Física II
clase 4 (23/03)

Profesor: M. Antonella Cid
Departamento de Física, Facultad de Ciencias
Universidad del Bío-Bío

Carrera: Ingeniería Civil Informática

Oscilaciones forzadas

- Ecuaciones diferenciales lineales:

$$m\left(\frac{d^2x(t)}{dt^2}+\underbrace{\eta\frac{dx(t)}{dt}}_{\text{amortiguación}}+\omega^2x(t)\right)=\underbrace{F(t)}_{\text{forzamiento}}$$

- La solución general de esta ecuación diferencial lineal se construye sumando la solución homogénea ($F(t)=0$) con alguna solución particular ($F(t)\neq 0$)

$$\boxed{x(t)=x_h(t)+x_p(t)}$$

UNIVERSIDAD DEL BIO-BIO

Oscilaciones forzadas (no amortiguadas)

$$m\left(\frac{d^2x(t)}{dt^2}+\omega^2 x(t)\right)=F(t)$$

$$F(t)=F_0\cos(\omega_e t)$$

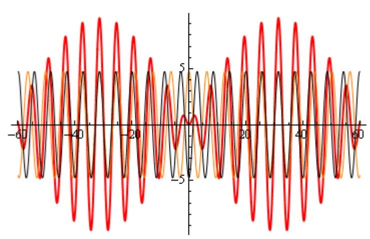
$$\boxed{x(t)=\left[x_0-\frac{F_0/m}{\omega^2-\omega_e^2}\right]\cos(\omega t)+\frac{F_0/m}{\omega^2-\omega_e^2}\cos(\omega_e t)}$$

$$x(0)=x_0 \qquad\qquad v(0)=0$$

UNIVERSIDAD DEL BIO-BIO

Solución con $x_0=0$ y $\omega_e \sim \omega$ Resonancia

- $F_0=1$, $x_0=0$, $m=1$, $\omega_e=1.1$, $\omega=1$



$$\boxed{x(t)\approx-\left[\frac{2F_0/m}{\omega^2-\omega_e^2}\sin(\omega_- t)\right]\sin(\omega t)}$$

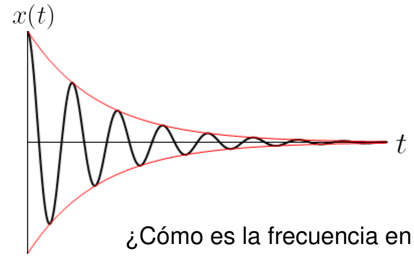
$$\omega\approx\frac{\omega+\omega_e}{2} \qquad \omega_-\approx\frac{\omega-\omega_e}{2}$$

Oscilaciones amortiguadas

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \eta\frac{dx(t)}{dt} + \omega^2 x(t) = 0$$

Tarea: **(25 marzo)**

$$\boxed{x(t) = x_m e^{-\eta t/2}\cos(\omega' t + \phi)}$$



$$\omega' = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\eta^2}{4}}$$

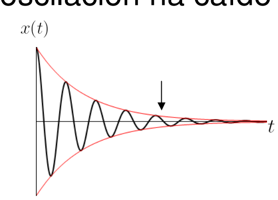
amortiguamiento pequeño

$$T \approx 2\pi/\omega$$

¿Cómo es la frecuencia en comparación al caso sin amortiguación?

Oscilaciones amortiguadas

- La ***vida media*** de la oscilación se define como el tiempo en el cual la amplitud de la oscilación ha caído a 1/e (37%) de su valor original.
- **Este tiempo es dado por $2/\eta$!**



- La energía de un sistema amortiguado no se conserva
- Si el amortiguamiento es pequeño ($\omega' \sim \omega$), podemos aproximar la energía como: $E(t) \approx \frac{1}{2}k(x_m e^{-\eta t/2})^2$

Oscilaciones forzadas (amortiguadas)

$$m\left(\frac{d^2x(t)}{dt^2}+\eta\frac{dx(t)}{dt}+\omega^2x(t)\right)=F(t)=F_0\cos(\omega_e t)$$

$$\boxed{x(t)=\frac{F_0/m}{G}\sin(\omega_e t-\phi)}$$ **Tarea:** **(25 marzo)**

Corresponde a la solución de estado estacionario

$$G=\sqrt{(\omega_e^2-\omega^2)^2+\eta^2\omega_e^2} \qquad \phi=\cos^{-1}(\eta\omega_e/G)$$

El sistema oscila con la frecuencia externa. La fuerza externa proporciona la energía necesaria para mantener la amplitud constante.

¿Para qué frecuencia externa es máxima la amplitud? FREC. RESONANTE

Ejemplo

- En el sistema de la figura el bloque tiene una masa de 1.52 [kg] y la constante elástica es 8.13 [N/m]. La fuerza de fricción está dada por –bv(t), donde en este caso b=227 [g/s]. Suponga que el bloque se suelta cuando el resorte se ha elongado 12.5 [cm]. ¿En cuánto tiempo la amplitud ha disminuido a 1/3?.¿Cuántas oscilaciones realiza el bloque en este tiempo?