v}} = \sum \vec{r} \times \vec{F}$$

donde en la última igualdad hemos usado la segunda ley de Newton y el hecho de que $\dot{\vec{r}} = \vec{v}$, además $\vec{v} \times \vec{v} = 0$.

El producto $\vec{r}\times\vec{F}$ se denomina **torque**, luego podemos ver que existe una ley de conservación que establece que si la suma de todos los torques es cero, entonces el momentum angular se conserva.

TAREA: A diferencia del momentum lineal $\vec{p}$, el momentum angular $\vec{L}$ depende de la elección del sistema coordenado.

Trabajo y energía

Sea $\vec{F}$ una fuerza estática aplicada sobre una partícula durante un intervalo de tiempo dt, en el cual ésta experimenta un desplazamiento $d\vec{r}$. Se llama trabajo de una fuerza $\vec{F}$ a la magnitud física escalar dW definida por:

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Consecuentemente, el trabajo hecho para mover la partícula de prueba una distancia finita desde el punto 1 al punto 2 a lo largo de algún camino será:

$$W_{1\to 2} = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Reescribiendo convenientemente tenemos:

$$\begin{aligned} W_{1\to 2} &= \int_1^2 m\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v}dt = m\int_1^2 \vec{v} \cdot d\vec{v} \\ W_{1\to 2} &= \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 \end{aligned}$$

lo cual es independiente del camino escogido.

El término $K = \frac{1}{2}mv^2$ se denomina **energía cinética**, luego podemos decir que, el trabajo hecho al mover la partícula desde el punto 1 al punto 2 es precisamente el incremento de energía cinética.

Fuerzas conservativas

Si el trabajo de una fuerza a lo largo de un camino cerrado es cero, entonces la fuerza se denomina conservativa:

$$W = \oint_c \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

Esto significa que el trabajo hecho por una fuerza conservativa no depende del camino.

Teorema

Si $\vec{F}$ es un **campo** de fuerzas conservativas, entonces existe un **campo** escalar $U(\vec{r})$ tal que:

$$\vec{F} = -\nabla U(\vec{r})$$

$U(\vec{r})$ se denomina **campo** potencial y las superficies $U(\vec{r}) =$ constante se llaman superficies equipotenciales.

Verificación

Sabemos que si una fuerza es conservativa, entonces:

$$W = \oint_c \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

Del teorema de Stokes deducimos que si:

$$\oint_c \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 \quad \text{entonces} \quad \oint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} = 0$$

dado que la superficie S es arbitraria tenemos que $\nabla \times \vec{F} = 0$. Por otra parte, de un conocido resultado del cálculo diferencial sabemos que $\nabla \times (\nabla U) = 0$, luego si $\nabla \times \vec{F} = 0$ entonces debe existir una función escalar U tal que $\vec{F} = -\nabla U$.

Como consecuencia, para fuerzas conservativas, tenemos la ley de conservación de la energía mecánica:

$$\Delta K = -\Delta U \qquad \text{ó} \qquad K_i + U_i = K_f + U_f$$

donde los subíndices i y f denotan valores incial y final respectivamente.

<u>TAREA:</u> Escriba tres propiedades que debe satisfacer una fuerza conservativa.

Sistemas de Partículas

Consideremos un sistema de N partículas en el cual las masas individuales $\{m_i\}$ son constantes en el tiempo y para el cual las leyes de Newton son válidas, las posiciones de las partículas son dadas por los vectores $\{\vec{r}_i\}$ en un SRI.

Definimos el vector centro de masa $\vec{R}$ mediante:

$$\sum m_i\vec{r}_i = \sum m_i\vec{R} \qquad \text{ó} \qquad \vec{R} = M^{-1}\sum_i m_i\vec{r}_i \tag{3}$$

donde $M \equiv \sum_{i=1}^N m_i$ es la masa total del sistema.

<u>TAREA:</u> Considere un sistema de 3 partículas idénticas (de masa 1) que se sitúan en un plano cartesiano (x,y) formando un triángulo equilátero en el primer cuadrante. Dos partículas se encuentran en las posiciones (0,0) y (3,0). Encuentre la ubicación de la tercera partícula y la ubicación del centro de masa.

Movimiento del centro de masa

Es conveniente separar la fuerza que actúa sobre la i-ésima partícula $\vec{F}_i$ en una contribución externa y una contribución interna, $\vec{F}_i^{(e)}$ y $\vec{F}_{ij}$ para $i \neq j$ respectivamente, de modo que:

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{(e)} + \sum_j \vec{F}_{ij} \qquad \text{para } i \neq j$$

Por ejemplo, para un sistema de 3 partículas, la fuerza que actúa sobre la partícula 1 debido a la acción de una fuerza externa y la acción de las partículas 2 y 3 será: $\vec{F}_1 = \vec{F}_1^{(e)} + \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13}$. $\vec{F}_{ii}$ es cero puesto que un cuerpo no puede ejercer una fuerza sobre sí mismo.

Momentum Lineal

La segunda ley de Newton para la i-ésima partícula queda entonces:

$$\frac{d\vec{p}_i}{dt} = \vec{F}_i = \vec{F}_i^{(e)} + \sum_j \vec{F}_{ij} \qquad \text{para } i \neq j$$

Evidentemente el sistema experimentará un movimiento complicado debido a la acción de todas las fuerzas presentes. Aún así, existen ciertas cantidades conservadas que ayudan a simplificar la descripción. En particular, consideremos la aceleración del centro de masa derivando la Eq.(3):

$$M\ddot{\vec{R}} = \sum m_i \ddot{\vec{r}}_i = \sum \dot{\vec{p}}_i = \sum \vec{F}_i^{(e)} + \sum_{ij} \vec{F}_{ij}$$

Ahora, notamos que debido a la tercera ley de Newton $\sum_{ij} \vec{F}_{ij} = 0$ para $i \neq j$. Podemos ver esto fácilmente para un sistema de 3 partículas,

$$\sum_{ij} \vec{F}_{ij} = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \vec{F}_{21} + \vec{F}_{23} + \vec{F}_{31} + \vec{F}_{32}$$

lo cual se anula debido a que $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$ por la tercera ley de Newton.

Luego tenemos que:

$$M\ddot{\vec{R}} = M\dot{\vec{V}} = \sum \vec{F}_i^{(e)} \equiv \vec{F}^{(e)},$$

es decir, el centro de masa $\vec{R}$ se mueve como si la fuerza externa total $\vec{F}^{(e)}$ actuara en la masa total M concentrada en la posición $\vec{R}$. Como consecuencia, el momentum total del sistema:

$$\vec{P} = \sum \vec{p}_i = \sum m_i \dot{\vec{r}}_i = \sum m_i \vec{v}_i = M\dot{\vec{R}} = M\vec{V}$$

es un vector constante si $\vec{F}^{(e)}$ es nulo.

Momentum angular

El momentum angular total para un sistema de partículas se define como:

$$\vec{L} = \sum \vec{r}_i \times \vec{p}_i,$$

luego su derivada temporal queda:

$$\dot{\vec{L}} = \sum \dot{\vec{r}}_i \times \vec{p}_i + \sum \vec{r}_i \times \dot{\vec{p}}_i = \sum \vec{r}_i \times \dot{\vec{p}}_i$$

donde el primer término se anula porque los vectores $\dot{\vec{r}}_i$ y $\vec{p}_i$ son paralelos, luego tenemos:

$$\dot{\vec{L}} = \sum \vec{r}_i \times (\vec{F}_i^{(e)} + \sum_j \vec{F}_{ij}) \qquad \text{para } i \neq j$$

donde podemos hacer la siguiente descomposición:

$$\begin{aligned} \sum_{ij} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} &= \frac{1}{2} \sum_{ij} (\vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} + \vec{r}_j \times \vec{F}_{ji}) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{ij} (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}_{ij} = 0 \end{aligned}$$

el último término se anula puesto que el vector $\vec{r}_i - \vec{r}_j$ es paralelo al vector $\vec{F}_{ij}$.

Finalmente tenemos:

$$\dot{\vec{L}} = \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(e)}$$

lo cual indica que si el producto de la derecha es cero (el torque externo total) entonces el momentum angular será una constante. Note que los cambios en $\vec{L}$ sólo se deben a las acción de fuerzas externas.

TAREA: Revisar los capítulos 1-3 del libro “Mechanics” del autor Symon.

Energía

La energía cinética total se define como la suma de las contribuciones individuales,

$$K = \frac{1}{2}\sum m_i v_i^2 \tag{4}$$

Podemos separar esta expresión considerando la energía asociada al movimiento del centro de masa y la energía asociada al movimiento interno en relación al centro de masa $\vec{R}$,

$$K = K_{cm} + K' \tag{5}$$

donde $K_{cm} = \frac{1}{2}MV^2$ y $K' = \frac{1}{2}\sum m_i v_i'^2$, donde v_i' es la velocidad de la i-ésima partícula del sistema medida en relación al centro de masa.

TAREA: Obtenga la Ec.(5) a partir de la Ec.(4) cambiando el sistema de referencia, desde uno general a uno que tiene su origen en el centro de masa.

Ahora, cuando consideramos fuerzas conservativas podemos tener dos contribuciones:

$$\begin{aligned}
\vec{F}_i &= \vec{F}_i^{(e)} + \sum_j \vec{F}_{ij} \quad \text{para} \\
\vec{F}_i^{(e)} &= -\nabla_i U^{(e)}(\vec{r}_i) \\
\vec{F}_{ij} &= -\nabla_{ij} U(\vec{r}_{ij})
\end{aligned}$$

donde ∇_{ij} denota el gradiente respecto de la dirección $\vec{r}_{ij} = \vec{r}_i - \vec{r}_j$. Recuerde que $\vec{F}_{ij}$ es la fuerza que siente la partícula i debido a la acción de la partícula j.

Supongamos que el sistema cambia de alguna manera pasando de la configuración 1 a la configuración 2, moviendo cada partícula a través de una trayectoria establecida. El trabajo hecho por el sistema en este caso será:

$$\begin{aligned}
W_{1\to 2} &= \sum \int_1^2 \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i \\
&= \sum \int_1^2 \vec{F}_i^{(e)} \cdot d\vec{r}_i + \sum_{ij} \int_1^2 \vec{F}_{ij} \cdot d\vec{r}_i
\end{aligned}$$

No es difícil notar que:

$$\begin{aligned}
\sum_{ij} \int_1^2 \vec{F}_{ij} \cdot d\vec{r}_i &= \frac{1}{2}\sum_{ij} \int_1^2 \vec{F}_{ij} \cdot (d\vec{r}_i - d\vec{r}_j) \\
&= -\frac{1}{2}\sum_{ij} \int_1^2 \nabla_{ij} U(\vec{r}_{ij}) \cdot (d\vec{r}_i - d\vec{r}_j) \\
&= -\frac{1}{2}\sum_{ij} [U(\vec{r}_{ij})]_1^2
\end{aligned}$$

Al calcular el trabajo hecho por las fuerzas externas notamos que, al igual que en caso de una partícula, encontramos la forma de una ley de conservación:

$$K + \sum U^{(e)}(\vec{r}_i) + \frac{1}{2}\sum_{ij} U(\vec{r}_{ij}) = K + U = \text{constante} \tag{6}$$

TAREA: Utilizando un procedimiento análogo al que se utiliza en el caso de una partícula, muestre que es posible escribir una ley de conservación de la energía para un sistema de partículas (en términos de la energía cinética total y la energía potencial total), tal como se plantea en la Ec.(6).

Movimientos generados por fuerzas centrales

Para estudiar movimientos generados por fuerzas centrales es conveniente usar coordenadas polares.

Coordenadas polares

El sistema de coordenadas polares es un sistema de coordenadas bidimensional en el cual cada punto en el plano está determinado por la distancia a un punto fijo y un ángulo respecto de una dirección fija (ver Fig.3).

Vectores unitarios

Podemos relacionar los vectores unitarios en coordenadas cartesianas, $\hat{\imath}$ y $\hat{\jmath}$, con los vectores unitarios en coordenadas polares, $\hat{r}$ y

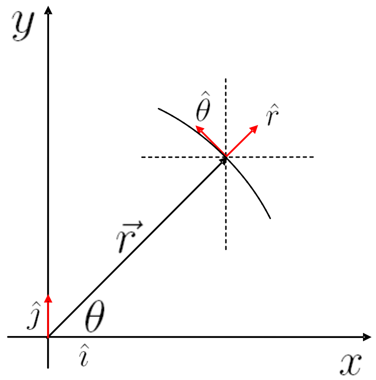

Figura 3: Los vectores denotados con un gorro son vectores unitarios (vectores de módulo 1). El vector $\vec{r}$ es el vector posición de un cuerpo en el plano coordenado xy. Notamos que $\vec{r} = r\hat{r}$ donde $r = |\vec{r}|$ denota el módulo del vector $\vec{r}$ y $\hat{r}$ es la dirección radial.

$\hat{\theta}$, a partir de la geometría de la Fig.3 de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\hat{r} &= |\hat{r}|\cos\theta\hat{\imath} + |\hat{r}|\sin\theta\hat{\jmath} = \cos\theta\hat{\imath} + \sin\theta\hat{\jmath} \\
\hat{\theta} &= |\hat{\theta}|\cos(90-\theta)(-\hat{\imath}) + |\hat{\theta}|\sin(90-\theta)\hat{\jmath} \\
&= -\sin\theta\hat{\imath} + \cos\theta\hat{\jmath}
\end{aligned}$$

Note que dado que los vectores unitarios $\hat{r}$ y $\hat{\theta}$ cambian de dirección mientras transcurre el tiempo.

Velocidad

$$\begin{aligned}
\vec{v} &= \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d(r\hat{r})}{dt} = \frac{dr}{dt}\hat{r} + r\frac{d\hat{r}}{dt} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\hat{r}} \\
&= \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} \qquad (7)
\end{aligned}$$

<u>**TAREA:**</u> Mostrar que $\dot{\hat{r}} = \dot{\theta}\hat{\theta}$.

Aceleración

$$\begin{aligned}
\vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}\right) \\
&= \ddot{r}\hat{r} + \dot{r}\dot{\hat{r}} + \dot{r}\dot{\theta}\hat{\theta} + r\ddot{\theta}\hat{\theta} + r\dot{\theta}\dot{\hat{\theta}} \\
&= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{\theta}
\end{aligned}$$

<u>**TAREA:**</u> Mostrar que $\dot{\hat{\theta}} = -\dot{\theta}\hat{r}$.

Rapidez Areolar

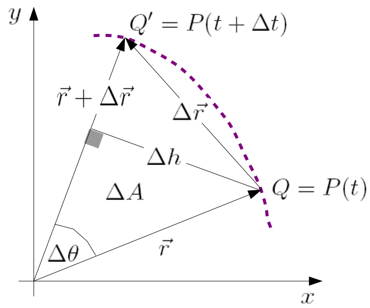

Figura 4: Esquema rapidez areolar

En la Fig.(4) consideremos dos posiciones de una partícula, en el instante t y en el instante $t+\Delta t$. ΔA es el área que barre el vector posición cuando se mueve desde la posición Q hasta la posición Q'.

La rapidez areolar se define como:

$$v_A = \frac{dA}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta A}{\Delta t}$$

Calculamos ΔA a partir de la Fig.(4) como:

$$\begin{aligned}
\Delta A &= \frac{1}{2}(r+\Delta r)\Delta h = \frac{1}{2}(r+\Delta r)r\sin\Delta\theta \\
&= \frac{1}{2}(r^2\sin\Delta\theta + r\Delta r\sin\Delta\theta)
\end{aligned}$$

Dado que nos interesa la situación cuando Δt es muy pequeño (en ese caso $\Delta\theta$ también es pequeño) utilizamos la **aproximación de ángulos pequeños**, la cual indica que $\sin\theta \approx \theta$, luego:

$$\Delta A = \frac{1}{2}(r^2\Delta\theta + r\Delta r\Delta\theta)$$

Dado que Δr y $\Delta\theta$ son pequeños, el término $\Delta r\Delta\theta$ es mucho más pequeño que los términos por separado, por lo cual es considerado un término de segundo orden y es despreciado en el análisis. Finalmente, tenemos que:

$$\begin{aligned}
v_A &= \frac{dA}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta A}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{r^2\Delta\theta}{2\Delta t}\right) = \frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt} \\
&= \frac{1}{2}r^2\dot{\theta}
\end{aligned}$$

Fuerza central

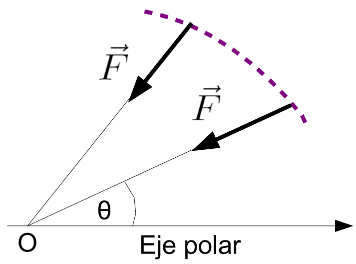

Figura 5: Esquema de una fuerza central en coordenadas polares

Un fuerza central es un tipo de fuerza cuya dirección pasa siempre por un punto fijo O y cuya magnitud es función únicamente de la distancia r al punto O (ver Fig.(5)):

$$\vec{F} = f(r)\hat{r}$$

Físicamente, tal fuerza representa una atracción si $f(r) < 0$ o una repulsión si $f(r) > 0$.

Teorema

Las fuerzas centrales son conservativas.

TAREA: Demuestre que si $\vec{F} = f(r)\hat{r}$ entonces $\nabla \times \vec{F} = 0$, luego es posible escribir $\vec{F} = -\nabla U$ y $\vec{F}$ sería una fuerza conservativa.

Teorema

En un movimiento central la energía mecánica se conserva, es decir,

$$K + U = \text{constante}$$

TAREA: Mostrar que la energía se conserva en un movimiento central.

Teorema

Un movimiento central es un movimiento que ocurre en un plano.

Verificación

Sea $\vec{L}_0$ el momentum angular con respecto a un eje que pasa por O (ver Fig.(5)), entonces, $\vec{\tau}_0 = \frac{d\vec{L}_0}{dt}$ es el torque respecto a este eje que pasa por O. Dado que $\vec{\tau}_0 = \vec{r} \times \vec{F} = r\hat{r} \times f(r)\hat{r} = rf(r)(\hat{r} \times \hat{r}) = 0$ entonces, $\frac{d\vec{L}_0}{dt} = 0$, es decir, $\vec{L}_0$ es una constante.

Por otra parte, dado que $\vec{L}_0 = \vec{r} \times \vec{p} = m\vec{r} \times \vec{v}$ tenemos que $\vec{L}_0$ es perpendicular al plano generado por $\vec{r}$ y $\vec{v}$ luego, para $\vec{L}_0$ constante el movimiento siempre ocurrirá en el plano definido por $\vec{r}$ y $\vec{v}$, por lo tanto, un movimiento central ocurre en un plano.

Ecuación de Binet

En un movimiento central la fuerza tiene sólo una componente radial, por consiguiente, la aceleración también tiene sólo una componente radial, es decir,

$$\vec{a} = a_r\hat{r} \quad \text{y} \quad \vec{a}_\theta = a_\theta\hat{\theta} = 0$$

luego,

$$\begin{aligned} a_\theta &= 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\theta}\right) = \frac{2}{r}\frac{d}{dt}\left(\frac{r^2\dot{\theta}}{2}\right) = 0 \\ &= \frac{2}{r}\frac{dv_A}{dt} = 0 \end{aligned}$$

Lo cual muestra que en un movimiento central la rapidez areolar v_A es constante. Luego es válido postular que $\dot{\theta} = \frac{C}{r^2}$ donde C es una constante arbitraria.

Por otra parte, dado que $r(\theta)$ es la trayectoria del movimiento tenemos que:

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{dr}{d\theta}\dot{\theta} \\ &= \frac{dr}{d\theta}\frac{C}{r^2} = -C\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right) \\ \ddot{r} &= \frac{d\dot{r}}{dt} = \frac{d\dot{r}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}\frac{d\dot{r}}{d\theta} \\ &= -C\dot{\theta}\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{C^2}{r^2}\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right) \end{aligned} \tag{8}$$

Ahora, la ecuación de Binet, la cual determina la aceleración radial de un objeto bajo la acción de una fuerza central queda:

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{C^2}{r^2}\left[\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r}\right]$$

Por otra parte, para el momentum angular constante $\vec{L}_0$ tenemos: $L_0 = m|\vec{r} \times \vec{v}| = |mr\hat{r} \times (\dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta})| = mr^2\dot{\theta}|\hat{r} \times \hat{\theta}|$ de donde podemos ver que $C = r^2\dot{\theta} = \frac{L_0}{m}$, finalmente:

$$a_r = -\frac{L_0^2}{(mr)^2}\left[\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r}\right]$$

Puesto que $\vec{F} = f(r)\hat{r} = ma_r\hat{r}$, tenemos:

$$f(r) = -\frac{L_0^2}{mr^2}\left[\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r}\right] \qquad (9)$$

EJERCICIO: Muestre que la fuerza necesaria para que una masa m se mueva en la trayectoria mostrada en la Fig.(6), con el centro de fuerzas ubicado en el origen del sistema coordenado xy, es dada por $f(r) \propto \frac{1}{r^5}$

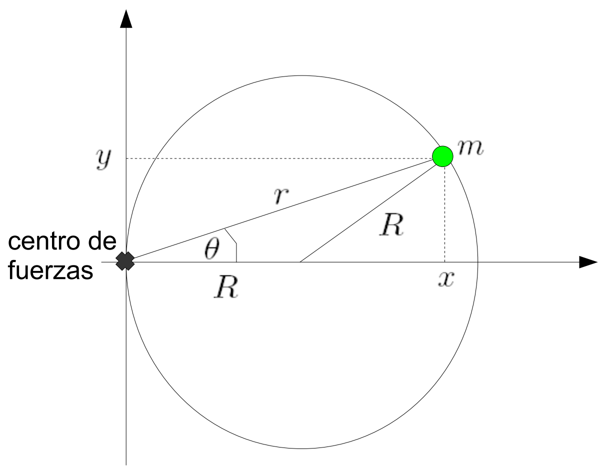

Figura 6: Ejercicio fuerzas centrales

Gravitación Universal

En 1609 Kepler publica sus dos primeras leyes basadas en el análisis del trabajo del astrónomo danés Tycho Brahe. La tercera ley fue publicada en 1619. El trabajo de Kepler fue revolucionario puesto que va contra el pensamiento de la época que establecía que las órbitas planetarias deberían ser círculos perfectos con el Sol en el centro.

Las leyes de Kepler establecen que:

- La órbita de cada planeta es una elipse, con el Sol en uno de los focos
- El radio vector que une un planeta y el Sol barre áreas iguales en tiempos iguales o, la velocidad areolar es constante
- El cuadrado del período orbital de un planeta es directamente proporcional al cubo de la longitud del semieje mayor

En 1687 Newton publicó los "Philosophiae Naturalis Principia Mathematica" donde se plantea por primera vez la Ley de Gravitación Universal. Esta ley establece que la fuerza atractiva entre dos masas, debido a la acción de la gravedad, es proporcional a las masas (m_1 y m_2) e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia (r) que separa estas masas:

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

La constante de gravitación universal G es una constante fundamental, su valor fue estimado por primera vez un siglo después del trabajo de Newton. El valor actual de la constante G es:

$$G = (6{,}67428 \pm 0{,}00067) \times 10^{-11}[\mathrm{Nm^2kg^2}]$$

En la Ley de Gravitación Universal las masas son consideradas puntuales. Por otra parte, esta ley es válida únicamente cuando las masas son suficientemente pequeñas (o el campo gravitacional no es muy intenso). En el caso más general se debe utilizar la Relatividad General, postulada por Einstein en 1915.

La Ley de Gravitación Universal tiene la misma forma que la ley de Coulomb, la cual establece el valor de la fuerza eléctrica entre dos partículas cargadas eléctricamente, ambas fuerzas decaen con el cuadrado de la distancia. La diferencia parece ser que la fuerza eléctrica puede ser atractiva o repulsiva, mientras que la fuerza de gravedad es sólo atractiva.

Figura 7: Tycho Brahe. Johannes Kepler. Isaac Newton

Esta sección busca mostrar que es posible deducir las leyes de Kepler (empíricas) a partir de las leyes de Newton (teóricas) y el análisis de fuerzas centrales que hemos desarrollado hasta ahora.

Las leyes de Kepler

Estudiamos el movimiento de un objeto sometido a la acción de una fuerza central atractiva dependiente del inverso del cuadrado de la distancia. De acuerdo a la Ley de Gravitación Universal esta fuerza es dada por:

$$\vec{F} = -\frac{k}{r^2}\hat{r}$$

donde k es una constante positiva. Dada la forma simple que toma la fuerza es conveniente usar la ecuación de Binet en la forma de la Ec.(9):

$$f(r) = -\frac{L_0^2}{mr^2}\left[\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r}\right] = -\frac{k}{r^2}$$

de donde obtenemos la siguiente ecuación diferencial lineal ordinaria con coeficientes constantes:

$$\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r} = \frac{km}{L_0^2}$$

Por conveniencia, para resolver la ecuación diferencial, utilizamos el cambio de variables $\frac{1}{r} \rightarrow u$:

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{km}{L_0^2}$$

Sabemos que la solución más general de esta **ecuación diferencial** es de la forma $u = u_h + u_p$ donde u_h denota la solución homogénea y u_p la solución particular. Es fácil notar que la solución homogénea corresponde a un oscilador armónico simple, mientras que una solución particular sería $u_p = \frac{km}{L_0^2}$ (constante), luego la solución queda:

$$u = A\cos(\theta - \theta_0) + \frac{km}{L_0^2}$$

Volviendo a la variable original r, obtenemos:

$$r = \frac{\frac{L_0^2}{km}}{1 + \frac{AL_0^2}{km}\cos(\theta - \theta_0)}$$

Finalmente, definiendo $p = \frac{L_0^2}{km}$, $\epsilon = \frac{AL_0^2}{km}$ y eligiendo $\theta_0 = 0$ queda:

$$r = \frac{p}{1 + \epsilon\cos\theta} \qquad (10)$$

Esta forma para r es conocida en la literatura, representa las denominadas secciones cónicas, las cuales dependen del valor del parámetro ϵ, que en este contexto se denomina excentricidad.

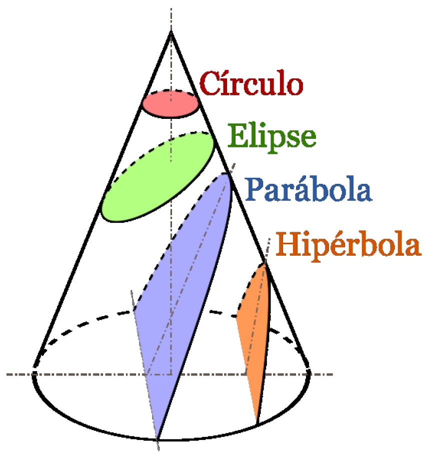

Figura 8: Secciones cónicas

Ahora buscamos relacionar la excentricidad con las diferentes constantes de movimiento del sistema para ver qué tipo de sección cónica nos entregan diferentes condiciones.

Recordamos que en un movimiento central la energía total se conserva (al igual que el momentum angular):

$$E = K + U = \text{constante}$$

Para la energía cinética tenemos:

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\vec{v}\cdot\vec{v}) = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right)$$

donde hemos usado la Ec.(7). Usando la Ec.(8) y dado que $L_0 = mr^2\dot{\theta}$ tenemos:

$$K = \frac{1}{2}\frac{L_0^2}{m^2}\left(\frac{d^2u}{d\theta^2} + u^2\right)$$

Por otra parte, podemos obtener la energía potencial integrando la fuerza de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} U &= \int -\vec{F}\cdot d\vec{r} = -\int f(r)dr(\hat{r}\cdot\hat{r}) \\ &= -\int -\frac{k}{r^2}dr = -\frac{k}{r} \end{aligned}$$

luego, $U = -ku$. Sumando K y U, además de utilizae el hecho de que $\frac{L_0^2}{mp^2} = \frac{k}{p} = \frac{mk^2}{L_0^2}$:

$$\begin{aligned} E &= K + U = \frac{1}{2}\frac{L_0^2}{m^2}\left(\frac{d^2u}{d\theta^2} + u^2\right) - ku \\ &= \frac{mk^2}{L_0^2}\left(\frac{1}{2}(1 + \epsilon^2 + 2\epsilon\cos\theta) - 1 - \epsilon\cos\theta\right) \\ &= \frac{mk^2}{2L_0^2}\left(\epsilon^2 - 1\right) \end{aligned}$$

de donde obtenemos:

$$\epsilon = \sqrt{\frac{2L_0^2E}{mk^2} + 1} \qquad (11)$$

Entonces, el movimiento de una partícula sometida a la acción de una fuerza central dependiente del inverso del cuadrado es descrito por la Ec.(10) donde la excentricidad queda definida por la Ec.(11).

TAREA: Derive la tercera ley de Kepler utilizando el análisis anterior.

ϵ	Trayectoria	Energía
$\epsilon = 1$	parábola	$E = 0$
$\epsilon > 1$	hiperbola	$E > 0$
$\epsilon < 1$	elipse	$E < 0$
$\epsilon = 0$	circunferencia	$E = -\frac{mk^2}{2L_0^2}$

Cuadro 1: Clasificación de las trayectorias (en secciones cónicas) en relación a la energía

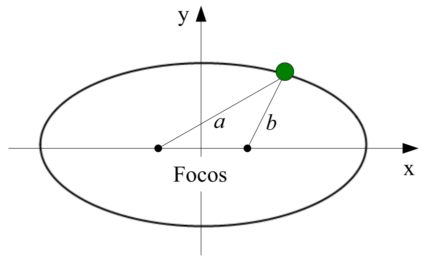

Figura 9: Elipse. La suma $a + b$ se mantiene constante.

Ecuaciones paramétricas de la trayectoria

Hasta ahora sabemos que las ecuaciones:

$$a_r = \frac{f(r)}{m} \qquad \text{y} \qquad a_\theta = 0$$

describen el movimiento de un cuerpo sometido a la acción de una fuerza central. Estas ecuaciones pueden reescribirse de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} L_0 &= mr^2\dot{\theta} &(12) \\ E &= \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L_0^2}{2mr^2} + U(r) &(13) \end{aligned}$$

Para conocer la fenomenología involucrada cuando un sistema es sometido a una fuerza central debemos resolver las ecuaciones anteriores. En principio, integrando la Ec.(12) podemos conocer el ángulo θ:

$$\theta(t) = \theta_0 + \frac{L_0}{m}\int_0^t \frac{dt}{r(t)^2} \qquad (14)$$

y considerando la Ec.(13) obtenemos:

$$t = \int_{r_0}^{r}\left(\frac{2}{m}(E - U(r)) - \frac{L_0^2}{m^2r^2}\right)dr \qquad (15)$$

A partir de las Ecs.(14)-(15) podemos, en principio, obtener $r(t)$ y $r(\theta)$.

Problema unidimensional equivalente

Aunque el problema queda resuelto, en la práctica las integrales (14) y (15) no son fáciles de manejar, en un caso concreto resulta más sencillo realizar la integración de otra manera. Estudiemos el caso general sin hacer uso de una determinada ley de fuerza.

Consideremos un movimiento unidimensional a lo largo del eje x debido a la acción de una fuerza $\vec{F} = \vec{F}(x)$. Si $\vec{F}$ es conservativa, entonces:

$$\dot{x} = \sqrt{\frac{2}{m}(E-U)}$$

de donde vemos que:

$$t = \int_{x_0}^{x} \left(\frac{2}{m}(E-U) \right) dx \qquad (16)$$

Comparando las Ecs.(15) y (16) notamos la gran similitud entre el problema de fuerzas centrales y el problema unidimensional. Esta similitud motiva la siguiente definición de un potencial efectivo U_{ef} como:

$$U_{ef} = U(r) + \frac{L_0^2}{2mr^2}$$

de modo que ahora tenemos:

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + U_{ef}$$

El término $U_c = \frac{L_0^2}{2mr^2}$ es parte de la energía cinética y no es potencial en el sentido usual, pero podemos asociarlo a una energía potencial debido a que es un término que no depende de la velocidad (L_0 es constante en un movimiento central). El término U_c es la energía potencial asociada a la fuerza centrífuga (fuerza aparente que percibe un observador en un sistema de referencia no inercial) y se denomina potencial centrífugo. Notamos que la fuerza asociada a este potencial es de la forma $F_c = -mr\dot{\theta}^2$.

Límites de la región de movimiento

Los límites de la región de movimiento son los valores de r para los cuales se cumple que:

$$E = U_{ef} \qquad \text{ó} \qquad \dot{r} = 0$$

$\dot{r} = 0$ define un punto de retorno de la trayectoria. Si existe un valor mínimo de r tal que $r > r_{min}$ entonces el movimiento es infinito, es decir, la trayectoria comienza y termina en el infinito.