UNIVERSIDAD DEL BIO-BIO

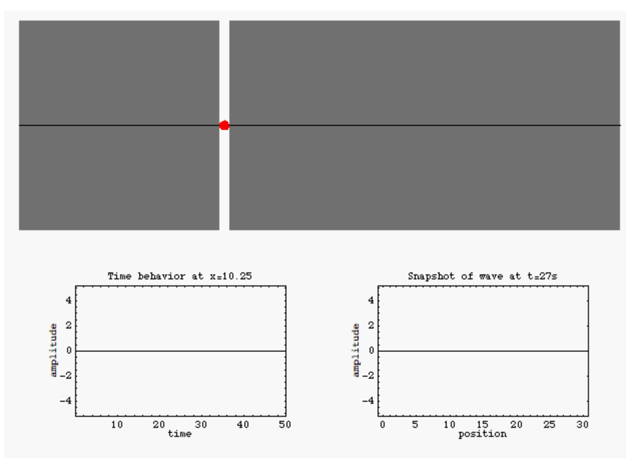
# Física II
# clase 7 (01/04)

Profesor: M. Antonella Cid
Departamento de Física, Facultad de Ciencias
Universidad del Bío-Bío

**Carrera:** Ingeniería Civil Informática



UNIVERSIDAD DEL BIO-BIO

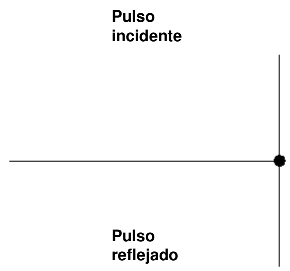



Dan Russell

UNIVERSIDAD DEL BIO-BIO

# Reflexión

¿Qué ocurre si el medio no es uniforme?

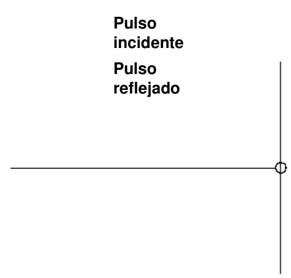





UNIVERSIDAD DEL BIO-BIO

# Reflexión

¿Qué ocurre si el medio no es uniforme?



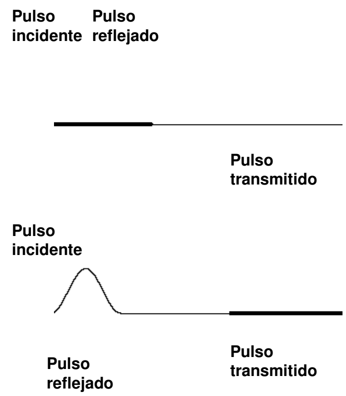
# Transmisión

Cuando una onda o un pulso viaja desde un medio A a un medio B y $v_A < v_B$ (el medio A es más denso que B), la onda no se invierte bajo reflexión.

Cuando una onda viaja desde un medio A a un medio B y $v_A > v_B$ (el medio B es más denso que A), la onda se invierte bajo reflexión.

Cuando una onda cambia de medio debe mantener su frecuencia, luego:

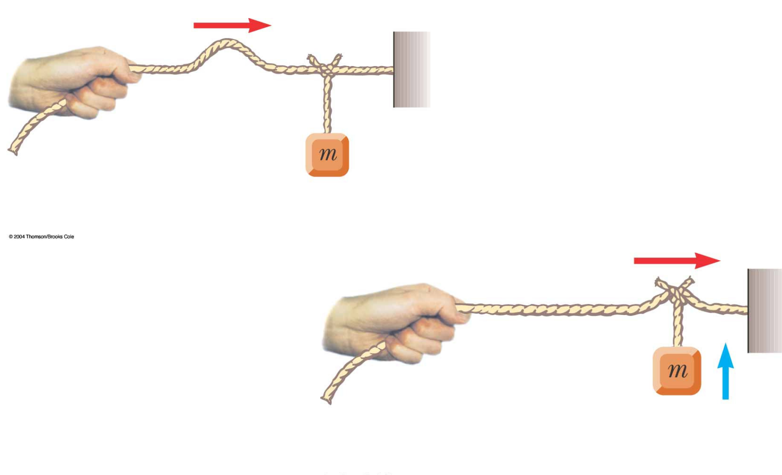
$$f_A = f_B \quad \Rightarrow \quad \frac{v_A}{\lambda_A} = \frac{v_B}{\lambda_B}$$




Ambas ondas tienen la misma frecuencia que la fuente externa



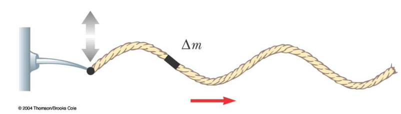
# Energía en una onda



UNIVERSIDAD DEL BIO-BIO

# Energía en una onda

Consideramos un “elemento de medio” de masa $\Delta m$ y longitud $\Delta x$ .




La energía cinética asociada a este elemento de medio es $\Delta K = \frac{1}{2}\Delta m v_y^2$

Si escribimos la masa en términos de la densidad y los $\Delta$ como diferenciales:

$$dK = \frac{1}{2}\rho dx v_y^2 \Rightarrow \boxed{dK = \frac{1}{2}\rho\omega^2 y_m^2 \cos^2(kx - \omega t)\, dx}$$

$$\boxed{y(t,x) = y_m \sin(kx - \omega t - \phi)}$$

$$v_y = \left(\frac{dy}{dt}\right)_{x=cte} = \frac{\partial y}{\partial t} = -\omega y_m \cos(kx - \omega t - \phi)$$



UNIVERSIDAD DEL BIO-BIO

# Energía cinética en una onda

- Para una foto de la onda en $t = 0$ (puede ser cualquier instante *t*):

$$dK = \frac{1}{2}\rho\omega^2 y_m^2 \cos^2(kx)dx$$

- Integrando entre $0$ y $\lambda$ (puede ser entre $x$ y $x+\lambda$ ):

$$K_\lambda = \int_0^\lambda dK = \frac{1}{2}\rho\omega^2 y_m^2 \int_0^\lambda \cos^2(kx)dx = \frac{1}{4}\rho\omega^2 y_m^2 \lambda$$

- La misma expresión se encuentra para la energía potencial asociada al M.A.S., luego la energía mecánica en una longitud de onda es dada por:

$$E_\lambda = K_\lambda + U_\lambda = \frac{1}{2}\rho\omega^2 y_m^2 \lambda$$

# Energía potencial en una onda

- Para la energía potencial en $t = 0$ consideramos como nivel de referencia el estado de equilibrio de la cuerda, donde $y = 0$

- Energía potencial gravitatoria

$$dU_g = \Delta m g y(0,x) = \rho g y(0,x) dx = \rho g y_m \sin(kx) dx$$

$$U_{g\lambda} = \rho g y_m \int_0^\lambda \sin(kx) dx = 0$$

- Energía potencial del M.A.S.

$$dU_{M.A.S.} = -\int F_c dy = -\int \Delta m a_y dy = \int \Delta m \omega^2 y dy = \frac{1}{2}\Delta m \omega^2 y^2(0,x)$$

$$U_{M.A.S.\lambda} = \frac{1}{2}\rho\omega^2 y_m^2 \int_0^\lambda \sin^2(kx) dx = \frac{1}{4}\rho\omega^2 y_m^2 \lambda$$



# Potencia promedio en una onda

- Como la onda se mueve por la cuerda, esta energía pasa por un punto dado de la cuerda en un intervalo de tiempo de un período de oscilación.
- La potencia promedio, o tasa de transferencia de energía asociada a la onda es dada por:

$$\bar{\mathcal{P}} = \frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{E_\lambda}{T} = \frac{1}{2}\rho\omega^2 y_m^2 \frac{\lambda}{T} = \frac{1}{2}\rho\omega^2 y_m^2 v$$

- La tasa de transferencia de energía en cualquier onda sinusoidal es proporcional al cuadrado de la frecuencia y al cuadrado de la amplitud de la onda

# Ejemplo

- Una cuerda tensa con densidad $\rho = 5 \times 10^{-2}[kg/m]$ se somete a una tensión de $80[N]$. ¿Cuánta potencia debe suministrarse a la cuerda para generar ondas sinusoidales a una frecuencia de $60[Hz]$ y una amplitud de $6[cm]$?

- Si la cuerda debe transferir energía a una tasa de $1000[W]$ ¿cuál debe ser la amplitud necesaria si todos los otros parámetros permanecen iguales?



# Ejemplo

- La función de onda para una onda en una cuerda tensa es: $$y(t,x) = 0.35[m]\sin(10\pi t - 3\pi x + \pi/4)$$

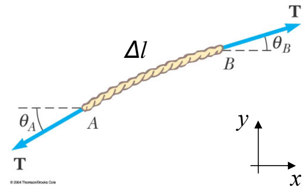
  donde $x$ está en metros y $t$ en segundos.
- ¿Cuál es la tasa promedio a la cual se transmite energía en la cuerda si su densidad lineal de masa es 75 [g/m]?
- ¿Cuál es la energía en cada ciclo de la onda?

# Ecuación de la onda

Todas las funciones de onda $y(t,x)$ son soluciones de la ecuación de onda lineal

Derivamos esta ecuación para ondas en una cuerda

Consideramos un elemento de medio de largo $\Delta l$ y las fuerzas que actúan sobre él




$$|\sum \vec{F}| = |\sum \vec{F}_y| = |\vec{T}|\sin\theta_B - |\vec{T}|\sin\theta_A$$

Con la aproximación de ángulos pequeños: $\begin{cases}\sin\theta \approx \theta \\ \cos\theta \approx 1\end{cases} \Rightarrow \tan\theta \approx \sin\theta$

Para un determinado instante de tiempo:

$$\tan\theta_A = \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_A \quad \text{y} \quad \tan\theta_B = \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_B$$

$$\boxed{|\sum \vec{F}_y| = |\vec{T}|\left[\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_B - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_A\right] = ma_y = \rho\Delta x\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}}$$





# Ecuación de la onda

$$\frac{\rho}{|\vec{T}|}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{(\partial y/\partial x)_B - (\partial y/\partial x)_A}{\Delta x}$$

$$\frac{\rho}{|\vec{T}|}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\partial y/\partial x)_B - (\partial y/\partial x)_A}{\Delta x} = \frac{\partial^2 y}{\partial^2 x}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}} \qquad \boxed{v = \sqrt{\frac{|\vec{T}|}{\rho}}}$$

Solución General:

$$y(t,x) = y_m \sin\left[a(x \pm vt) + \phi\right]$$

La periodicidad de las funciones sinusoidales fija la constante $a$ como $2\pi/\lambda$