UNIVERSIDAD DEL BÍO-BÍO
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

MÉTODOS NUMÉRICOS 220138: REVISIÓN TEST 1 MATLAB

Problema 1:. Hacer un programa Matlab que dibuje en un mismo gráfico las funciones

$$f(x) = \begin{cases} 2\sin(2x^2), & x \leq 0, \\ 1 - \mathrm{e}^{-x}, & x > 0. \end{cases} \qquad g(x) = x^3.$$

Problema 2:. Haga un programa *function* eficiente que genere una matriz de la forma

$$A = \begin{pmatrix} 2\mathbf{I} & -\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{I} & 2\mathbf{I} & -\mathbf{I} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{I} & 2\mathbf{I} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3n\times 3n},$$

y la almacene como "sparse".

Problema 3:. Sean

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} n+1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & n+1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n}.$$

1. Hacer un programa MATLAB que:

   (a) genere la matriz anterior para $n = 10$;

   (b) calcule una matriz $\mathbf{R}$ tal que $\mathbf{A} = \mathbf{R}^t\mathbf{R}$ y resuelva mediante el método de Cholesky el sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, para ello utilice la sintaxis de Matlab

```
>> R=chol(A);
>> x=R\(R'\b)
```

2. >Es la matriz $\mathbf{A}$ definida positiva? Justifique su respuesta.

3. Como ejercicio adicional, ejecute la sintaxis anterior ingresando una matriz que no sea definida positiva. Observe qué sucede.

4. Resolver el sistema para diferentes valores de n mediante: LU, Cholesky, Gauss-Seidel, Jacobi y estudiar el tiempo que tardan en obtener la solución.

Problema 4:.

1. Haga un programa *function* que genere una matriz de la forma

$$A = \begin{pmatrix} \alpha\,\mathbf{I} & \varepsilon\,\mathbf{1} \\ \varepsilon\,\mathbf{1} & \alpha\,\mathbf{I} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n\times 2n},$$

   donde $\mathbf{1}$ denota la matriz de elementos todos 1.

2. Determine la factorización LU de A, para $n = 20$, $\alpha = 41$ y $\varepsilon = 2$.

3. Aplicando la factorización LU de A, obtenida en (b), encuentre una matriz C tal que

$$AC = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n\times n} \qquad \text{para } n = 20\,.$$

4. Calcular $||C||_\infty$.

Problema 5:.

1. Escriba una función de Matlab que permita definir para $n \in N$, una matriz $A = (a_{ij}) \in R^{n\times n}$ y un vector $b \in R^{n\times 1}$, con
$$a_{ij} = \begin{cases} 20 + i & i = j \\ \frac{(-1)^{i+j}}{i+j} & i \neq j \end{cases}, \quad b_i = \frac{1}{i}$$

2. Para $n = 30$, se pretende resolver el sistema $Ax = b$ con los datos anteriores, para esto, se pide que primero calcule calcule $\rho(T_j)$ y $\rho(T_g)$, Cual de los dos métodos converge más rápido?

3. El método Iterativo de SOR permite acelerar la convergencia del método de Gauss-Seidel para obtener una mejor aproximación en un menor número de iteraciones, para esto se introduce un parámetro $0 < w < 2$ y se define las matrices de iteración
$$T_w = (D - wL)^{-1}((1 - w)D + wU), \quad c_w = w(D - wL)^{-1}b$$
donde recordemos que $A = D - L - U$, con D una matriz diagonal, L matriz triangular inferior y U una matriz triangular superior. Considerando $n = 30$, genere la matriz definida en el ejercicio 1 y calcule $\rho(T_w)$ considerando $w = 0.8$, $w = 1.2$, $w = 1.6$. Con cual elección de los parámetros w el método de SOR es más rápido que los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel?.

4. A partir de los algoritmos en Matlab para el método de Jacobi o Gauss-Seidel, se pide implementar el método de SOR. Resolver el ejercicio anterior con los tres métodos Jacobi, Gauss-Seidel y SOR con $tol = 10^{-4}$ y un número de iteraciones máximo de 20. Son razonable los resultados obtenidos en relación a lo concluido en el punto 3?