Física III (sección 3)
(230006-230010)
Ondas, Óptica y Física Moderna

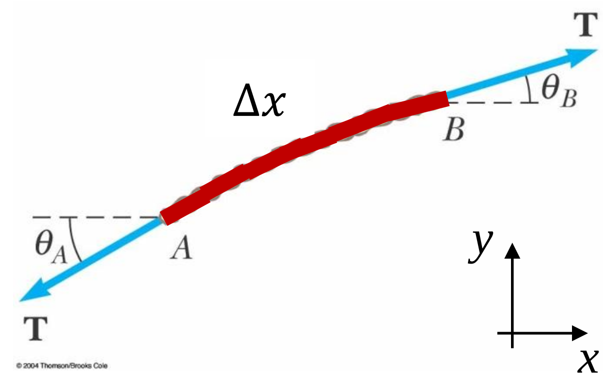
Profesor: M. Antonella Cid
Departamento de Física, Facultad de Ciencias
Universidad del Bío-Bío

Carreras: Ingeniería Civil Civil, Ingeniería Civil Mecánica, Ingeniería Civil Industrial

Ecuación de la onda

Todas las funciones de onda $y(t, x)$ son soluciones de la ecuación de onda lineal

Derivamos esta ecuación para ondas en una cuerda considerando un elemento de medio de largo Δx y las fuerzas que actúan sobre él



$$\left|\sum \vec{F}\right| = \left|\sum \vec{F}_y\right| = \left|\vec{T}\right| \sin(\theta_B) - \left|\vec{T}\right| \sin(\theta_A)$$

Con la aproximación de ángulos pequeños: $\begin{cases} \sin(\theta) \approx \theta \\ \cos(\theta) \approx 1 \end{cases} \Rightarrow \tan(\theta) \approx \sin(\theta)$

Para un determinado instante de tiempo:

$$\tan(\theta_A) = \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_A \quad \text{y} \quad \tan(\theta_B) = \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_B$$

$$\left|\sum \vec{F}_y\right| = \left|\vec{T}\right| \left[\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_B - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_A\right] = m a_y = \rho_l \Delta x \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

Ecuación de la onda

$$\frac{\rho_l}{|\vec{T}|}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_B - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_A}{\Delta x}$$

$$\frac{\rho_l}{|\vec{T}|}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_B - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_A}{\Delta x} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}}$$

donde para las ondas en cuerdas: $v = \sqrt{\frac{|\vec{T}|}{\rho_l}}$

Solución General:

$$y(t,x) = f\big(a(x+vt)\big) + g(a(x-vt))$$

La periodicidad de las funciones sinusoidales fija la constante a como $\frac{2\pi}{\lambda}$

UNIVERSIDAD DEL BIO-BIO

Ejercicio

- Muestre que la función de onda

$$y(t, x) = 2y_m \sin(kx)\cos(\omega t)$$

es solución de la ecuación de onda

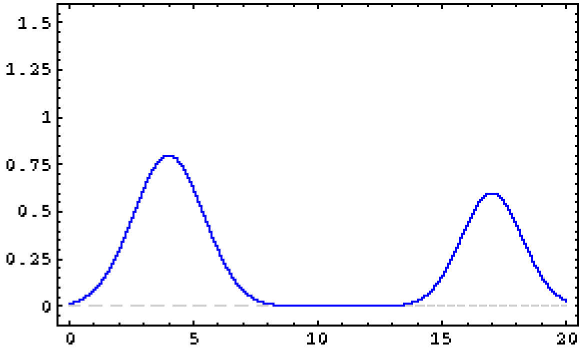
UNIVERSIDAD DEL BIO-BIO

Principio de Superposición

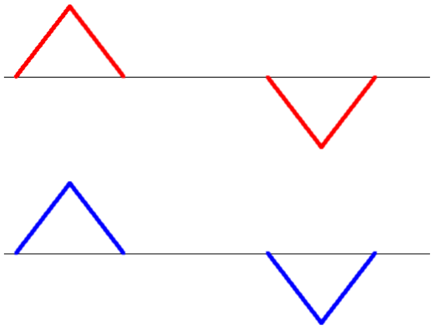
Cuando varias ondas se combinan en un punto, el desplazamiento de cualquier elemento de medio en un tiempo dado es la suma vectorial de los desplazamientos que produciría cada onda individual que actúe por sí sola, esto se denomina ***Principio de Superposición***

El principio de superposición de ondas no siempre es válido!

Para ondas mecánicas en medios elásticos el principio de superposición es válido cuando la fuerza de restitución varía linealmente con el desplazamiento. Para ondas electromagnéticas es siempre válido.



$$y(t,x) = y_1(t,x) + y_2(t,x)$$

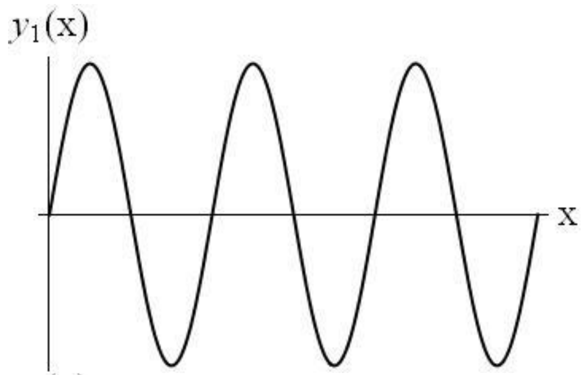


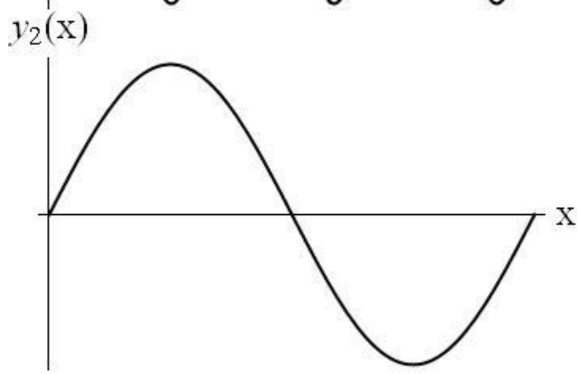
Principio de Superposición

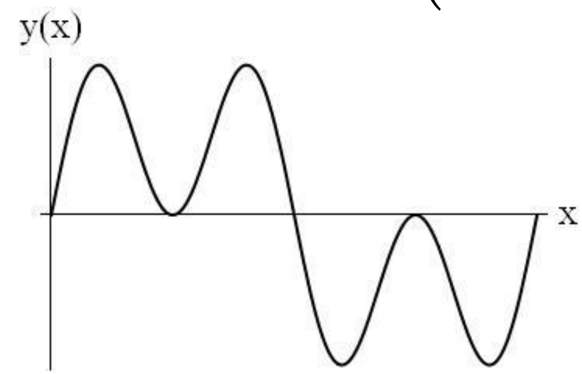
Cuando dos o mas ondas diferentes, que pueden tener diferente amplitud y longitud de onda se hallan presentes simultáneamente en un medio, podemos aplicar el principio de superposición en cada punto y obtener un patrón de onda más complicado que no se parece a las ondas componentes. Sin embargo es una forma de onda viajera aceptable

$$y_1(t,x) = \sin\left(\frac{2\pi}{3\lambda}(x - vt)\right)$$

$$y_2(t,x) = \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}(x - vt)\right)$$







$$y(t,x) = y_1(t,x) + y_2(t,x)$$

UNIVERSIDAD DEL BIO-BIO

Velocidad de grupo y dispersión

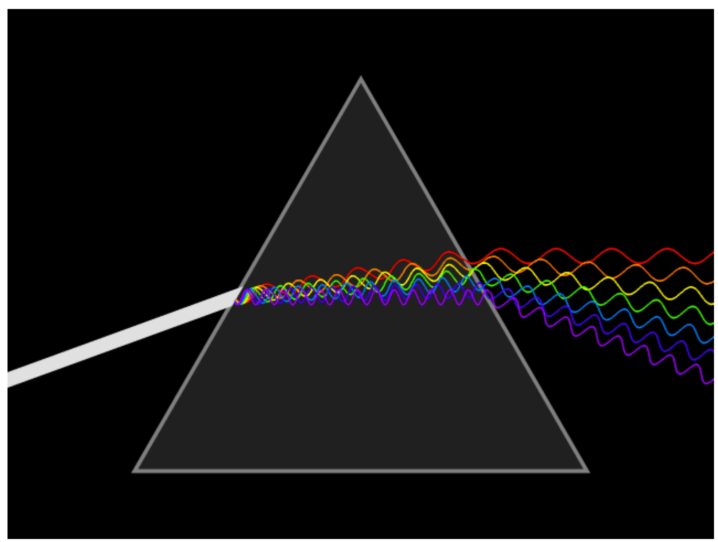
- La onda mantendrá su forma únicamente al viajar por un ***medio no dispersivo***
- En un medio dispersivo, las formas de onda de las ondas sinusoidales componentes no cambian, pero cada una de ellas puede viajar con una velocidad de fase diferente. En este caso, la forma de la onda combinada cambia al alterarse la relación de fase entre las componentes
- La ***dispersión*** ocurre porque las ondas componentes viajan a velocidades de fase diferentes
- La ***velocidad de grupo*** es la velocidad a la cual viaja la información o la energía en una onda real. No existe una relación sencilla entre la velocidad de fase de las componentes y la velocidad de grupo de la onda, depende de la dispersión del medio
- La onda puede cambiar también de forma si cede energía mecánica al medio cuando se presentan ***fuerzas disipativas*** (que dependen en general de la velocidad)

UNIVERSIDAD DEL BIO-BIO

Dispersión

- En un medio no dispersivo todas las ondas componentes viajan con la misma velocidad de fase. El aire es un ejemplo de un medio aproximadamente no dispersivo. El vacío es un medio no dispersivo.

- En un medio no dispersivo, todas las ondas componentes viajan a la misma velocidad de fase y la velocidad de grupo de la onda resultante será igual al valor común de la velocidad de fase



Serie de Fourier

Cuando el principio de superposición es válido, éste permite analizar un movimiento ondulatorio complicado con una combinación de ondas sencillas

A principios del s.XIX J. Fourier mostró que para construir la forma más general de una onda periódica, sólo necesitamos ondas armónicas simples

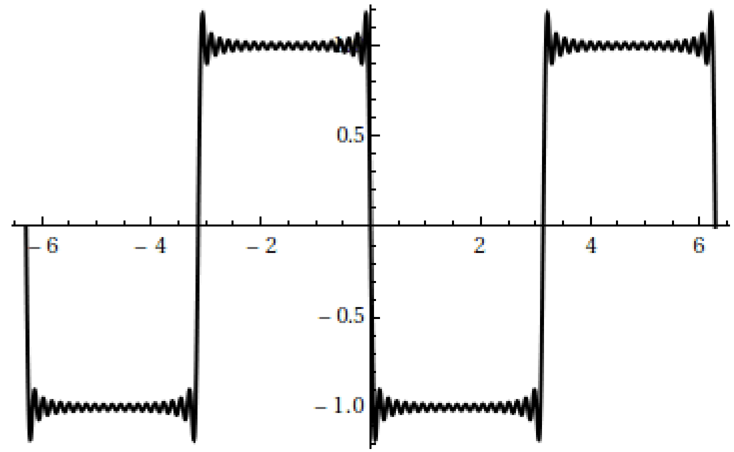
Serie de Fourier

$$y(\theta)= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(n\theta) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos(n\theta)$$

Las constantes $a_0, a_1, \ldots, b_1, b_2, \ldots$ deben escogerse adecuadamente para la onda que se quiere representar, el procedimiento se denomina ***análisis de Fourier***

Serie de Fourier: onda cuadrada

$$f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi \leq x < 0 \\ +1, & 0 \leq x < \pi \end{cases}$$



Coeficientes de la serie de Fourier

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)d\theta$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\sin(n\theta)d\theta$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\cos(n\theta)d\theta$$

$$y_n(\theta) = b_n = \frac{2 - 2\cos((2n-1)\pi)}{(2n-1)\pi}$$

Serie de Fourier para la onda cuadrada

$$y(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 - 2\cos((2n-1)\pi)}{(2n-1)\pi} \sin((2n-1)\theta)$$

Tarea

- Mostrar que:

$$\sin(kx - \omega t - \phi_1)\sin(kx - \omega t - \phi_2) = 2\cos\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right)\sin(kx - \omega t - \phi')$$

donde $\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1$ y $\phi' = \frac{\phi_1 + \phi_2}{2}$

- Mostrar que:

$$\sin(kx + \omega t) + \sin(kx - \omega t) = 2\sin(kx)\cos(\omega t)$$

UNIVERSIDAD DEL BIO-BIO