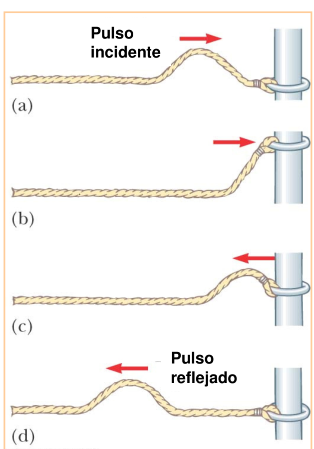
Física III
clase 3 (17/03/2010)

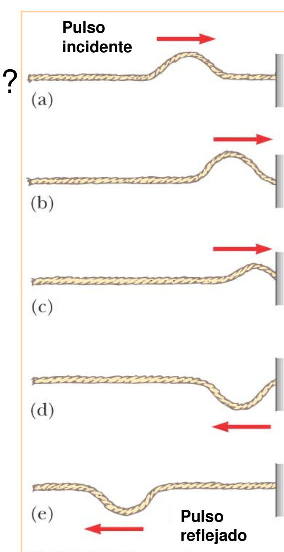
Profesor: M. Antonella Cid
Departamento de Física, Facultad de Ciencias
Universidad del Bío-Bío

Carreras: Ingeniería Civil Civil, Ingeniería Civil Mecánica, Ingeniería Civil Industrial

Reflexión

¿Qué ocurre si el medio no es uniforme?





Transmisión

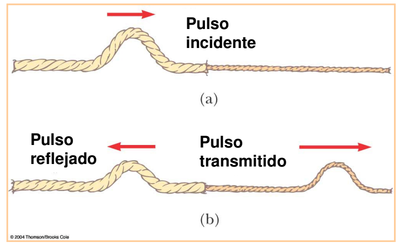
¿Qué ocurre si el medio no es uniforme?

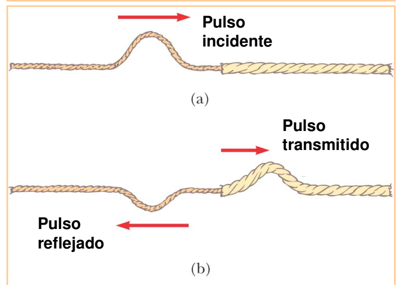
Cuando una onda o un pulso viaja desde un medio A a un medio B y $v_A < v_B$ (el medio A es más denso que B), la onda no se invierte bajo reflexión.

Cuando una onda viaja desde un medio A a un medio B y $v_A > v_B$ (el medio B es más denso que A), la onda se invierte bajo reflexión.

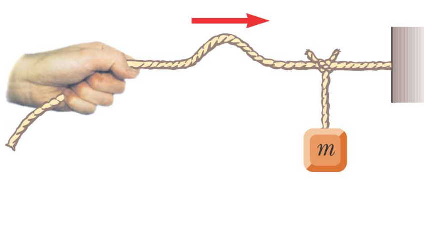
Cuando una onda cambia de medio debe mantener su frecuencia, luego:

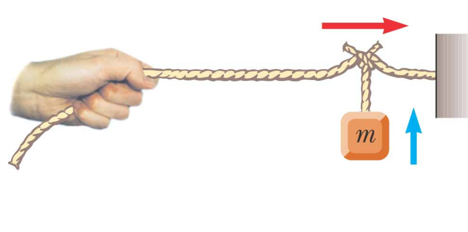
$$f_A = f_B \quad \Rightarrow \quad \frac{v_A}{\lambda_A} = \frac{v_B}{\lambda_B}$$





Energía en una onda

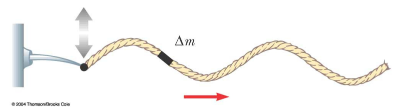




UNIVERSIDAD DEL BIO-BIO

Energía en una onda

Consideramos un “elemento de medio” de masa Δm y longitud Δx .



La energía cinética asociada a este elemento de medio es $\Delta K = \frac{1}{2}\Delta m v_y^2$

Si escribimos la masa en términos de la densidad y los Δ como diferenciales:

$$dK = \frac{1}{2}\rho dx v_y^2 \Rightarrow \boxed{dK = \frac{1}{2}\rho\omega^2 y_m^2 \cos^2(kx - \omega t)\, dx}$$

$$\boxed{y(t,x) = y_m \sin(kx - \omega t - \phi)}$$

$$v_y = \left(\frac{dy}{dt}\right)_{x=cte} = \frac{\partial y}{\partial t} = -\omega y_m \cos(kx - \omega t - \phi)$$

UNIVERSIDAD DEL BIO-BIO

Energía cinética en una onda

- Para una foto de la onda en $t = 0$ (puede ser cualquier instante t):

$$dK = \frac{1}{2}\rho\omega^2 y_m^2 \cos^2(kx) dx$$

- Integrando entre 0 y λ (puede ser entre x y $x+\lambda$):

$$K_\lambda = \int_0^\lambda dK = \frac{1}{2}\rho\omega^2 y_m^2 \int_0^\lambda \cos^2(kx) dx = \frac{1}{4}\rho\omega^2 y_m^2 \lambda$$

- La misma expresión se encuentra para la energía potencial asociada al M.A.S., luego la energía mecánica en una longitud de onda es dada por:

$$E_\lambda = K_\lambda + U_\lambda = \frac{1}{2}\rho\omega^2 y_m^2 \lambda$$

Energía potencial en una onda

- Para la energía potencial en $t = 0$ consideramos como nivel de referencia el estado de equilibrio de la cuerda, donde $y = 0$
- Energía potencial gravitatoria

$$dU_g = \Delta m g y(0,x) = \rho g y(0,x) dx = \rho g y_m \sin(kx) dx$$

$$U_{g\lambda} = \rho g y_m \int_0^\lambda \sin(kx) dx = 0$$

- Energía potencial del M.A.S.

$$dU_{M.A.S.} = -\int F_c dy = -\int \Delta m a_y dy = \int \Delta m \omega^2 y dy = \frac{1}{2}\Delta m \omega^2 y^2(0,x)$$

$$U_{M.A.S.\lambda} = \frac{1}{2}\rho\omega^2 y_m^2 \int_0^\lambda \sin^2(kx) dx = \frac{1}{4}\rho\omega^2 y_m^2 \lambda$$

Potencia promedio en una onda

- Como la onda se mueve por la cuerda, esta energía pasa por un punto dado de la cuerda en un intervalo de tiempo de un período de oscilación.
- La potencia promedio, o tasa de transferencia de energía asociada a la onda es dada por:

$$\bar{\mathcal{P}} = \frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{E_\lambda}{T} = \frac{1}{2}\rho\omega^2 y_m^2 \frac{\lambda}{T} = \frac{1}{2}\rho\omega^2 y_m^2 v$$

- La tasa de transferencia de energía en cualquier onda sinusoidal es proporcional al cuadrado de la frecuencia y al cuadrado de la amplitud de la onda

Potencia instantánea en una onda

- La potencia se define como: $\mathcal{P} \equiv \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$
- Nos concentramos en un elemento de medio, para el cual la fuerza que actúa es paralela a la velocidad

$$\mathcal{P} = F_y v_y = \left(|\vec{T}| \frac{\partial y}{\partial x} \right) \frac{\partial y}{\partial t}$$

$$\mathcal{P} = \rho \omega^2 y_m^2 v \cos^2(kx - \omega t - \phi)$$

$$\bar{\mathcal{P}} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \mathcal{P} dt = \frac{1}{2} \rho \omega^2 y_m^2 v$$

Ejemplo

- Una cuerda tensa con densidad $\rho = 5 \times 10^{-2} [kg/m]$ se somete a una tensión de $80[N]$. ¿Cuánta potencia debe suministrarse a la cuerda para generar ondas sinusoidales a una frecuencia de $60[Hz]$ y una amplitud de $6[cm]$?
- Si la cuerda debe transferir energía a una tasa de $1000[W]$ ¿cuál debe ser la amplitud necesaria si todos los otros parámetros permanecen iguales?

Ejemplo

- La función de onda para una onda en una cuerda tensa es: $$y(t,x) = 0.35[m]\sin(10\pi t - 3\pi x + \pi/4)$$ donde x está en metros y t en segundos.
- ¿Cuál es la tasa promedio a la cual se transmite energía en la cuerda si su densidad lineal de masa es 75 [g/m]?
- ¿Cuál es la energía en cada ciclo de la onda?

Ejemplo

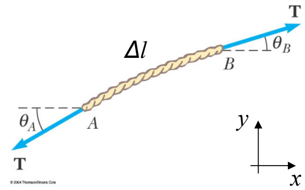
- En una región lejana del epicentro de un terremoto, la onda sísmica puede modelarse como una onda que transporta energía en una única dirección sin absorción, al igual que una onda en una cuerda.
- Suponga que la onda sísmica se mueve de un medio 1 a un medio 2 donde ambos tienen la misma densidad pero el medio 2 tiene un módulo de volumen menor
- Asuma que la rapidez de la onda cae gradualmente en un factor de 25 con reflexión despreciable
- En relación a la amplitud del movimiento en el medio 1, la amplitud en el medio 2 aumenta o disminuye?

Ecuación de la onda

Todas las funciones de onda $y(t,x)$ son soluciones de la ecuación de onda lineal

Derivamos esta ecuación para ondas en una cuerda

Consideramos un elemento de medio de largo Δl y las fuerzas que actúan sobre él



$$|\sum \vec{F}| = |\sum \vec{F}_y| = |\vec{T}|\sin\theta_B - |\vec{T}|\sin\theta_A$$

Con la aproximación de ángulos pequeños: $\begin{cases} \sin\theta \approx \theta \\ \cos\theta \approx 1 \end{cases} \Rightarrow \tan\theta \approx \sin\theta$

Para un determinado instante de tiempo:

$$\tan\theta_A = \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_A \quad \text{y} \quad \tan\theta_B = \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_B$$

$$\boxed{|\sum \vec{F}_y| = |\vec{T}|\left[\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_B - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_A\right] = ma_y = \rho\Delta x\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}}$$

Ecuación de la onda

$$\frac{\rho}{|\vec{T}|}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{(\partial y/\partial x)_B - (\partial y/\partial x)_A}{\Delta x}$$

$$\frac{\rho}{|\vec{T}|}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{(\partial y/\partial x)_B - (\partial y/\partial x)_A}{\Delta x} = \frac{\partial^2 y}{\partial^2 x}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}} \qquad \boxed{v = \sqrt{\frac{|\vec{T}|}{\rho}}}$$

Solución General:

$$y(t,x) = y_m \sin\left[a(x \pm vt) + \phi\right]$$

La periodicidad de las funciones sinusoidales fija la constante a como $2\pi/\lambda$

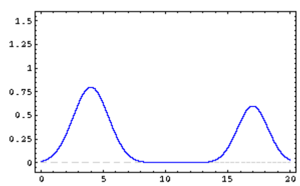
UNIVERSIDAD DEL BIO-BIO

Principio de Superposición

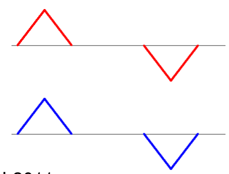
Cuando varias ondas se combinan en un punto, el desplazamiento de cualquier elemento de medio en un tiempo dado es la suma vectorial de los desplazamientos que produciría cada onda individual que actúe por sí sola, esto se denomina ***Principio de Superposición***

El principio de superposición de ondas no siempre es válido!

Para ondas mecánicas en medios elásticos el principio de superposición es válido cuando la fuerza de restitución varía linealmente con el desplazamiento. Para ondas electromagnéticas es siempre válido.



$$y(t,x) = y_1(t,x) + y_2(t,x)$$



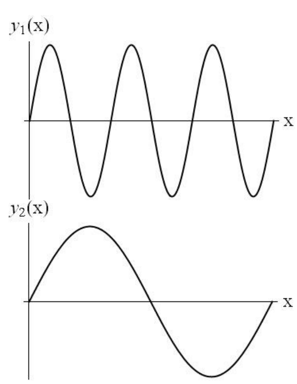
UNIVERSIDAD DEL BIO-BIO

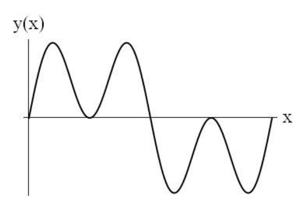
Patrones de onda complicados

Cuando dos o mas ondas diferentes, que pueden tener diferente amplitud y longitud de onda se hallan presentes simultáneamente en un medio, podemos aplicar el principio de superposición en cada punto y obtener un patrón de onda más complicado que no se parece a las ondas componentes. Sin embargo es una forma de onda viajera aceptable

$$y_1(t,x) = \sin\left(\frac{2\pi}{3\lambda}(x-vt)\right)$$

$$y_2(t,x) = \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}(x-vt)\right)$$





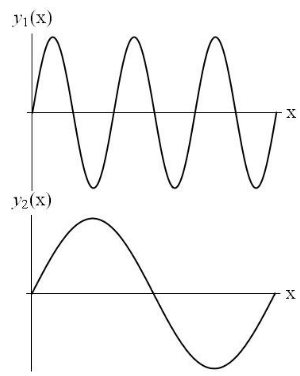
$$y(t,x) = y_1(t,x) + y_2(t,x)$$

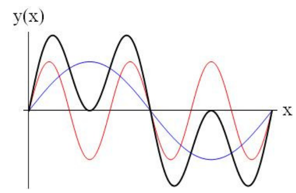
UNIVERSIDAD DEL BIO-BIO

Patrones de onda complicados

Cuando dos o mas ondas diferentes, que pueden tener diferente amplitud y longitud de onda se hallan presentes simultáneamente en un medio, podemos aplicar el principio de superposición en cada punto y obtener un patrón de onda más complicado que no se parece a las ondas componentes. Sin embargo es una forma de onda viajera aceptable

$$y_1(t,x) = \sin\left(\frac{2\pi}{3\lambda}(x-vt)\right)$$
$$y_2(t,x) = \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}(x-vt)\right)$$





$$y(t,x) = y_1(t,x) + y_2(t,x)$$

UNIVERSIDAD DEL BIO-BIO

Superposición de Ondas

Cuando el principio de superposición es válido permite analizar un movimiento ondulatorio complicado con una combinación de ondas sencillas

A principios del s.XIX J. Fourier mostró que para construir la forma más general de una onda periódica, sólo necesitamos ondas armónicas simples

Serie de Fourier

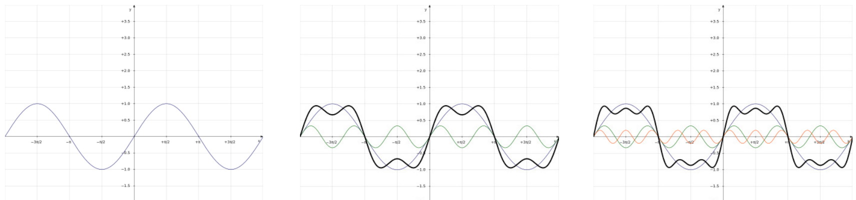
$$\boxed{\begin{aligned} y(x) &= A_0 + A_1\sin(kx) + A_2\sin(2kx) + A_3\sin(3kx) + \ldots \\ &\quad + B_1\cos(kx) + B_2\cos(2kx) + B_3\cos(3kx) + \ldots \end{aligned}}$$

Si el movimiento no es periódico, la suma se reemplaza por una integral.

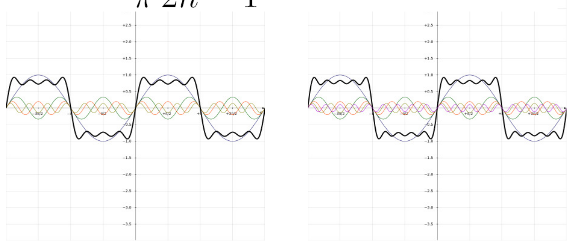
Las constantes $A_0, A_1, \ldots, B_1, B_2, \ldots$ deben escogerse adecuadamente para la onda que se quiere representar, el procedimiento se denomina ***análisis de Fourier***

UNIVERSIDAD DEL BIO-BIO

Superposición de Ondas

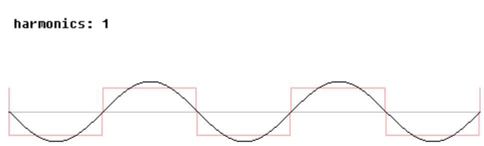


$$y_n(x) = y_m \frac{4}{\pi} \frac{1}{2n-1} \sin[(2n-1)kx + \pi]$$



UNIVERSIDAD DEL BIO-BIO

Superposición Ondas



UNIVERSIDAD DEL BIO-BIO

Próxima clase

- Velocidad de grupo, dispersión
- Interferencia de ondas en cuerdas
- Ondas estacionarias